Konsep Tak Terhingga dan Kaitannya dengan Realitas

Aditya Firman Ihsan

Apa itu tak terhingga?

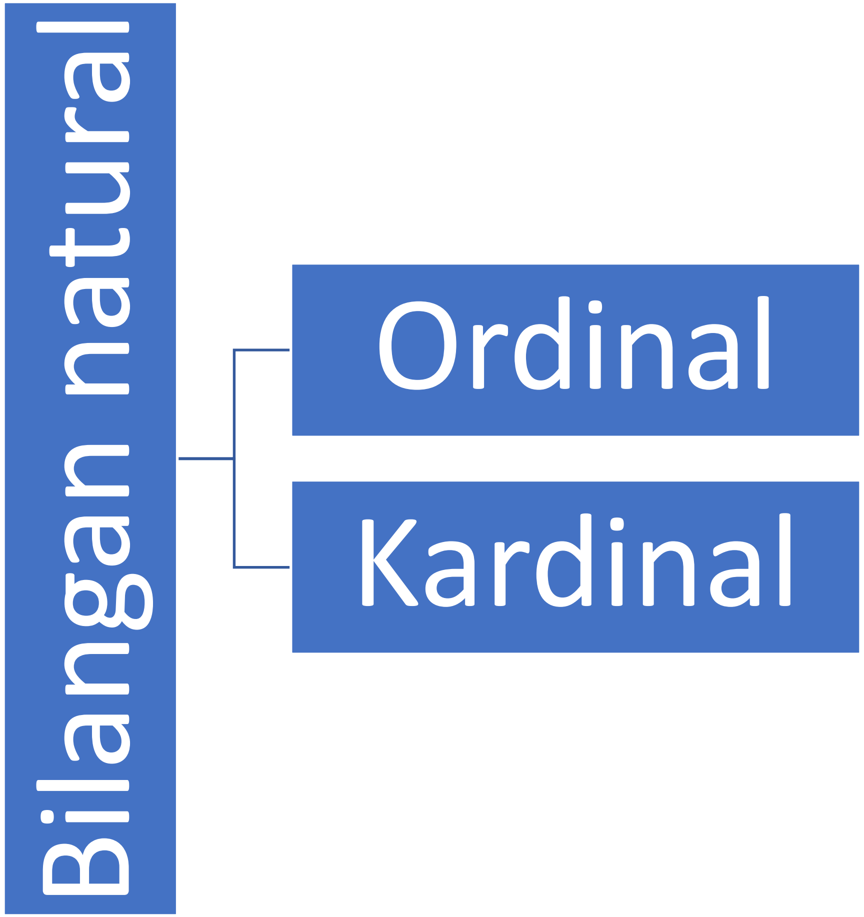
Apa itu bilangan?


Bilangan Natural
Bilangan Bulat
Bilangan Rasional
Bilangan Riil
Bilangan kompleks

Apa itu bilangan (natural)?

Apa itu bilangan (natural)?

Sebuah tipe tanda/label/nama yang terurut


Bilangan natural
Ordinal
Kardinal

Bilangan ordinal

Konsep paling general dari bilangan, bagaimana kita mengenumerasi (membilang) sesuatu terus menerus. Seperti apa?

Himpunan terurut dengan baik (well-ordered)

Himpunan yang memiliki anggota ‘terkecil’ dari suatu urutan

Kenapa “baik”?

Dengan himpunan seperti ini kita bisa menciptakan indeks konstruksi secara *bottom-up*

Kenapa “baik”?

Misalkan A himpunan terurut baik dengan urutan <, maka A (asumsi tidak kosong) memiliki nilai terkecil a_0.
Selanjutnya himpunan yang tersisa, $A - \{a_0\}$ (bila tidak kosong) memiliki nilai terkecil a_1 dengan $a_0 < a_1$. Proses ini bisa dilanjutkan

$$a_0 < a_1 < \cdots < a_\omega < a_{\omega+1} < \cdots < a_{2\omega} < \cdots$$

hingga seluruh elemen dari A habis terpakai.

Kenapa “baik”?

Urutan memastikan setiap anggota himpunan menjadi unik, melalui Konsep segmen

$$\mathrm{seg}(a) = \{x | x < a\}$$

Bentuk formal bilangan ordinal (dengan contoh)

Misal $E(a) = \{E(x) | x \in seg(a)\}$

Kita pun definisikan bahwa bilangan ordinal α dari A adalah himpunan peta dari E, atau dengan kata lain $\alpha = ran(E)$. Sebagai contoh, misalkan $A = \{a, b, c\}$ dengan $a < b < c < d$, maka

$E(a) = \emptyset$,

$E(b) = \{E(a)\} = \{\emptyset\}$,

$E(c) = \{E(a), E(b)\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, dan

$E(d) = \{E(a), E(b), E(c)\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,

sehingga bilangan ordinal dari A adalah

$\alpha = \{E(a), E(b), E(c)\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}\} = 4$

Well-Ordering Theorem

Untuk setiap himpunan A, terdapat suatu urutan-baik pada A.

Tak hingga bertingkat

Dalam proses normal, kita melakukan enumerasi atau *counting* cukup dengan bilangan natural

1, 2, 3, ...

Sayangnya belum tentu cukup

3 tipe ordinal

Ordinal awal (nol)
Ordinal penerus (successor c^+)
Ordinal batas (Jika a ordinal batas, maka untuk setiap $c \in a$, $c^+ \in a$)

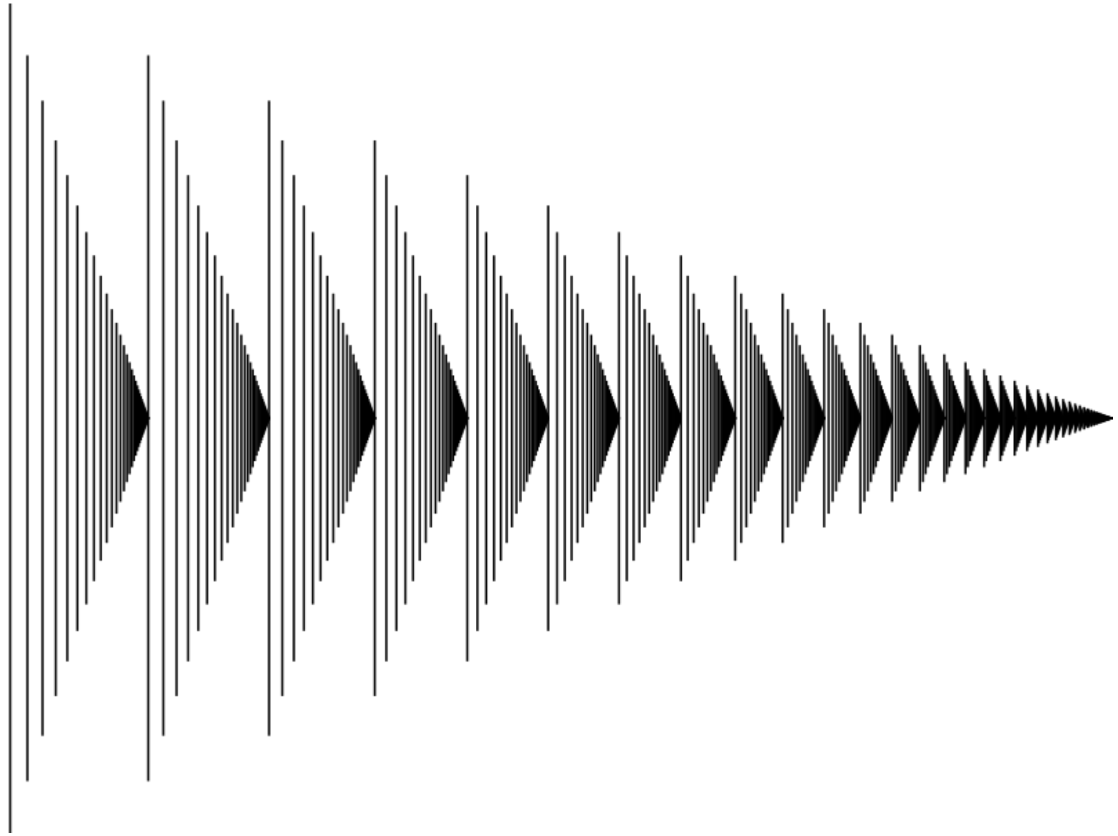
Bilangan Natural

$$1,2,3,\ldots,\omega$$

ω = ordinal tak hingga pertama

Ordinal

$$\omega, 2\omega, 3\omega \ldots, \omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^\omega, \ldots, \omega^{\omega^\omega}, \ldots \omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}} = \varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\omega, \ldots$$



Bilangan Kardinal

Banyaknya anggota suatu himpunan

Bilangan Kardinal

Hanya bisa ditentukan dari komparasi
Melalui korespondensi satu-satu antara 2 himpunan

Bilangan Kardinal

Kardinalitas bilangan natural: $\aleph_0$

Jika kita kumpulkan seluruh himpunan dengan kardinalitas $\aleph_0$, kita akan dapatkan $\aleph_1$

Korespondensi satu-satu

Misal, jika diasumsikan tidak ada satupun orang yang poligami di suatu masyarakat dan setiap orang dewasa di masyarakat itu sudah menikah, maka kita bisa jamin bahwa jumlah laki-laki dan perempuan dewasa di masyarakat itu sama

Bilangan Kardinal

Kardinalitas bilangan natural: $\aleph_0$

Jika kita kumpulkan seluruh himpunan dengan kardinalitas $\aleph_0$, kita akan dapatkan $\aleph_1$

Bilangan Kardinal

Sejauh ini cuma ada 2 himpunan tak hingga berdasarkan kardinalitas :
Himpunan *countable* dan *uncountable*

Bilangan Kardinal

Continuum Hypothesis*:*
Ada ketakteringgaan antara yang *countable* dan *uncountable*

Uncountability
contohnya: bilangan Riil
Setiap interval apapun sama banyaknya dengan seluruh bilangan riil itu sendiri

Pertanyaan lebih lanjut

1. Seberapa riil bilangan riil? (apakah semesta ini kontinu)
2. Apakah representasi tak terhingga (minimal uncountability) di semesta
3. Seberapa valid Konsep ketakterhinggan

Pertanyaan lebih lanjut

Continuum Hypothesis*:*
Ada ketakteringgaan antara yang *countable* dan *uncountable*