

# Hancurnya Kemutlakan Matematika: Sebuah *Krisis* Rasionalitas

Aditya Firman Ihsan

Either mathematics is too big for the **human mind** or  
the **human mind** is more than a machine

Kurt Gödel

# Mencari yang **absolut**

Kebenaran absolut/mutlak adalah impian manusia

Kebangkitan akal Yunani klasik -> reformasi kebenaran

# Mencari yang **absolut**

Rasionalitas mulai muncul secara formal pada Yunani klasik

Sempat hilang dari peradaban barat

Bangkit Kembali dalam bentuk reformasi berpikir pada era pencerahan

# Mencari yang **absolut**

Lahir semangat untuk membangun ulang kebenaran

Pembersihan dari mitos dan dogma

Kemampuan berpikir rasional -> simbol martabat manusia



# Semangat reduksionis

Mencari ke titik terdasar ilmu!

Impian terbesar: menemukan aturan fundamental alam semesta

# Semangat reduksionis

**Fisika:** pencarian atas elemen terkecil materi dan teori segala sesuatu

**Biologi:** pencarian entitas terkecil pembentuk kehidupan

**Kimia:** pemetaan unsur-unsur terdasar penyusun semua zat

**Kosmologi:** penelusuran asal mula alam semesta

**Psikologi:** pencarian komponen dasar jiwa

dst

# Semangat reduksionis

Dua alat utama: rasionalitas dan metode empiris



# Apa sebenarnya **rasionalitas**?

Rasional: melihat keterkaitan antara hal-hal dengan alasan (*reason*) atau penjelasan.

Standar paling kuat penjelasan rasional: logika

# Apa sebenarnya **rasionalitas**?

Logika bergerak 2 arah:

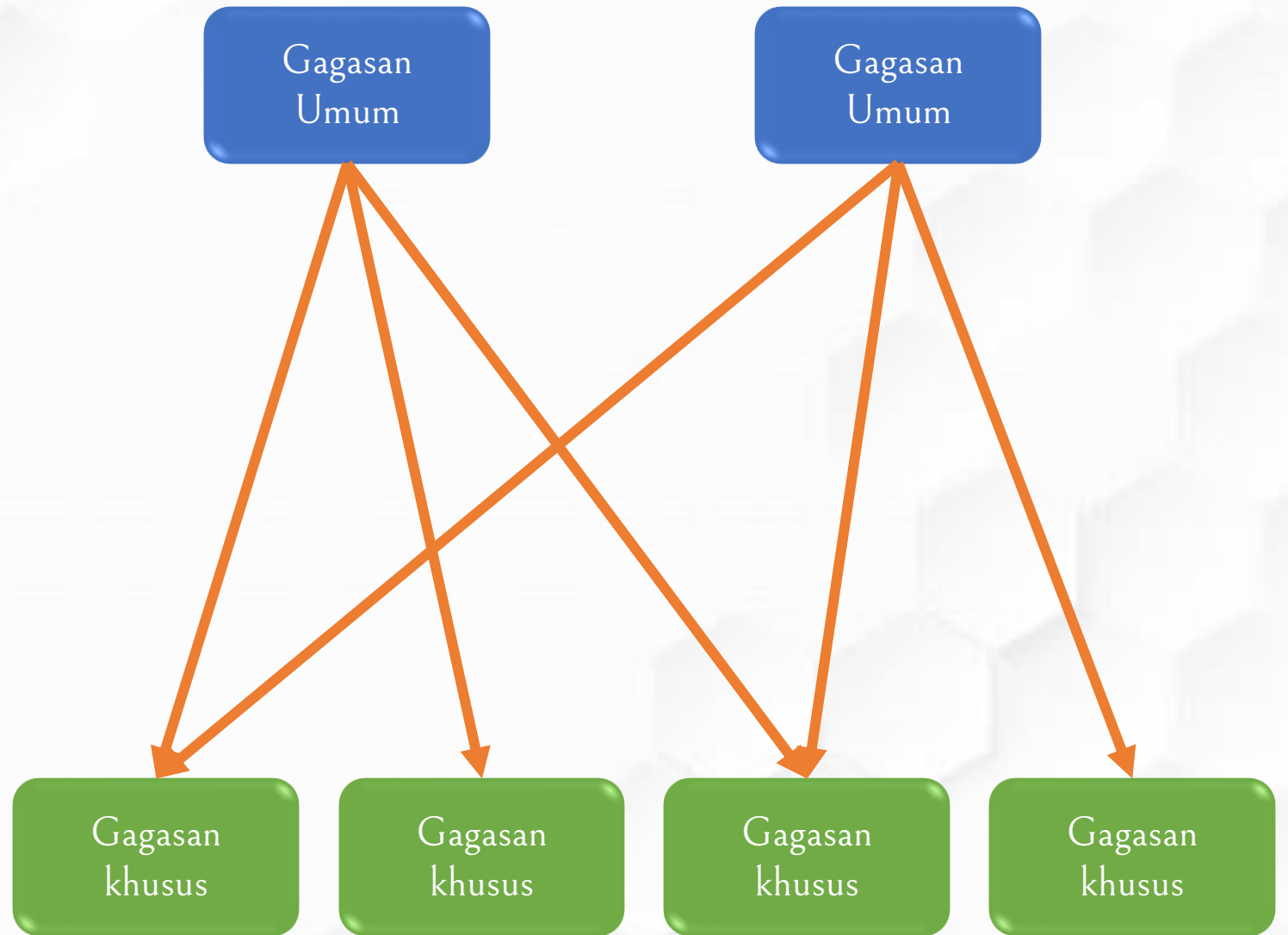
- (1) menggali konsep yang lebih kuat dengan proses mempertanyakan/meragukan;
- (2) mengembangkan penjelasan dan justifikasi dengan deduksi dari konsep yang umum



Simplifikasi /  
Abstraksi /  
Generalisasi



Kontekstualisasi  
/ Elaborasi /  
Deduksi



# Apa sebenarnya **rasionalitas**?

Logika sering tercampur baur dengan persepsi, emosi, bahasa, dan bias lain.

Logika murni: **matematika**.

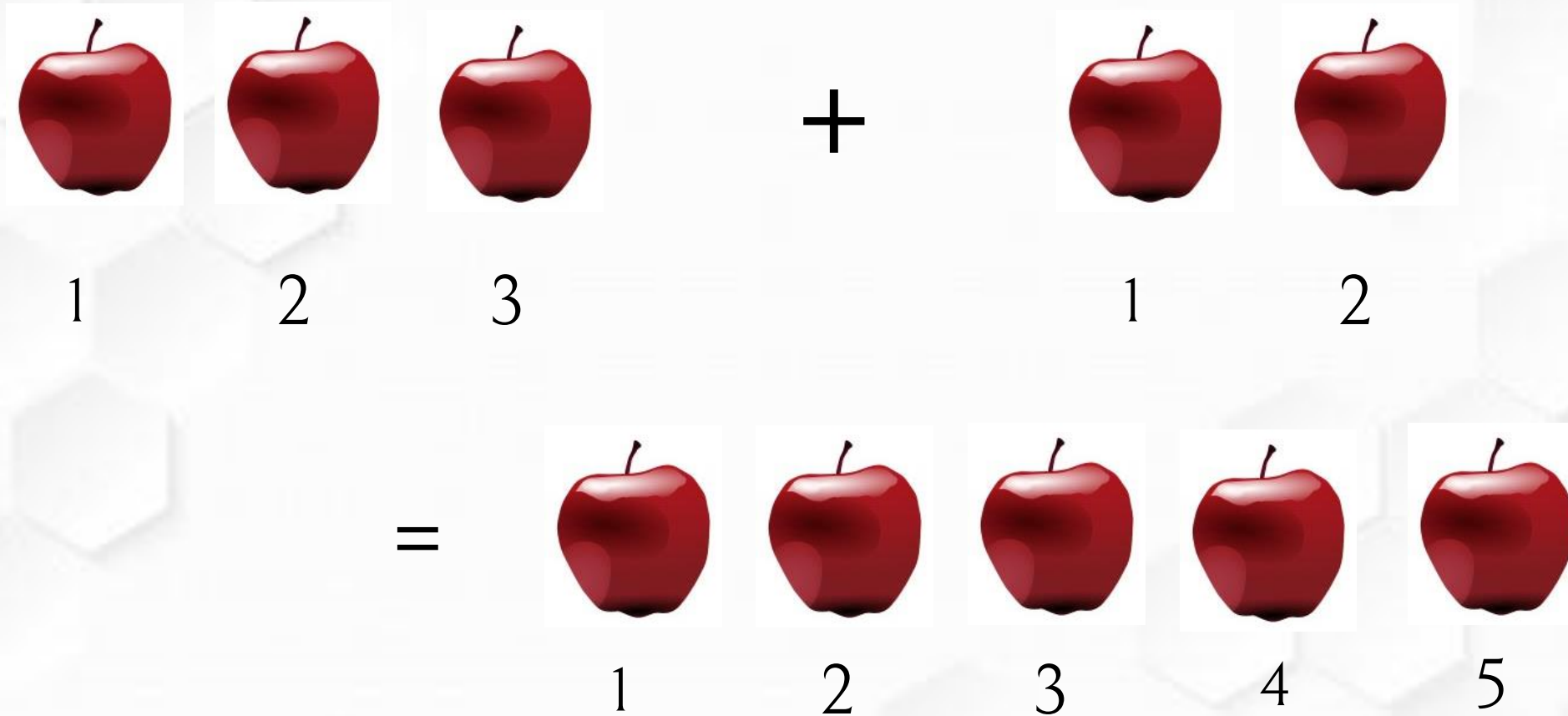


Matematika: Ilmu berhitung?

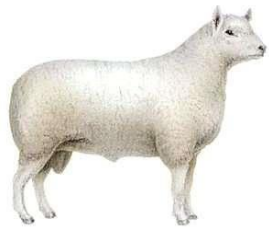
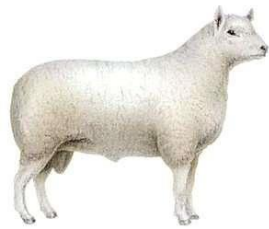
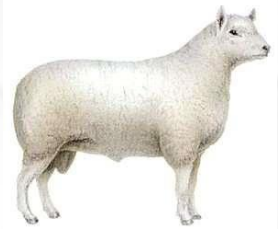
$$\forall x \forall y [\forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y].$$

$$\forall u \forall v (\exists w (x \times w = u \times v) \rightarrow (\exists w (x \times w = u) \vee \exists w (x \times w = v))) \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 1$$

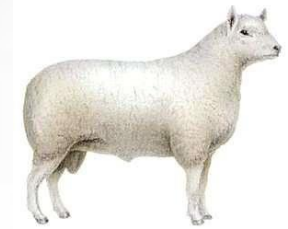
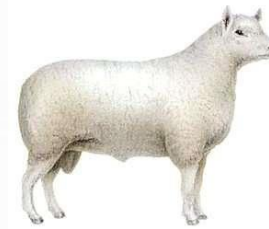
Yuk berhitung!



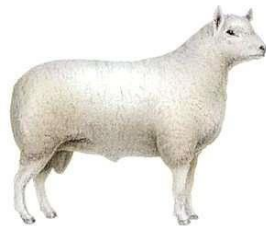
# Yuk berhitung!



+



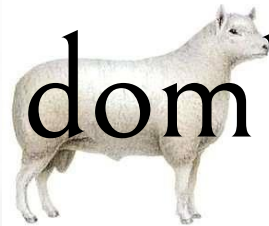


= 5





Yuk berhitung!

$$3 \text{  domba + 2 \text{  domba = 5 \text{  domba}$$

$$3 \text{ juta} + 2 \text{ juta} = 5 \text{ juta}$$

$$3 x + 2 x = 5 x$$

$$3 e^{\pi+x^2} + 2 e^{\pi+x^2} = 5 e^{\pi+x^2}$$

Yuk berhitung!

$$5x + 2y = 50$$

$$2x + y = 10$$

Yuk berhitung!

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

# Menggali *Matematika*

Matematika: *Abstraksi + Deduksi*

Tidak terkait realita: bentuk murni rasionalitas

Realita

representasi



interpretasi

Simbol

generalisasi



proyeksi

Idea

Matematika

Seperti **Bahasa**, namun hasil generalisasi

# Menggali **Matematika**

Setiap '**objek**' matematika merupakan hasil definisi.

Setiap '**hukum**' di matematika merupakan konstruksi dari teorema sebelumnya yang telah terbukti benar.

Semua proses **pendefinisian** dan **konstruksi** ini hanya membutuhkan logika.

# Menggali Matematika

Bangunan Matematika: tersusun dari **Teorema** (pernyataan yang sudah dibuktikan kebenarannya, cth: teorema Pythagoras)

Suatu teorema berasal dari teorema lain dan menghasilkan teorema lain -> membentuk rantai/jejaring

# Menggali **Matematika**

Jika matematika adalah **rantai teorema**, apa yang ada di ujung?

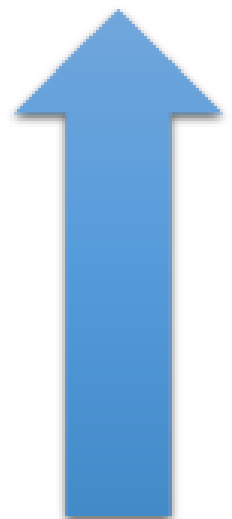
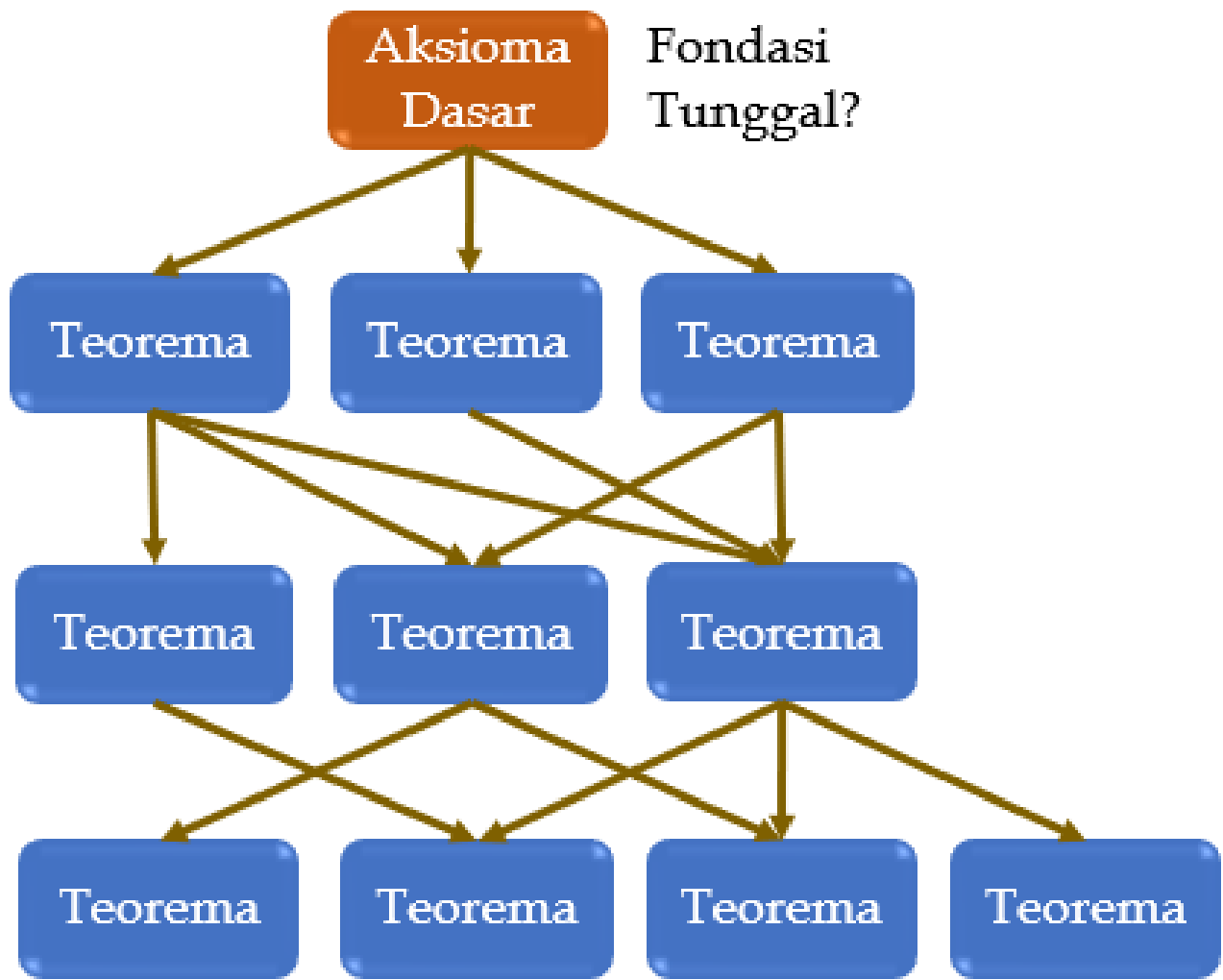


# Krisis Fondasi

Akhir abad ke-19: pencarian **fondasi matematika**.

Matematikawan terbelah dalam 3 kelompok: logisisme, intuisionisme, dan formalisme.

Rantai teorema harus berawal dari suatu kumpulan **aksioma** (pernyataan yang tidak perlu dibuktikan kebenarannya)



Abstraksi /  
Generalisasi  
/ Induksi



Deduksi

# Krisis Fondasi

Aksioma dasar: batu bata penyusun sistem matematika

Apapun bisa jadi kandidat.

Syarat wajib: **konsisten**

Syarat yang diharapkan: **lengkap**

# Krisis Fondasi

**Konsisten:** Tidak ada pernyataan di dalam **sistem** yang saling kontradiksi

**Lengkap:** seluruh pernyataan yang benar dalam **sistem** dapat dibuktikan.

**Sistem** itu mencakup semua pernyataan benar.

# Krisis Fondasi

Aksioma dasar: sudah banyak yang diajukan.  
Sebagian menghasilkan **paradoks**, sebagian terlalu **rumit**

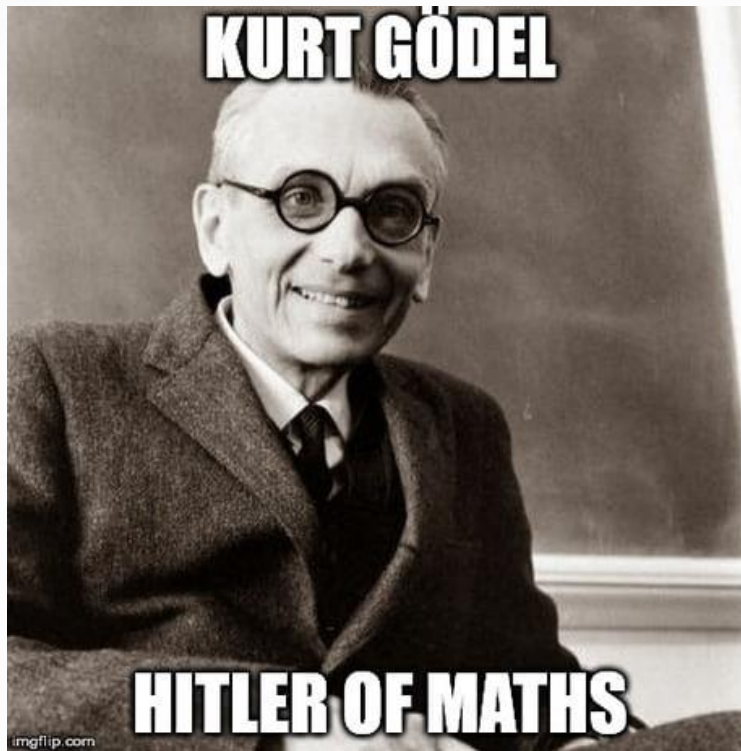
# Krisis Fondasi

Yang luas diterima adalah ZFC (*Zermelo-Frankel with Choice*).

ZFC dianggap murni pernyataan logika: tidak punya makna inheren, yang ada hanya validitas semantik kalimatnya,

# Krisis Fondasi

Tidak ditemukannya landasan tunggal  
Fondasi matematika bersifat **plural**, siapapun bisa formulasikan



Kenalkan Kurt Gödel, seorang matematikawan Austria



# Krisis Fondasi

Pada 1931, Kurt Godel  
mempublikasikan teorema  
yang setara dengan  
relativitas



# Krisis Fondasi

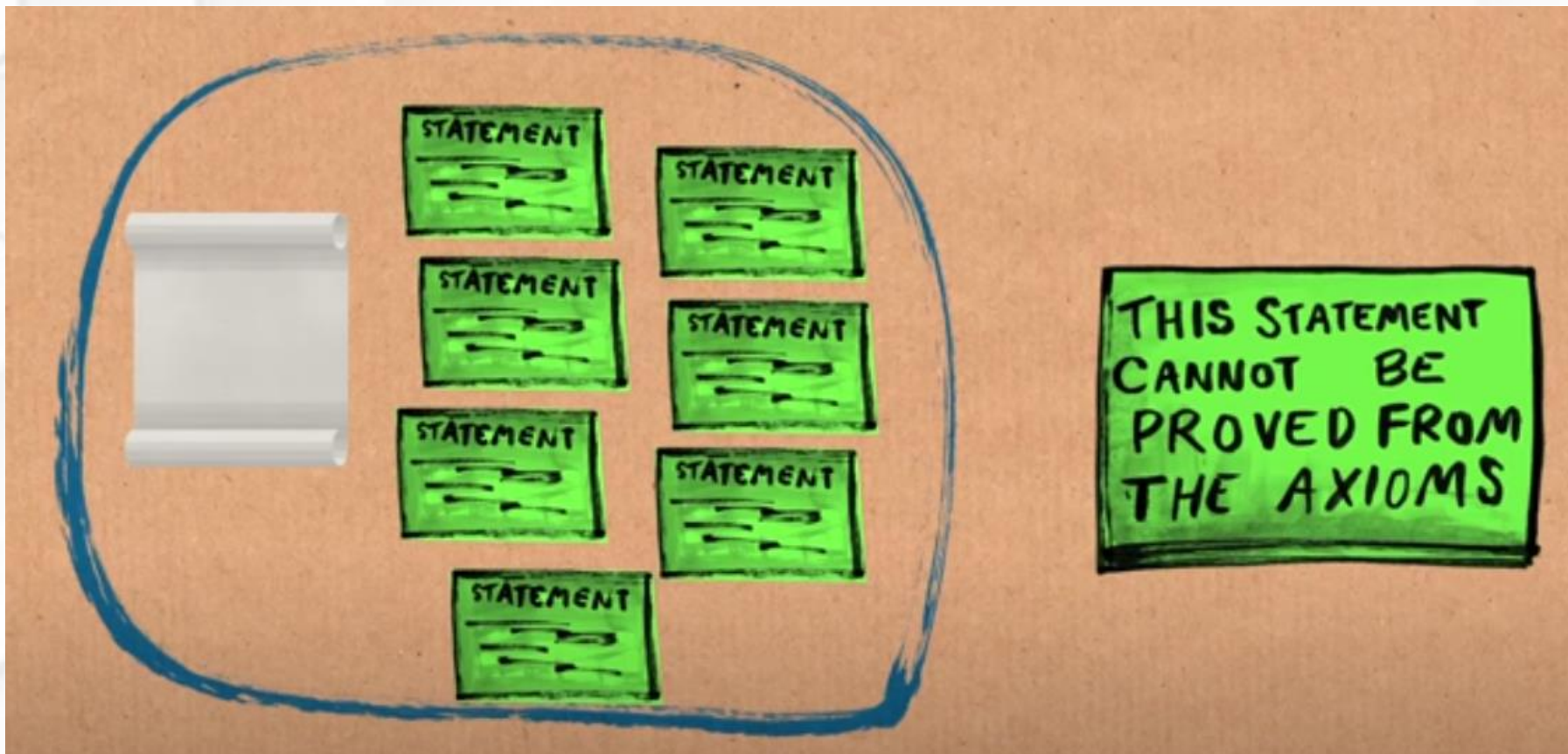
## Teorema Ketidaklengkapan Gödel I

Suatu sistem matematika tidak akan pernah bisa lengkap dan konsisten sekaligus.

# Krisis Fondasi

## Teorema Ketidaklengkapan Gödel II

Suatu sistem matematika tidak akan pernah bisa membuktikan **konsistensi** dirinya **sendiri**.



STATEMENT

STATEMENT

STATEMENT

STATEMENT

STATEMENT

STATEMENT

STATEMENT

THIS STATEMENT  
CANNOT BE  
PROVED FROM  
THE AXIOMS



# Dunia Riil

**Matematika:** logika minus *realita*

**Realita:** kumpulan fakta empiris

# Dunia Riil

Apakah fakta empiris **cukup** untuk membangun kebenaran?

# Dunia Riil

Diperlukan **rasionalitas** untuk memperluas kebenaran melalui **abstraksi** dan **deduksi**

Membentuk juga jaring/rantai pernyataan



# Dunia Riil

Jika sistem kebenaran adalah *rantai pernyataan*, apa yang ada di ujung?

# Dunia Riil

Sama dengan matematika, yakni harus suatu pernyataan yang **dianggap benar** tanpa perlu dibuktikan

Di matematika, namanya **aksioma**.

Dalam konteks riil, kita sebut ia **asumsi metafisis**

# Dunia Riil

*Asumsi metafisis* juga tidak harus unik.

Siapa pun bisa memegang *asumsi metafisisnya* sendiri, dan membangun sistem kebenaran dari situ.

Syarat wajibnya hanya satu: **konsisten**.

# Dunia Riil

Perluasan teorema Gödel:

kita **tidak pernah bisa** memiliki sistem kebenaran yang **lengkap** dan **konsisten** sekaligus.

Selalu ada pernyataan benar yang **tidak bisa dibuktikan** di dalam sistem.

# Dunia Riil

Rasionalitas **terbatas** oleh dirinya sendiri.

Belum lagi, secara riil, **rasionalitas** akan selalu terkontaminasi konteks.

# Dunia Riil

Fakta empiris pun memiliki keterbatasan.

Kebenaran absolut **mustahil** dicapai



Tapi, benarkah?

# Resolusi

Kemajuan pengetahuan ala modernitas (yang terwarnai peradaban Barat) **hanya** ditopang 2 pilar: **logika rasional** dan **fakta empiris**.

Di awal, keduanya terkesan cukup dan menjanjikan.

Tapi kenyataannya **tidak**.



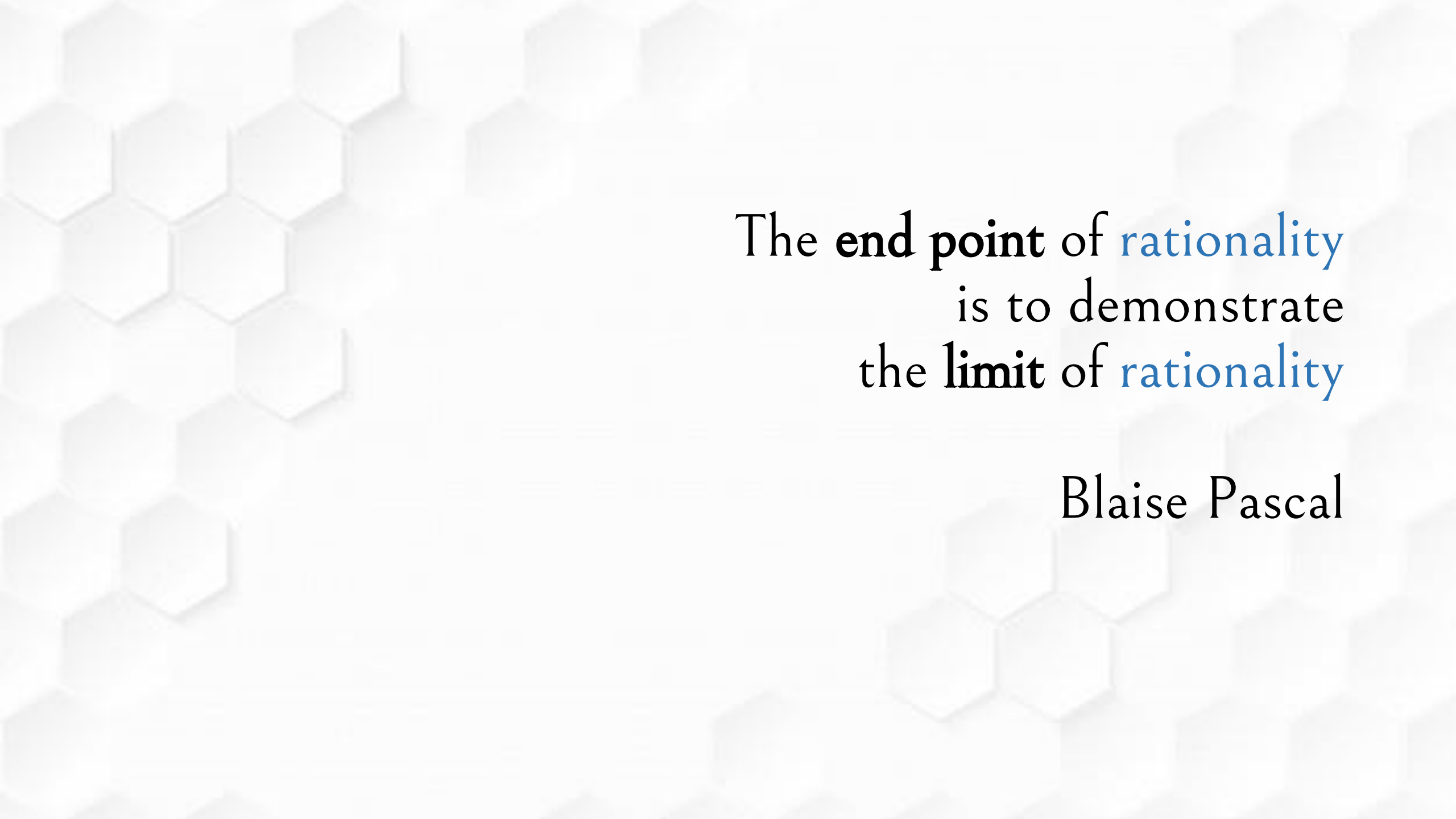
# Resolusi

Dalam khazanah islam, ada **pilar ketiga** kebenaran:  
berita yang benar (*al-khabar ash-shadiq*) dan bersumber dari otoritas yang  
benar (*khabar ash-shadiq*)

# Resolusi

Rasionalitas memang **tidak pernah bisa** menuntun pada kebenaran yang utuh

la **cuma** katalis, alat, media, untuk mengabstraksi dan mendeduksi kebenaran yang sudah ada.



The **end point** of **rationality**  
is to demonstrate  
the **limit** of **rationality**

Blaise Pascal