

# Memahami Gödel

Aditya Firman Ihsan

Either mathematics is too big for the **human mind** or  
the **human mind** is more than a machine

Kurt Gödel

# Mencari yang **absolut**

Kebenaran absolut/mutlak adalah impian manusia

Kebangkitan akal Yunani klasik -> reformasi kebenaran

# Semangat reduksionis

Mencari ke titik terdasar ilmu!

Impian terbesar: menemukan aturan fundamental alam semesta

# Semangat **reduksionis**

**Fisika:** pencarian atas elemen terkecil materi dan teori segala sesuatu

**Biologi:** pencarian entitas terkecil pembentuk kehidupan

**Kimia:** pemetaan unsur-unsur terdasar penyusun semua zat

**Kosmologi:** penelusuran asal mula dan masa depan alam semesta

**Psikologi:** pencarian komponen dasar jiwa

...

**Matematika:** mencari....?

**Matematika:** mencari dasar matematika?

Beragam topik di matematika berkembang secara terpisah, tanpa ada satu konsep besar yang menyatukan.

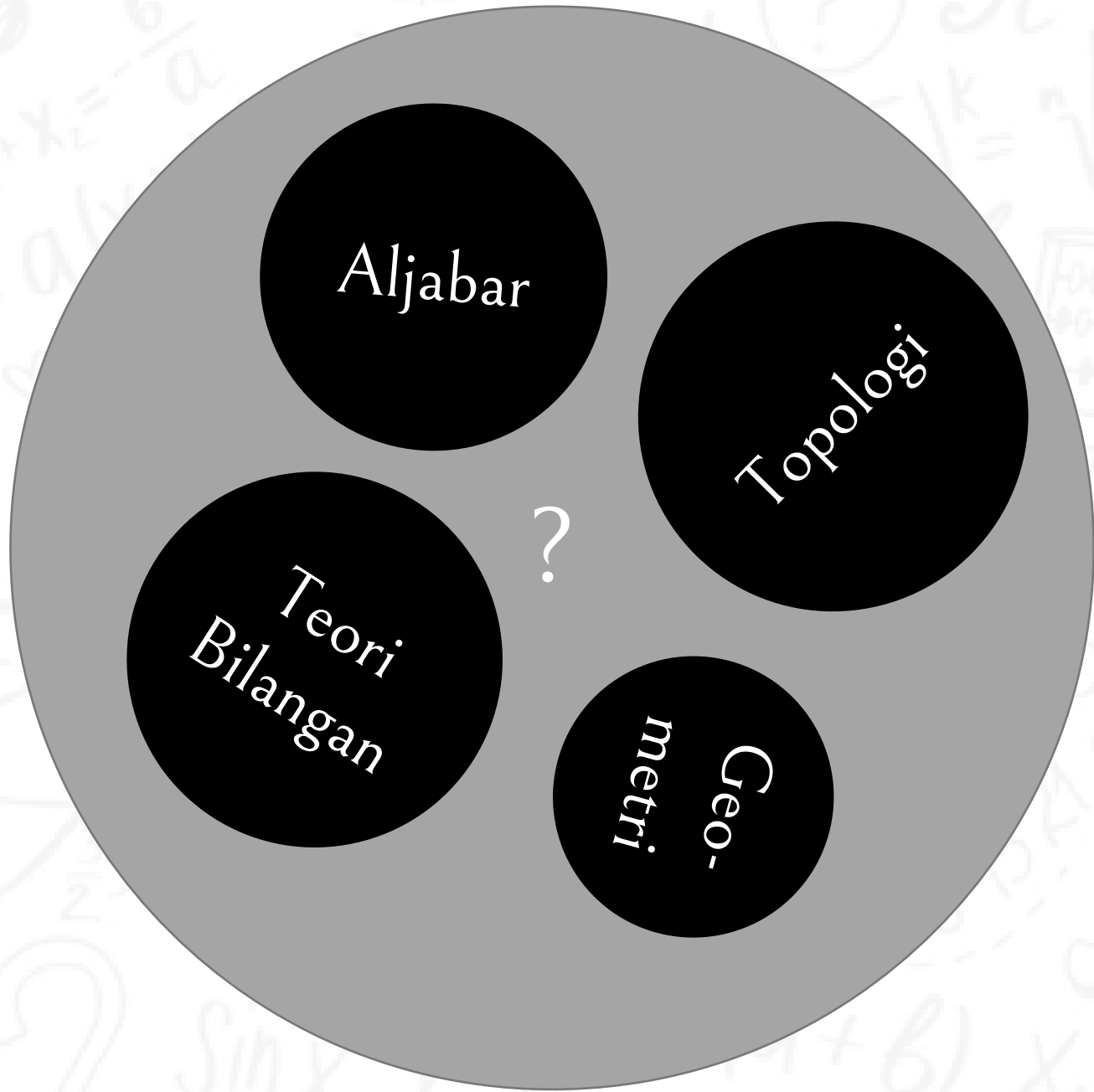
Aljabar

Teori  
Bilangan

Geo-  
metri

Topologi





Aljabar

Topologi

Teori  
Bilangan

Geo-  
metri

?

**Matematika:** mencari dasar matematika?

# Menggali **Matematika**

Setiap '**objek**' matematika merupakan hasil definisi.

Setiap '**hukum**' di matematika merupakan konstruksi dari teorema sebelumnya yang telah terbukti benar.

Semua proses **pendefinisian** dan **konstruksi** ini hanya membutuhkan logika.

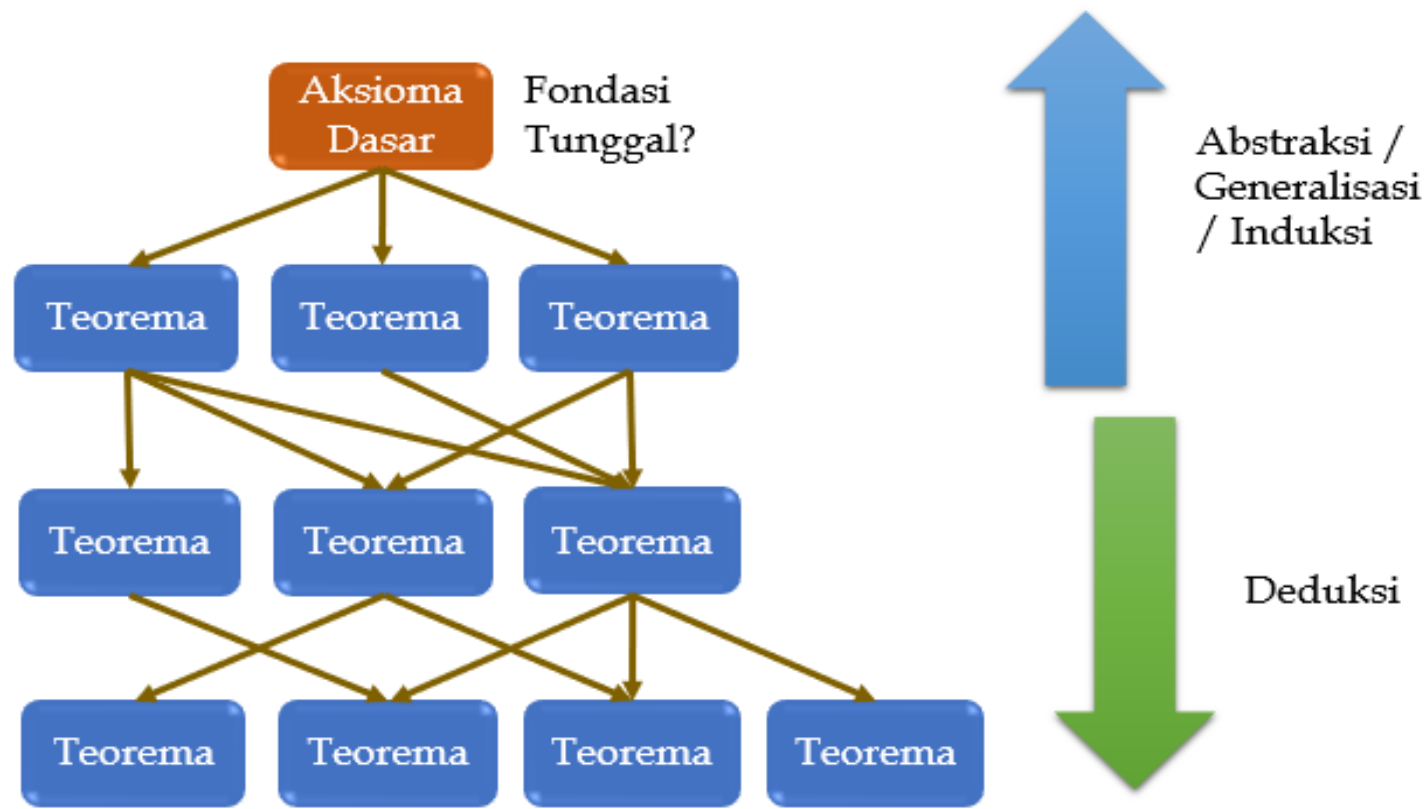
# Menggali **Matematika**

Bangunan Matematika: tersusun dari **Teorema** (pernyataan yang sudah dibuktikan kebenarannya, cth: teorema Phytagoras)

Suatu teorema berasal dari teorema lain dan menghasilkan teorema lain -> membentuk rantai/jejaring

# Menggali **Matematika**

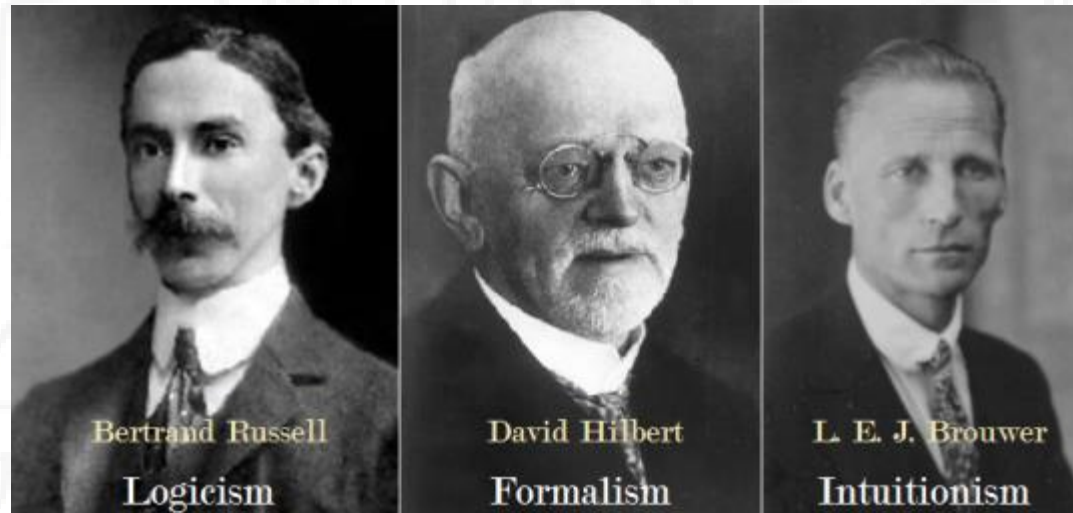
Jika matematika adalah **rantai teorema**, apa yang ada di ujung?



Rantai teorema harus berawal dari suatu kumpulan aksioma (pernyataan yang tidak perlu dibuktikan kebenarannya)

Akhir abad ke-19:  
pencarian **fondasi matematika**.

Matematikawan terbelah dalam 3 kelompok



Tujuan mereka sama, hanya berbeda sedikit cara pandang

## Masalah Hilbert

Tahun 1902, David Hilbert, seorang matematikawan jenius asal Jerman, menuliskan 23 masalah di matematika yang saat itu belum punya penyelesaian





# Masalah Hilbert

1. The hipotesis kontinum
2. Bukti bahwa aksioma aritmatika konsisten.
3. Penyusunan ulang polyhedron.
4. Metrik dengan semua garisnya adalah geodesics.
5. Apakah grup kontinu otomatis grup diferensial?
6. ...



# Masalah Hilbert

1. The hipotesis kontinum
2. **Bukti bahwa aksioma aritmatika konsisten.** → Program Hilbert
3. Penyusunan ulang polyhedron.
4. Metrik dengan semua garisnya adalah geodesics.
5. Apakah grup kontinu otomatis grup diferensial?
6. ...

Aksioma dasar:  
batu bata penyusun sistem matematika

Apapun bisa jadi kandidat.

Syarat wajib: **konsisten**

Syarat yang diharapkan: **lengkap**

# Ada apa dengan konsisten dan lengkap?

**Konsisten:** Tidak ada pernyataan di dalam **sistem** yang saling kontradiksi

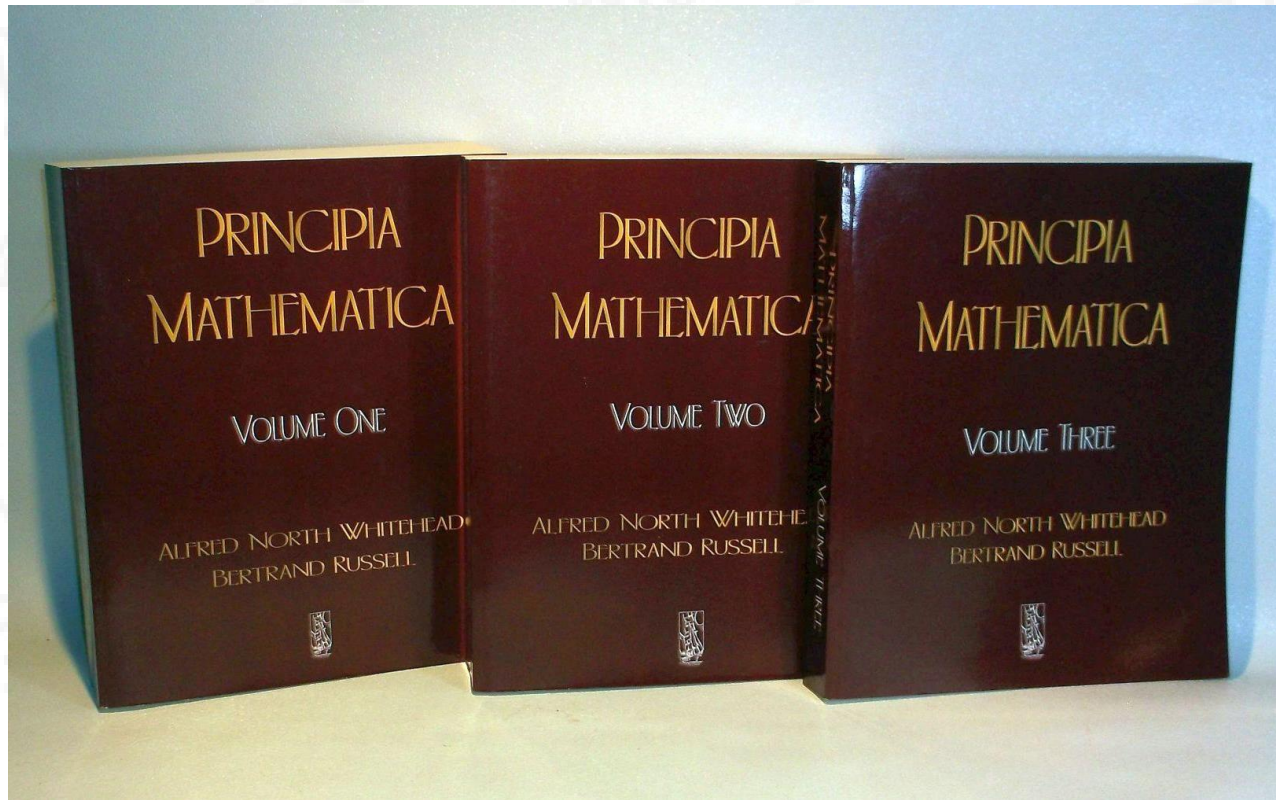
**Lengkap:** seluruh pernyataan yang benar dalam **sistem** dapat dibuktikan.

**Sistem** itu mencakup semua pernyataan benar.

# Ada apa dengan konsisten dan lengkap?

1. Ketunggalan kebenaran & *principles of explosion*
2. Proyek besar pengetahuan

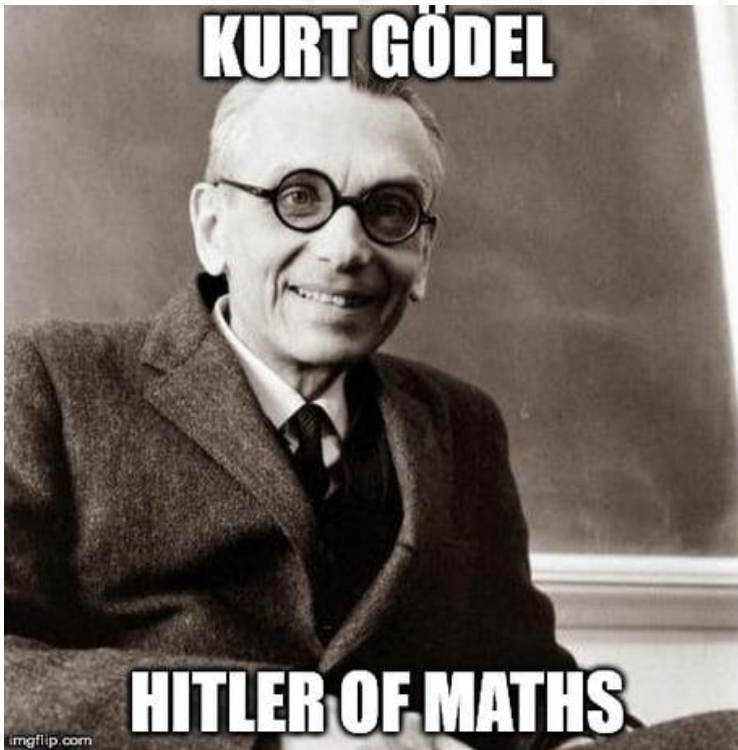
# Axioma Dasar?



SECTION A]	THE CARDINAL NUMBER 1	351
*52.601. $\vdash :: a \in 1 . \supset : \phi(\iota'a) . \equiv : x \in a . \supset_x . \phi x . \equiv : (\exists x) . x \in a . \phi x$		
<i>Dem.</i>		
$\vdash . *52.15 . \supset \vdash : \text{Hp} . \supset : E! \iota'a :$	(1)	
$[*30.4]$	$\supset : x \iota'a . \equiv : x = \iota'a .$	
$[*52.6]$	$\equiv : x \in a$	(2)
$\vdash . (1) . *30.33 . \supset$		
$\vdash :: \text{Hp} . \supset : \phi(\iota'a) . \equiv : x \iota'a . \supset_x . \phi x . \equiv : (\exists x) . x \iota'a . \phi x$	(3)	
$\vdash . (2) . (3) . \supset \vdash . \text{Prop}$		
*52.602. $\vdash :: 2(\phi x) \in 1 . \supset : \psi(x) (\phi x) . \equiv : \phi x \supset_x \psi x . \equiv : (\exists x) . \phi x . \psi x$		
	[*52.12 . *14.26]	
*52.61. $\vdash :: a \in 1 . \supset : \iota'a \in \beta . \equiv : a \subset \beta . \equiv : \exists!(a \cap \beta)$		
	[*52.601 $\frac{x \in \beta}{\phi x}$ ]	
*52.62. $\vdash :: a, \beta \in 1 . \supset : a = \beta . \equiv : \iota'a = \iota'\beta$		
<i>Dem.</i>		
$\vdash . *52.601 . \supset \vdash : \text{Hp} . \supset : \iota'a = \iota'\beta . \equiv : x \in a . \supset_x . x = \iota'\beta :$		
$[*52.6]$	$\equiv : x \in a . \supset_x . x \in \beta :$	
$[*52.46]$	$\equiv : a = \beta :: \supset \vdash . \text{Prop}$	
*52.63. $\vdash : a, \beta \in 1 . a \neq \beta . \supset . a \cap \beta = \Lambda$ [*52.46. Transp]		
*52.64. $\vdash : a \in 1 . \supset . a \cap \beta \in 1 \vee \iota'\Lambda$		
<i>Dem.</i>		
$\vdash . *52.43 . \supset \vdash : \text{Hp} . \exists!(a \cap \beta) . \supset . a \cap \beta \in 1 :$		
$[*5.6 . *24.54] \supset \vdash : \text{Hp} . \supset : a \cap \beta = \Lambda . \vee . a \cap \beta \in 1 :$		
$[*51.236] \supset : a \cap \beta \in 1 \vee \iota'\Lambda :: \supset \vdash . \text{Prop}$		
*52.7. $\vdash :: \beta - a \in 1 . a \subset \xi . \xi \subset \beta . \supset : \xi = a . \vee . \xi = \beta$		
<i>Dem.</i>		
$\vdash . *22.41 . \supset \vdash : \text{Hp} . \xi \subset a . \supset . \xi = a$	(1)	
$\vdash . *24.55 . \supset \vdash : \sim(\xi \subset a) . \supset . \exists! \xi - a$	(2)	
$\vdash . *22.48 . \supset \vdash : \text{Hp} . \supset . \xi - a \subset \beta - a$	(3)	
$\vdash . (2) . (3) . \supset \vdash : \text{Hp} . \sim(\xi \subset a) . \supset . \exists! \xi - a . \xi - a \subset \beta - a$	(4)	
$\vdash . *52.1 . \supset \vdash : \text{Hp} . \supset . (\exists x) . \beta - a = \iota'x$	(5)	
$\vdash . (4) . (5) . *51.4 . \supset \vdash : \text{Hp} . \sim(\xi \subset a) . \supset . \xi - a = \beta - a .$		
$[*24.411]$	$\supset . \xi = \beta$	(6)
$\vdash . (1) . (6) . \supset \vdash . \text{Prop}$		

# Axioma Dasar?

<b>Extensionality</b>	$\forall X \forall Y [X = Y \Leftrightarrow \forall z (z \in X \Leftrightarrow z \in Y)]$
<b>Pairing</b>	$\forall x \forall y \exists Z \forall z [z \in Z \Leftrightarrow z = x \text{ or } z = y]$
<b>Union</b>	$\forall X \exists Y \forall y [y \in Y \Leftrightarrow \exists Z (Z \in X \text{ and } y \in Z)]$
<b>Empty set</b>	$\exists X \forall y [y \notin X]$ (this set $X$ is denoted by $\emptyset$ )
<b>Infinity</b>	$\exists X [\emptyset \in X \text{ and } \forall x (x \in X \Rightarrow x \cup \{x\} \in X)]$
<b>Power set</b>	$\forall X \exists Y \forall Z [Z \in Y \Leftrightarrow \forall z (z \in Z \Rightarrow z \in X)]$
<b>Replacement</b>	$\forall x \in X \exists! y P(x, y) \Rightarrow [\exists Y \forall y (y \in Y \Leftrightarrow \exists x \in X (P(x, y)))]$
<b>Regularity</b>	$\forall X [X \neq \emptyset \Rightarrow \exists Y \in X (X \cap Y = \emptyset)]$
<b>Axiom of choice</b>	$\forall X [\emptyset \notin X \text{ and } \forall Y, Z \in X (Y \neq Z \Rightarrow Y \cap Z = \emptyset) \Rightarrow \exists Y \forall Z \in X \exists! z \in Z (z \in Y)]$



Kenalkan Kurt Gödel, seorang matematikawan Austria



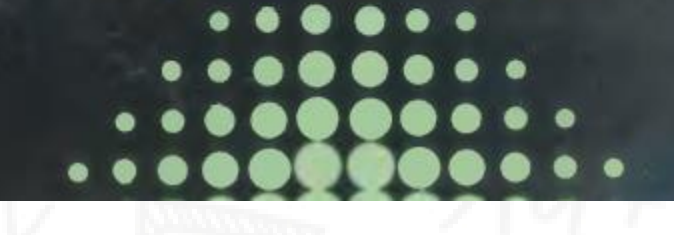
Pada 1931, Kurt  
Godel  
mempublikasikan  
teorema yang setara  
dengan relativitas





Kurt Gödel

ON FORMALLY  
UNDECIDABLE  
PROPOSITIONS  
OF PRINCIPIA  
MATHEMATICA  
AND RELATED  
SYSTEMS



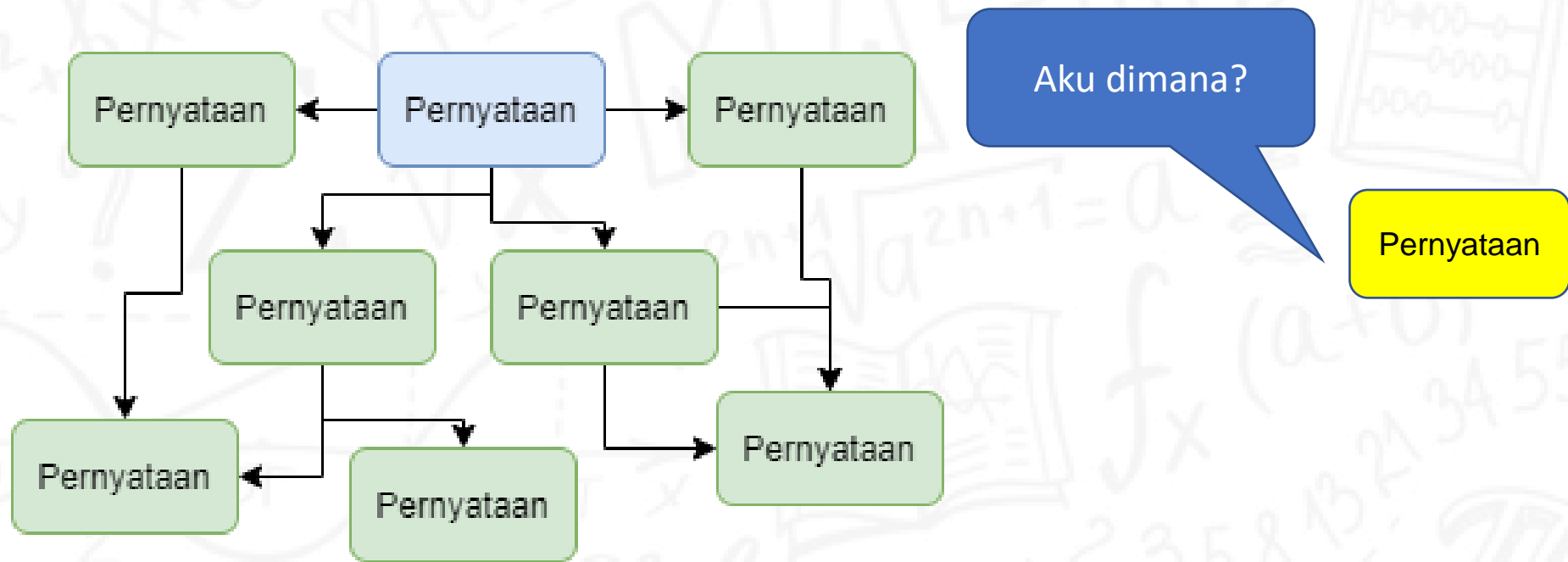
# Logika sebagai sistem formal

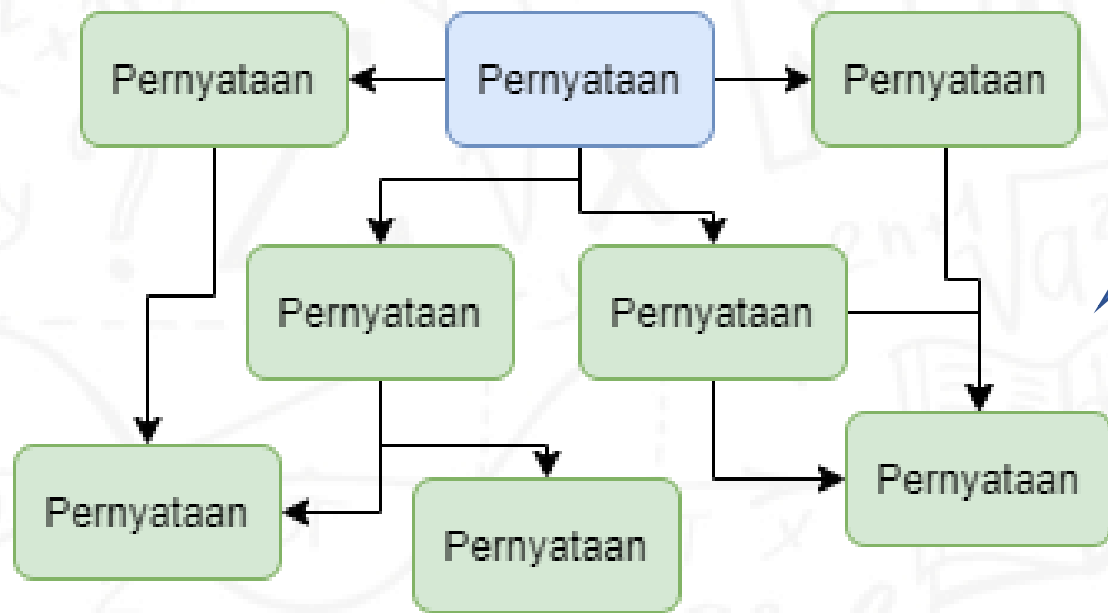
Logika adalah sistem formal, yang hanya membutuhkan 3 hal: simbol (bahasa formal), kumpulan aksioma, dan aturan inferensi.

Setiap pernyataan formal pasti hanya 2 kemungkinan: benar atau salah

Jika ia bisa diturunkan dari aturan (dan aksioma) yang ada, maka benar.

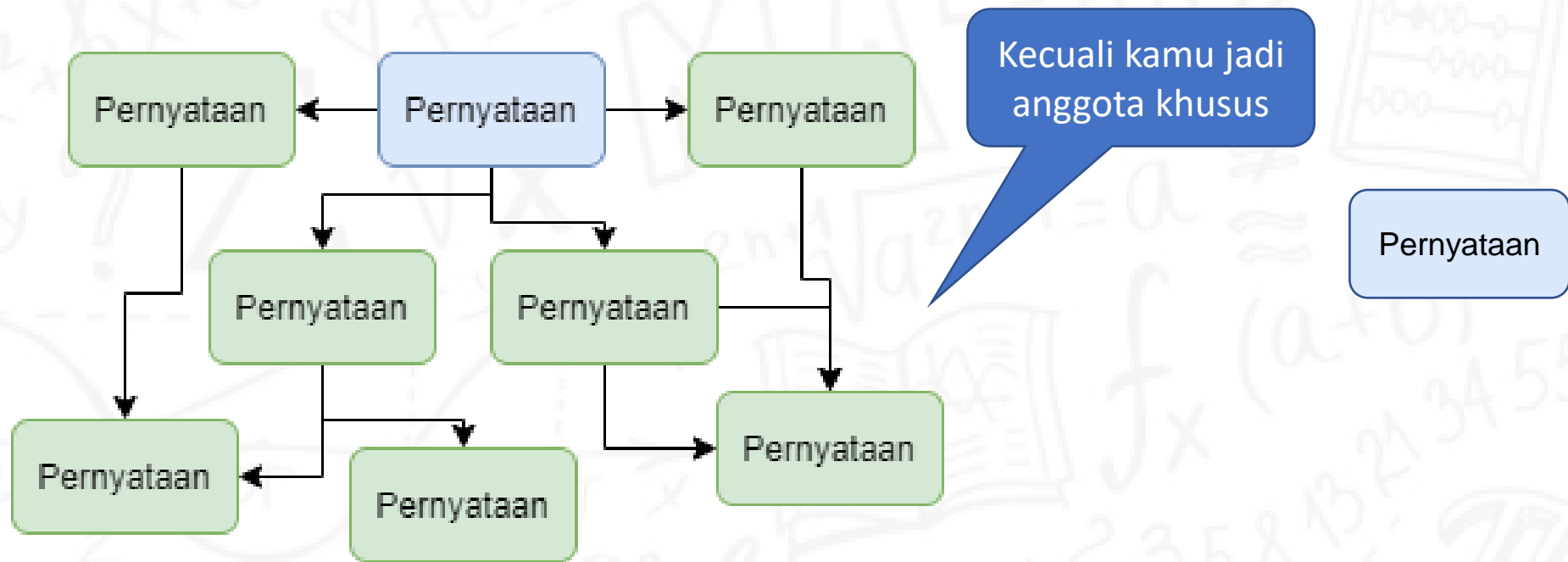
Jika tidak, maka salah.





Kamu tidak bisa fit in di sini, jadi kamu pasti salah

Pernyataan



# Musuh terbesar logika: Paradoks

Paradoks adalah pernyataan yang tidak bisa diputuskan kebenarannya.

Ciri/sebabnya:

1. Self-reference
2. Vicious cycle
3. Infinite regress

# Musuh terbesar logika: Paradoks

Contoh:

“kalimat ini salah”

“himpunan yang mengandung semua himpunan kecuali dirinya sendiri”



# Musuh terbesar logika: Paradoks

Godel mengajukan satu pernyataan self-reference dalam matematika:

“Pernyataan ini tidak dapat dibuktikan”

“Pernyataan ini tidak dapat dibuktikan”

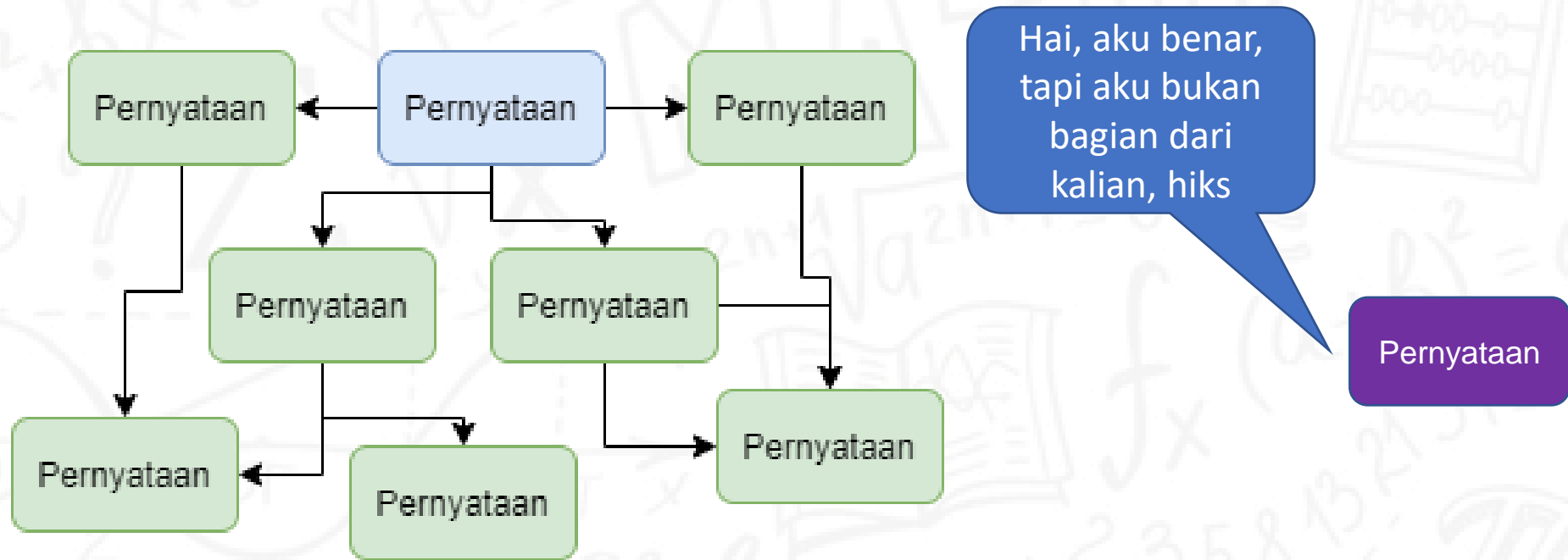
Kalau salah, maka berarti ia dapat dibuktikan. Karena dapat dibuktikan, haruslah benar. Kontradiksi.

Jadi satu-satunya pilihan adalah pernyataan di atas benar

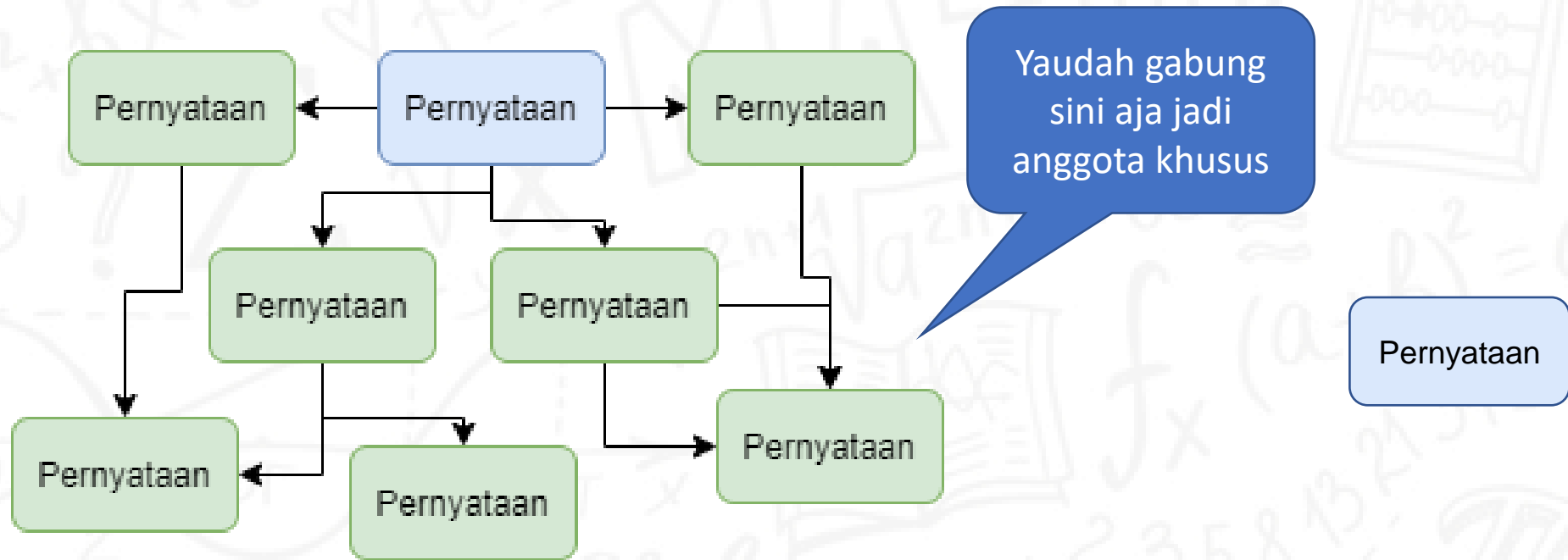
Akibatnya, ada pernyataan yang benar tapi tidak dapat dibuktikan

Jadi

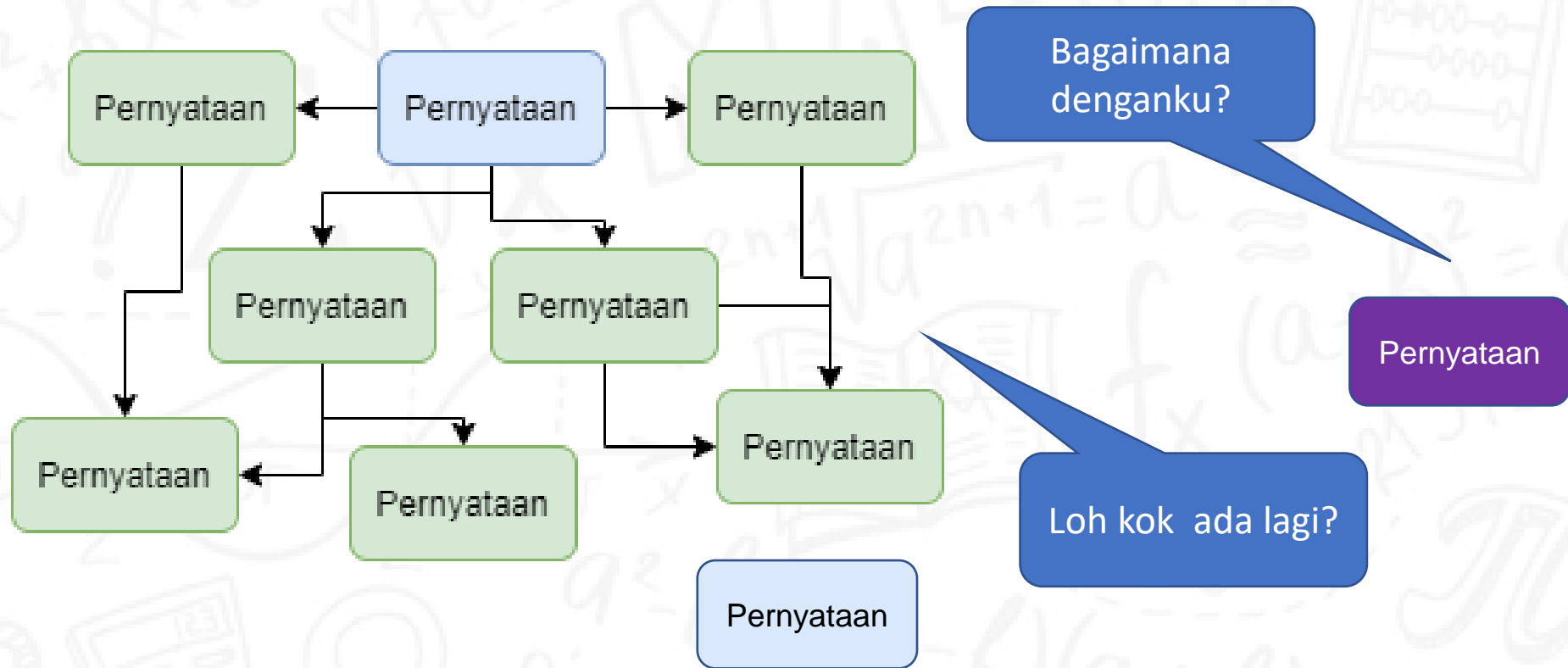
Akibatnya, ada pernyataan yang benar tapi tidak dapat dibuktikan



Akibatnya, ada pernyataan yang benar tapi tidak dapat dibuktikan



Akibatnya, selalu ada pernyataan yang benar tapi tidak dapat dibuktikan



# Gagasan Bukti

Setiap pernyataan formal adalah rangkaian symbol.

Setiap simbol, dikodifikasi dengan suatu bilangan.

The basic signs of the system P are now ordered in one-to-one correspondence with natural numbers, as follows:

"0" ... 1	"v" ... 7	"(" ... 11
"f" ... 3	"π" ... 9	")" ... 13
"~" ... 5		

# Gagasan Bukti

Rangkaian symbol juga terkodifikasi dalam bilangan.

Agar bijektif, kodifikasi pada pernyataan memanfaatkan bilangan prima.

Furthermore, variables of type  $n$  are given numbers of the form  $p^n$  (where  $p$  is a prime number  $> 13$ ). Hence, to every finite series of basic signs (and so also to every formula) there corresponds, one-to-one, a finite series of natural numbers. These finite series of natural numbers we now map (again in one-to-one correspondence) on to natural numbers, by letting the number  $2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}$  correspond to the series  $n_1, n_2, \dots, n_k$ , where  $p_k$  denotes the  $k$ -th prime number in order of magnitude. A natural number is thereby assigned in one-to-one correspondence, not only to every basic sign, but also to every finite series of such signs. We denote by  $\Phi(a)$  the number corresponding



# Gagasan Bukti

Misalkan, dikodifikasi      Pernyataan  $0=0$

$0 \rightarrow 1$       Terkodifikasi menjadi

$= \rightarrow 2$        $2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \rightarrow 90$

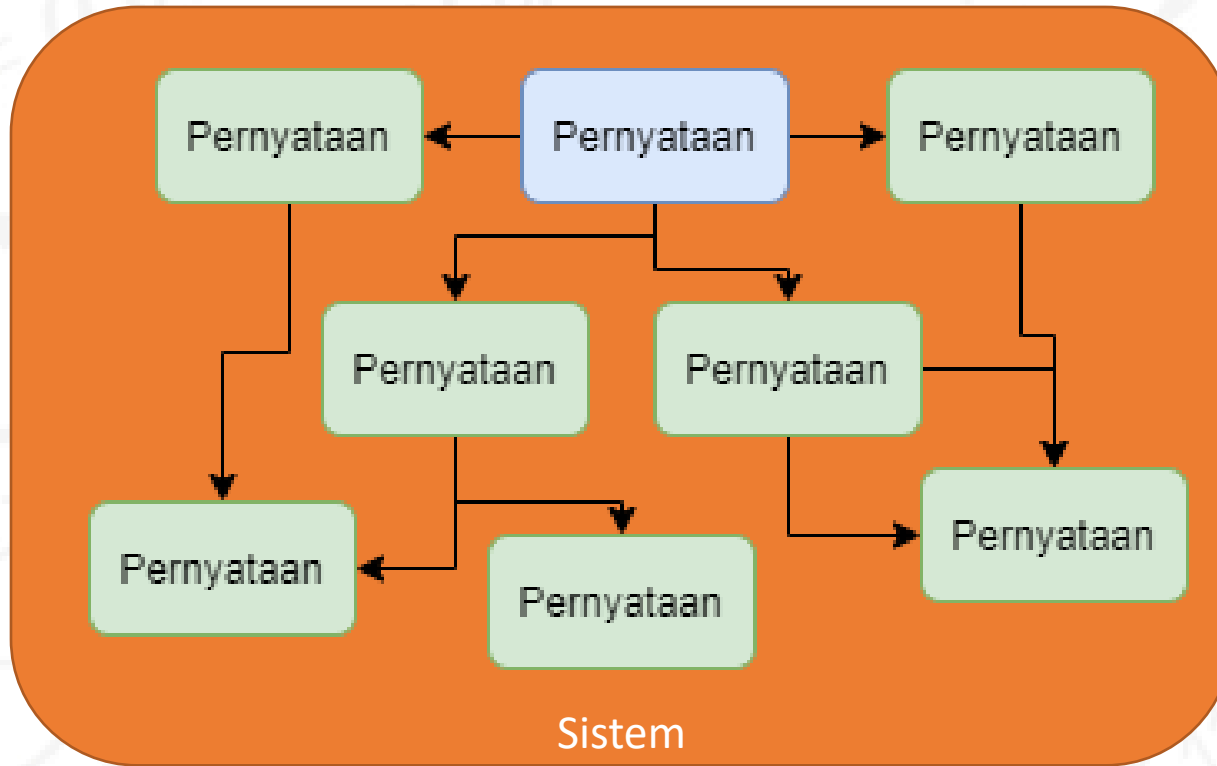
# Gagasan Bukti

Sebuah “bukti” adalah rangkaian pernyataan, jadi bisa dikodifikasi juga.

Godel kemudian memformalisasikan pernyataan yang setara dengan  
“Tidak ada bukti dari pernyataan ini”

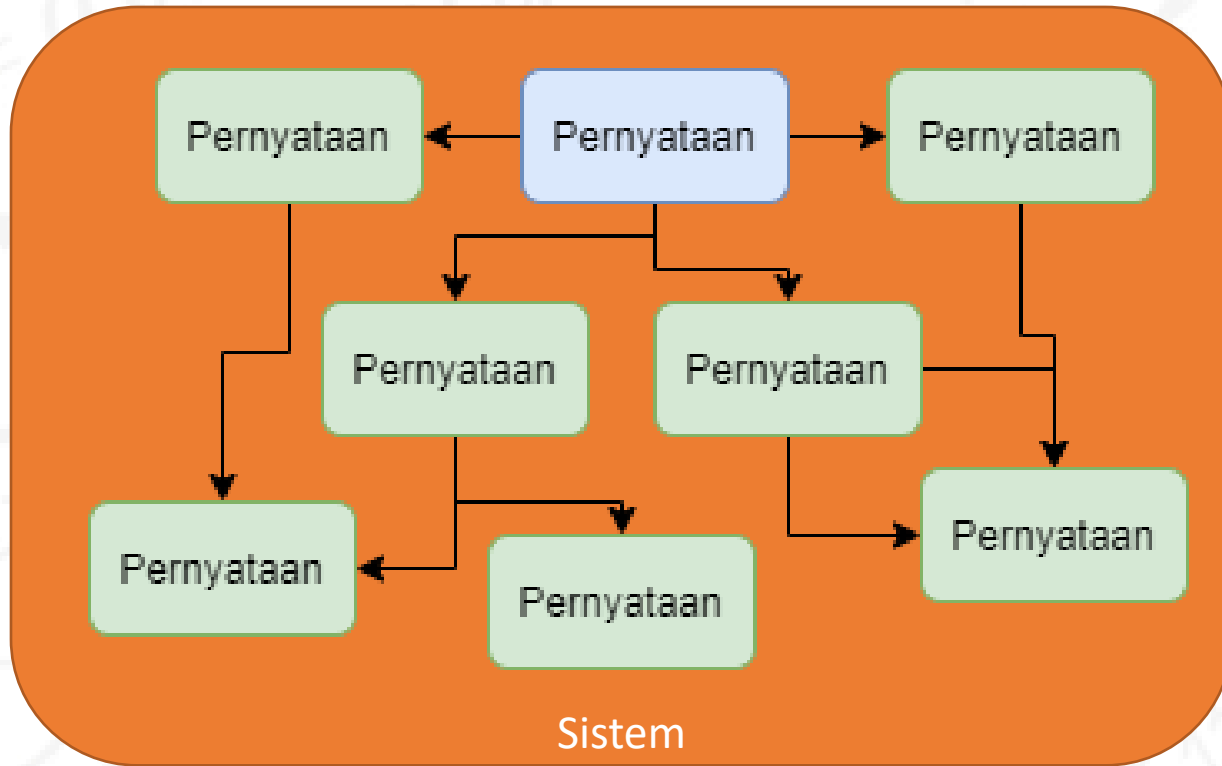
Dan menunjukkan pernyataan itu pasti benar

Oke harusnya ini udah semua



Tapi, tahu darimana kita udah solid?

Butuh orang lain nih untuk nilai kita



Pernyataan

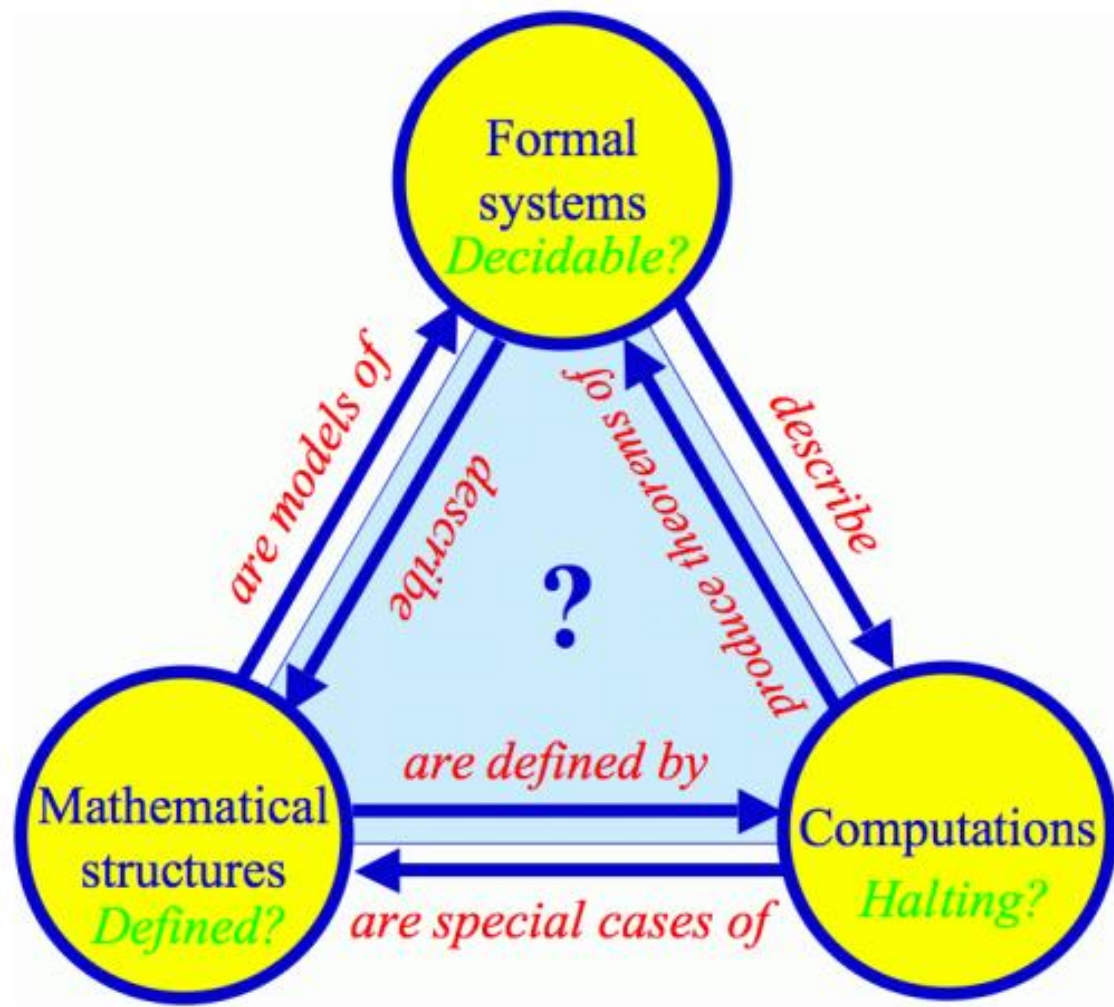
Tu ada orang tuh, ajak dia aja.

# Teorema Ketidaklengkapan Gödel I

Suatu sistem matematika tidak akan pernah bisa ~~lengkap~~ dan **konsisten** sekaligus.

# Teorema Ketidaklengkapan Gödel II

Suatu sistem matematika tidak akan pernah bisa membuktikan **konsistensi** dirinya sendiri.



Implikasinya?





**TIDAK ADA!!**

# Godel sebenarnya hanya secara cerdas memainkan paradoks

Ia membuktikan matematika dengan matematika sendiri

Yang ia pakai adalah apa yang akan ia buktikan.

# Bagaimana dengan Matematika

Life must go on.

Yang dihancurkan Godel hanyalah mimpi utopia sebagian matematikawan

Jika dipikirkan lebih jauh.

Apakah fakta empiris **cukup** untuk membangun kebenaran?

Diperlukan **rasionalitas** untuk memperluas kebenaran melalui **abstraksi** dan **deduksi**

Membentuk juga jaring/rantai pernyataan

# Dunia Riil

Jika sistem kebenaran adalah **rantai pernyataan**, apa yang ada di ujung?

Sama dengan matematika, yakni harus suatu pernyataan yang **dianggap benar** tanpa perlu dibuktikan

Di matematika, namanya **aksioma**.

Dalam konteks riil, kita sebut ia **asumsi metafisis**

# Dunia Riil

**Asumsi metafisis** juga tidak harus unik.

Siapa pun bisa memegang **asumsi metafisis**nya sendiri, dan membangun sistem kebenaran dari situ.

Syarat wajibnya hanya satu: **konsisten**.

# Dunia Riil

Perluasan teorema Gödel:

kita **tidak pernah bisa** memiliki sistem kebenaran yang **lengkap** dan **konsisten** sekaligus.

Selalu ada pernyataan benar yang **tidak bisa dibuktikan** di dalam sistem.

Konsep setara:

Kita tidak bisa berpikir di luar pikiran kita sendiri  
Semesta tidak bisa dilihat di luar semesta itu sendiri.

dll



# Dunia Riil

Rasionalitas **terbatas** oleh dirinya sendiri.

Belum lagi, secara riil, **rasionalitas** akan selalu terkontaminasi konteks.

Fakta empiris pun memiliki keterbatasan.

Kebenaran absolut **mustahil** dicapai

