

Matematika Mencari Makna

Dari Abstraksi Menuju Ilahi

Aditya Firman Ihsan

Salman ITB, 7 September 2018

“Dari pikiran Pencipta didatangkan angka. Dari jumlah didatangkan geometri. Dari geometri didatangkan simbol. Dari simbol muncul surat, dan surat itu berasal dari luar mulut manusia. Jadi, ceritakan lagi, atas Nama Siapa kita berbicara?”

- Claudia Pavonis

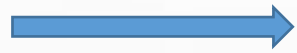
Apa yang anda lihat di sini?

$$\nabla \cdot D = \rho$$

$$\nabla \times E = -\nabla B$$

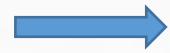
$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \times H = J + \nabla B$$



Maxwell Electromagnetic

$$dU = TdS - pdV + \sum_{i=1}^k \mu_i dN_i$$



Fundamental equation of thermodynamics

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$



General Relativity

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(\mathbf{r}, t)\rangle = \hat{H} |\Psi(\mathbf{r}, t)\rangle$$

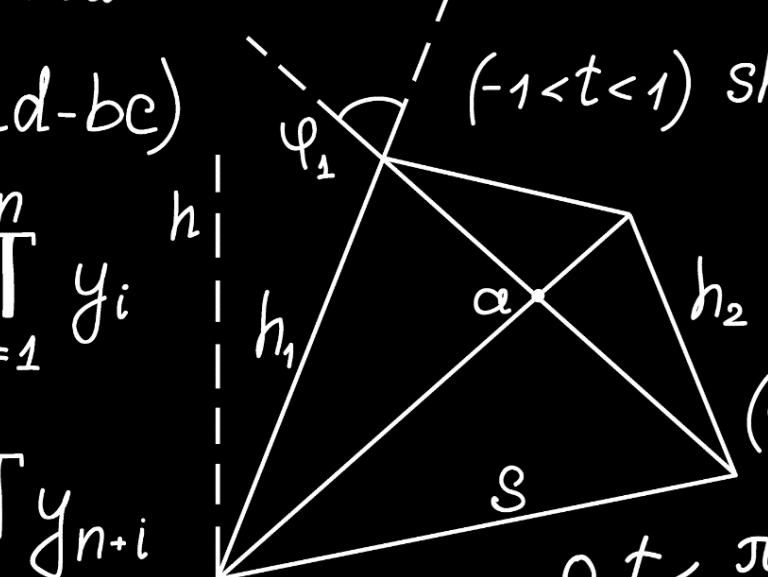


Schrodinger's wave equation

Ini semua adalah versi simbolik dari realita

Apa itu Matematika?

$a+c=b+d$ $x^2 \operatorname{Arth} t = \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$ $\operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$



$(-1 < t < 1)$ $\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}$ $\prod_{i=1}^n y_i$

$4 \cos \omega t, t = \frac{\pi}{\omega}$

$(a-b)(c-d) = (ac+bd)$

$\prod_{i=1}^n y_i$

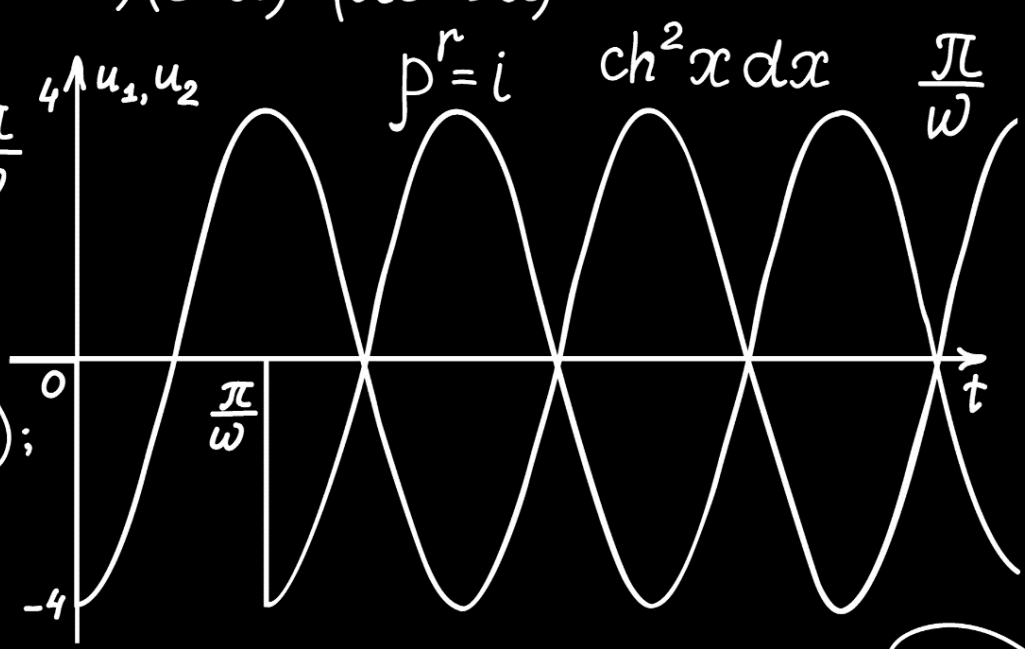
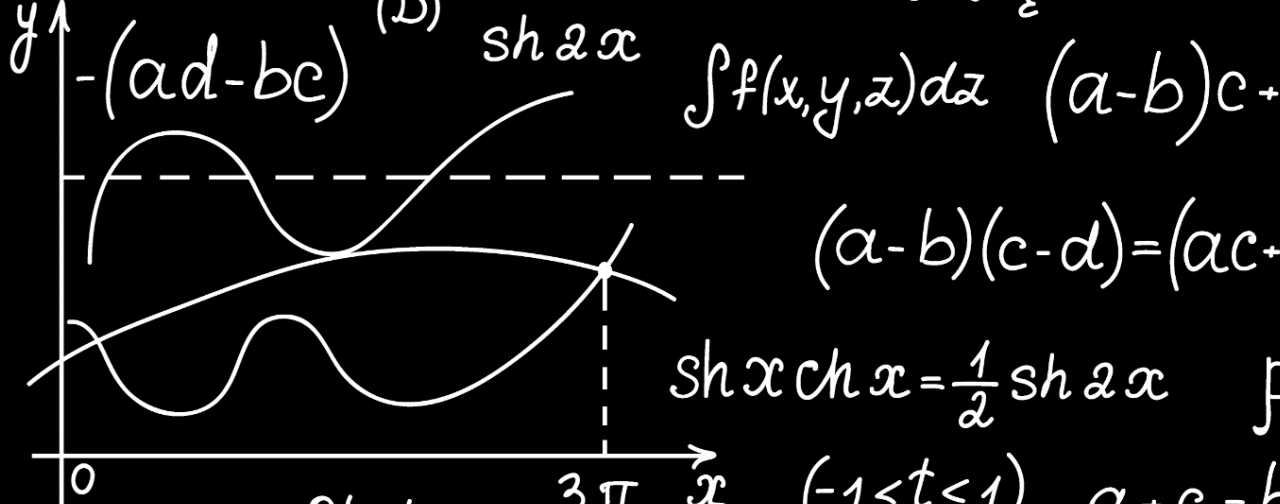
$0, t < \frac{\pi}{\omega}$

$\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1)$

$\operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1)$

$\rho^r = i$

$\sum_{x=1}^m (a_x b_x)$ $\operatorname{th} \frac{\pi}{2} = t$



$\int f(x,y,z) dz$ $(a-b)c +$

$(a-b)(c-d) = (ac+bd)$

$\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2x$

$(-1 < t < 1)$ $a+c=b+d$

$\prod_{i=1}^n y_i \cdot \prod_{i=1}^m y_{n+i} = \prod_{x=1}^m \sum_{x=1}^m (a_x b_x)$

$\iiint dV = d \iiint f dV$

$m = \iiint \rho(x,y,z) dV$

$\operatorname{ch}^2 x \cdot \operatorname{sh}^2 x = 1$

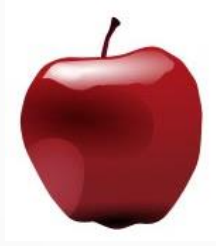
$\frac{f(\mu)}{f(\lambda)} = \frac{S}{k}$ $\sum_{i=1}^d x_i + \sum_{i=1}^n x_{n+i}$ $\int f(x,y,z) dz$ $x^2 \operatorname{Arth} t = \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$

$\operatorname{ch}^2 x \cdot \operatorname{sh}^2 x = 1$ $a+c=b+d$ $\iiint f(x,y,z) dT$ $\int_a^b dx \int_c^d dy \int f(x,y,z)$

Mulai dengan berhitung!



1



2

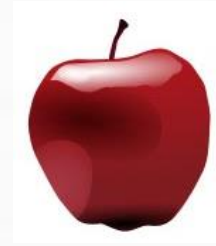


3

+



1



2

=



1



2



3

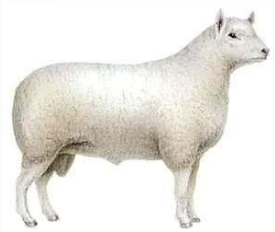
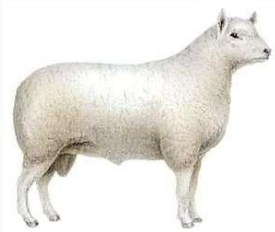
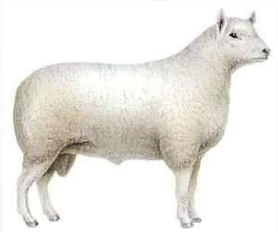


4

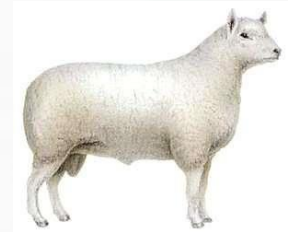
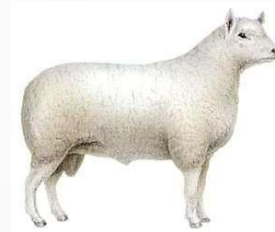


5

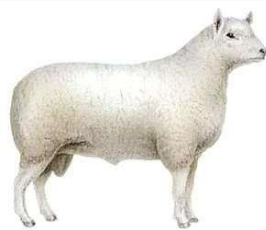
Berhitung!



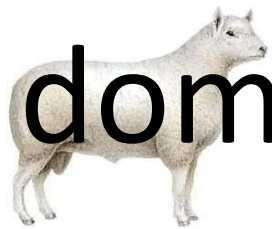
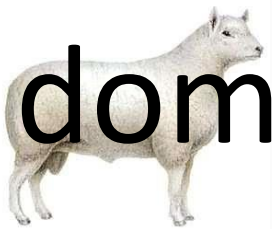
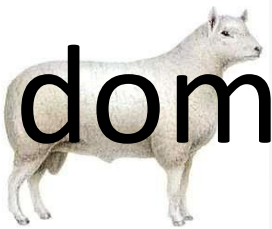
+



= 5



Berhitung!

$$3 \text{  domba + 2 \text{  domba = 5 \text{  domba}$$

$$3 \text{ mobil} + 2 \text{ mobil} = 5 \text{ mobil}$$

$$3 \text{ juta} + 2 \text{ juta} = 5 \text{ juta}$$

$$3 e^{\pi+x^2} + 2 e^{\pi+x^2} = 5 e^{\pi+x^2}$$

Berhitung!

$1 + 0 = 1$

$1 + 1 = 2$

$1 + 2 = 3$

$1 + 3 = 4$

$1 + 4 = 5$

$1 + 5 = 6$

$1 + 6 = 7$

$1 + 7 = 8$

$1 + 8 = 9$

$1 + 9 = 10$

$1 + 10 = 11$

$2 + 0 = 2$

$2 + 1 = 3$

$2 + 2 = 4$

$2 + 3 = 5$

$2 + 4 = 6$

$2 + 5 = 7$

$2 + 6 = 8$

$2 + 7 = 9$

$2 + 8 = 10$

$2 + 9 = 11$

$2 + 10 = 12$

$3 + 0 = 3$

$3 + 1 = 4$

$3 + 2 = 5$

$3 + 3 = 6$

$3 + 4 = 7$

$3 + 5 = 8$

$3 + 6 = 9$

$3 + 7 = 10$

$3 + 8 = 11$

$3 + 9 = 12$

$3 + 10 = 13$

$4 + 0 = 4$

$4 + 1 = 5$

$4 + 2 = 6$

$4 + 3 = 7$

$4 + 4 = 8$

$4 + 5 = 9$

$4 + 6 = 10$

$4 + 7 = 11$

$4 + 8 = 12$

$4 + 9 = 13$

$4 + 10 = 14$

$5 + 0 = 5$

$5 + 1 = 6$

$5 + 2 = 7$

$5 + 3 = 8$

$5 + 4 = 9$

$5 + 5 = 10$

$5 + 6 = 11$

$5 + 7 = 12$

$5 + 8 = 13$

$5 + 9 = 14$

$5 + 10 = 15$

Abstraksi!



Seperti **Bahasa**, namun hasil generalisasi

$$\frac{dq}{dt} = 6 - 2q$$

$$\frac{dq}{6 - 2q} = dt$$

$$-\frac{d(3 - q)}{3 - q} = 2 \cdot dt$$

$$-\log(3 - q) = 2t + K$$

$$q(t) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

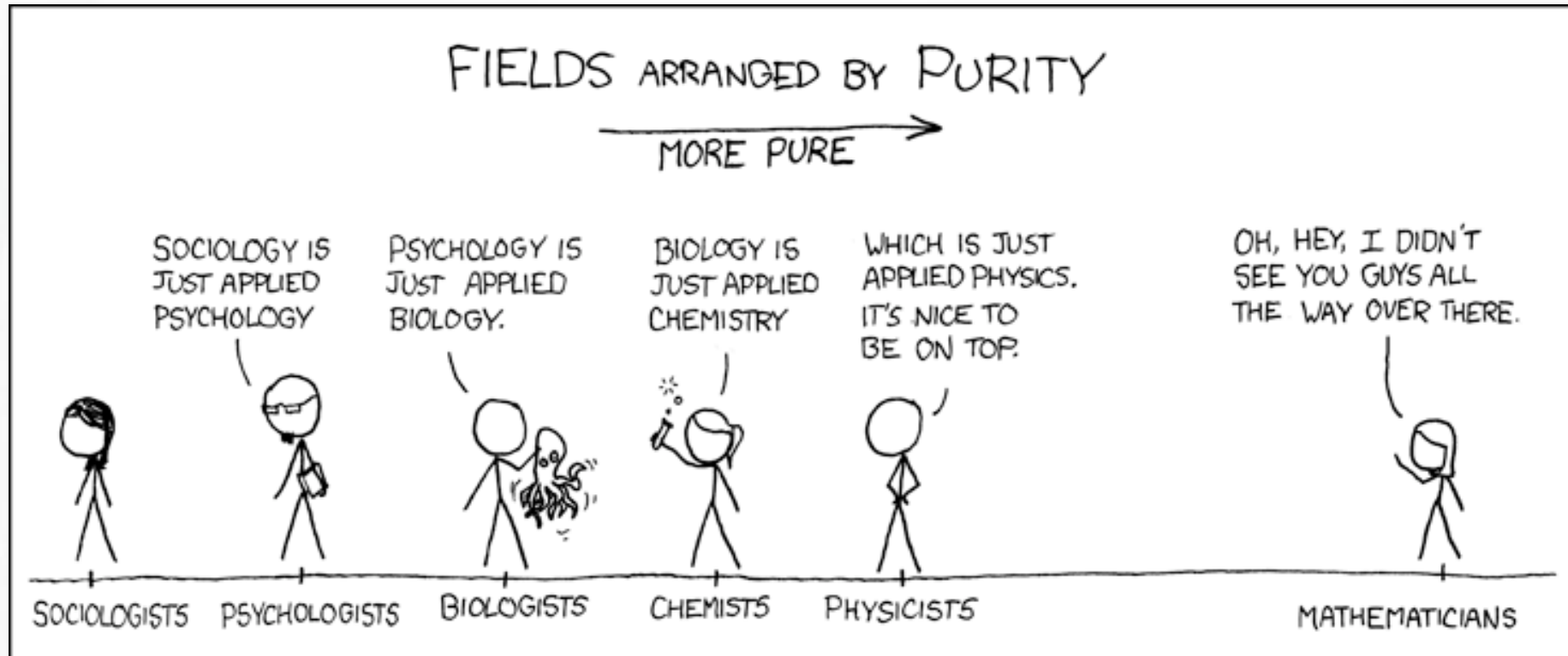
$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

$$(x + a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

Ketika sampai di ranah ide,
 Apa sebenarnya makna dari semua ini?

Proses generalisasi membuat Matematika **independen** dari realita!



Independensi ini membuat matematika hanya membutuhkan **'logika'**

Lantas, apakah matematika

Invented or discovered?

Menuju Fondasi

- Setiap 'objek' matematika merupakan hasil definisi.
- Setiap 'hukum' di matematika merupakan konstruksi dari aksioma atau teorema sebelumnya yang telah **terbukti benar**.
- Semua proses pendefinisian dan konstruksi ini hanya membutuhkan logika.

Menuju Fondasi

- Sains memiliki pegangan, seminimal-minimalnya realita itu sendiri
- Tapi, dimana fondasi matematika?
- Proses deduksi dan pembuktian membutuhkan “AWAL”
- Butuh suatu ‘aksioma dasar’ yang apriori dianggap pasti benar (tidak perlu dibuktikan lagi)

Menuju Fondasi

- Abad ke-18, pencarian terhadap 'akar' pengetahuan tumbuh.
- Seperti halnya fisika ingin mencari partikel elementer dan teori segala sesuatu, pencarian terhadap *mathematical foundations* tumbuh
- Matematikawan mencari kumpulan aksioma dasar yang membangun seluruh matematika.
- Dua kandidat menjanjikan

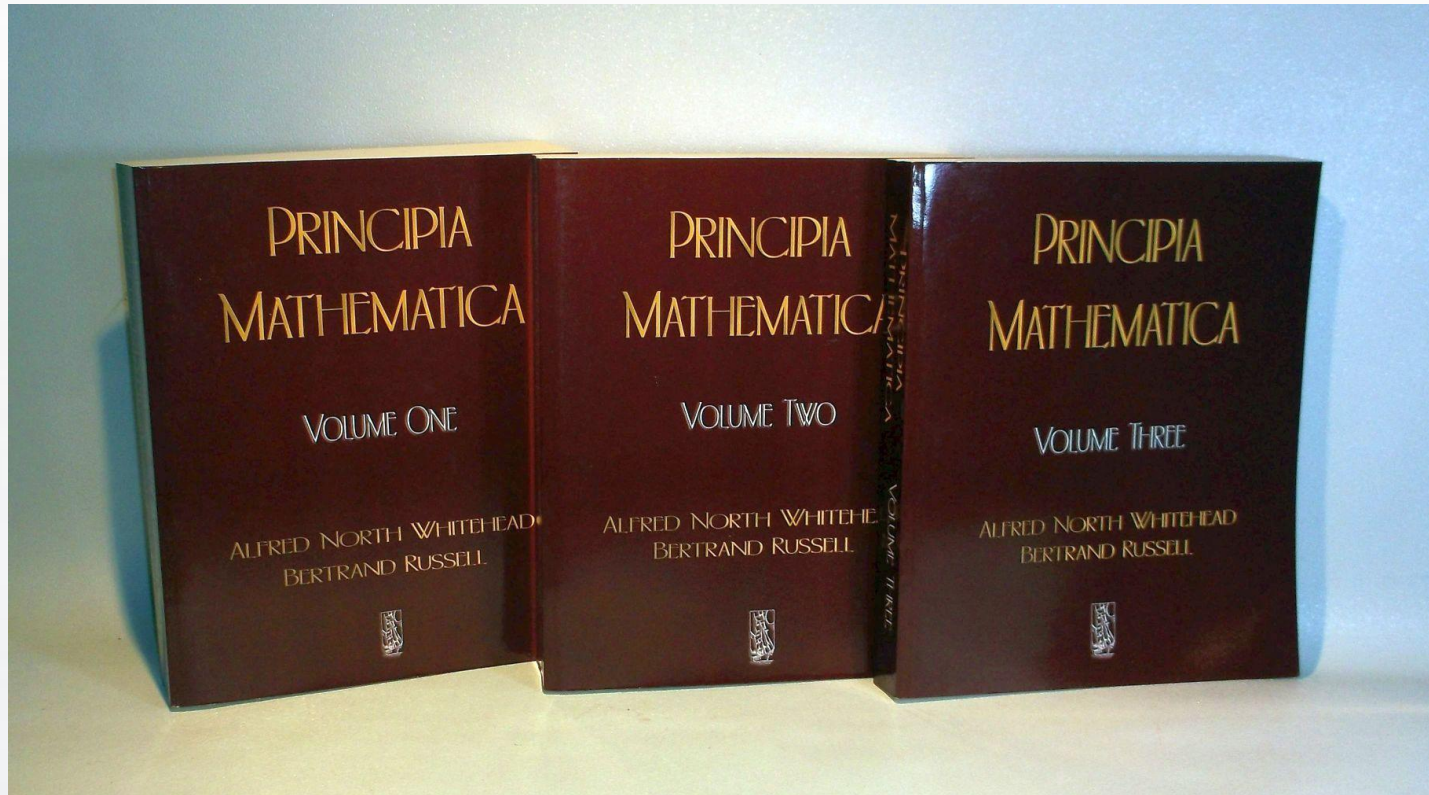
Menuju Fondasi

The axioms of Zermelo-Fraenkel set theory with choice **ZFC**

In principle all of mathematics can be derived from these axioms

Extensionality	$\forall X \forall Y [X = Y \Leftrightarrow \forall z (z \in X \Leftrightarrow z \in Y)]$
Pairing	$\forall x \forall y \exists Z \forall z [z \in Z \Leftrightarrow z = x \text{ or } z = y]$
Union	$\forall X \exists Y \forall y [y \in Y \Leftrightarrow \exists Z (Z \in X \text{ and } y \in Z)]$
Empty set	$\exists X \forall y [y \notin X]$ (this set X is denoted by \emptyset)
Infinity	$\exists X [\emptyset \in X \text{ and } \forall x (x \in X \Rightarrow x \cup \{x\} \in X)]$
Power set	$\forall X \exists Y \forall Z [Z \in Y \Leftrightarrow \forall z (z \in Z \Rightarrow z \in X)]$
Replacement	$\forall x \in X \exists ! y P(x, y) \Rightarrow [\exists Y \forall y (y \in Y \Leftrightarrow \exists x \in X (P(x, y)))]$
Regularity	$\forall X [X \neq \emptyset \Rightarrow \exists Y \in X (X \cap Y = \emptyset)]$
Axiom of choice	$\forall X [\emptyset \notin X \text{ and } \forall Y, Z \in X (Y \neq Z \Rightarrow Y \cap Z = \emptyset) \Rightarrow \exists Y \forall Z \in X \exists ! z \in Z (z \in Y)]$

Menuju Fondasi



SECTION A] THE CARDINAL NUMBER I 351

***52-601.** $\vdash :: \alpha \in 1 . \supset : \phi(\iota'\alpha) . \equiv : x \in \alpha . \supset_x . \phi x : \equiv : (\exists x) . x \in \alpha . \phi x$
Dem.
 $\vdash . *52-15 . \supset \vdash : Hp . \supset : E ! \iota'\alpha :$ (1)
 [*30-4] $\supset : x \iota \alpha . \equiv . x = \iota'\alpha .$
 [*52-6] $\equiv . x \in \alpha$ (2)
 $\vdash . (1) . *30-33 . \supset$
 $\vdash :: Hp . \supset : \phi(\iota'\alpha) . \equiv : x \iota \alpha . \supset_x . \phi x : \equiv : (\exists x) . x \iota \alpha . \phi x$ (3)
 $\vdash . (2) . (3) . \supset \vdash . Prop$

***52-602.** $\vdash : \hat{z}(\phi z) \in 1 . \supset : \psi(\iota x)(\phi x) . \equiv . \phi x \supset_x \psi x . \equiv . (\exists x) . \phi x . \psi x$
 [*52-12 . *14-26]

***52-61.** $\vdash : \alpha \in 1 . \supset : \iota'\alpha \in \beta . \equiv . \alpha \subset \beta . \equiv . \exists ! (\alpha \cap \beta)$ [*52-601 $\frac{x \in \beta}{\phi x}$]

***52-62.** $\vdash : \alpha , \beta \in 1 . \supset : \alpha = \beta . \equiv . \iota'\alpha = \iota'\beta$
Dem.
 $\vdash . *52-601 . \supset \vdash : Hp . \supset : \iota'\alpha = \iota'\beta . \equiv : x \in \alpha . \supset_x . x = \iota'\beta :$
 [*52-6] $\equiv : x \in \alpha . \supset_x . x \in \beta :$
 [*52-46] $\equiv : \alpha = \beta :: \supset \vdash . Prop$

***52-63.** $\vdash : \alpha , \beta \in 1 . \alpha \neq \beta . \supset . \alpha \cap \beta = \Lambda$ [*52-46 . Transp]

***52-64.** $\vdash : \alpha \in 1 . \supset . \alpha \cap \beta \in 1 \vee \iota'\Lambda$
Dem.
 $\vdash . *52-43 . \supset \vdash : Hp . \exists ! \alpha \cap \beta . \supset . \alpha \cap \beta \in 1 :$
 [*5-6 . *24-54] $\supset \vdash : Hp . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . v . \alpha \cap \beta \in 1 :$
 [*51-236] $\supset : \alpha \cap \beta \in 1 \vee \iota'\Lambda :: \supset \vdash . Prop$

***52-7.** $\vdash : \beta - \alpha \in 1 . \alpha \subset \xi . \xi \subset \beta . \supset : \xi = \alpha . v . \xi = \beta$
Dem.
 $\vdash . *22-41 . \supset \vdash : Hp . \xi \subset \alpha . \supset . \xi = \alpha$ (1)
 $\vdash . *24-55 . \supset \vdash : \sim(\xi \subset \alpha) . \supset . \exists ! \xi - \alpha$ (2)
 $\vdash . *22-48 . \supset \vdash : Hp . \supset . \xi - \alpha \subset \beta - \alpha$ (3)
 $\vdash . (2) . (3) . \supset \vdash : Hp . \sim(\xi \subset \alpha) . \supset . \exists ! \xi - \alpha . \xi - \alpha \subset \beta - \alpha$ (4)
 $\vdash . *52-1 . \supset \vdash : Hp . \supset . (\exists x) . \beta - \alpha = \iota'x$ (5)
 $\vdash . (4) . (5) . *51-4 . \supset \vdash : Hp . \sim(\xi \subset \alpha) . \supset . \xi - \alpha = \beta - \alpha .$
 [*24-411] $\supset . \xi = \beta$ (6)
 $\vdash . (1) . (6) . \supset \vdash . Prop$

Menuju Fondasi

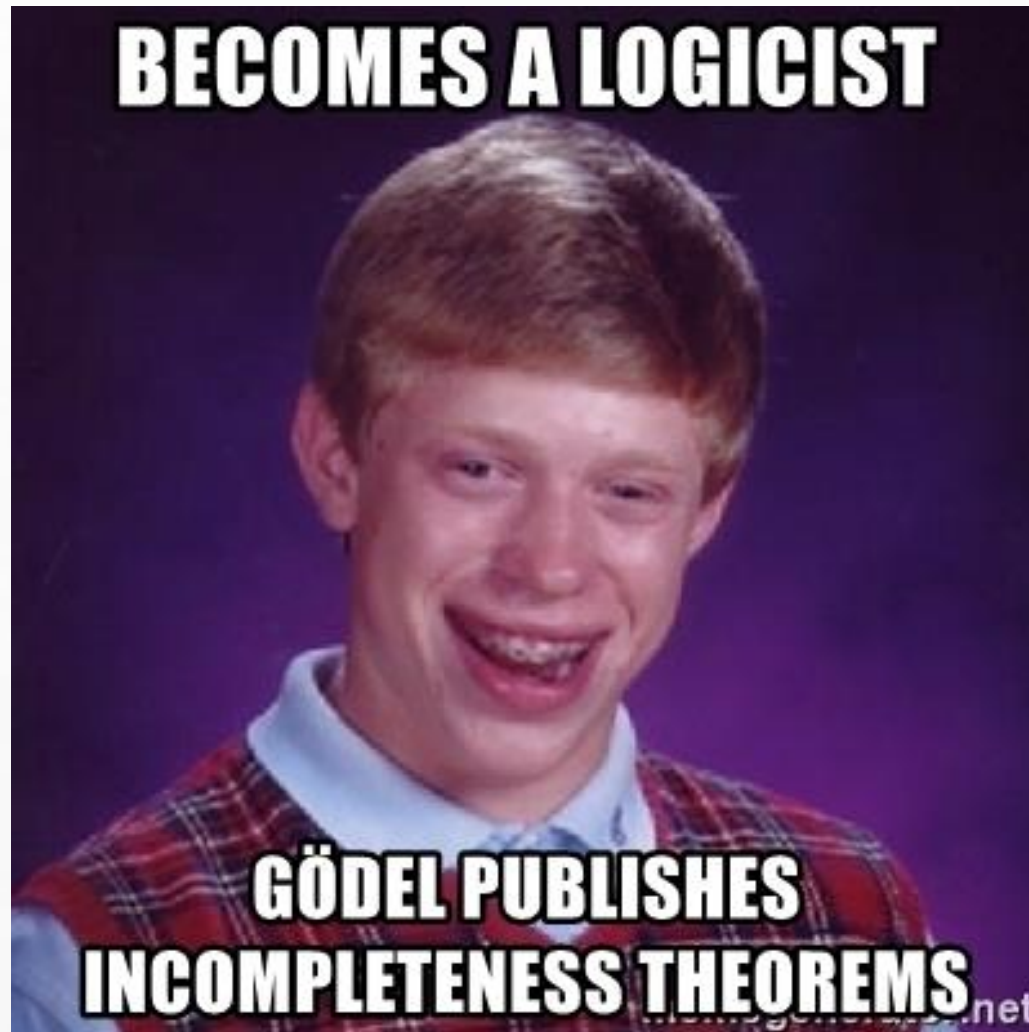
- Dua kandidat ini memiliki sistem yang berbeda, namun sama-sama bisa membangun matematika.
- Dasar matematika bisa dikonstruksi sedemikian rupa, asal konsisten.
- Seluruh sistem matematika hasil konstruksi belaka?
- Jika *given*, maka apa bentuk dasarnya?

Godel Menghancurkan Harapan



- Pada 1931, Kurt Godel mempublikasikan teori yang setara dengan relativitas
- Teorema Ketidaklengkapan Godel:
 1. Suatu sistem matematika tidak akan pernah bisa lengkap dan konsisten sekaligus.
 2. Suatu sistem matematika tidak akan pernah bisa membuktikan konsistensinya sendiri.

Godel Menghancurkan Harapan



Godel Menghancurkan Harapan

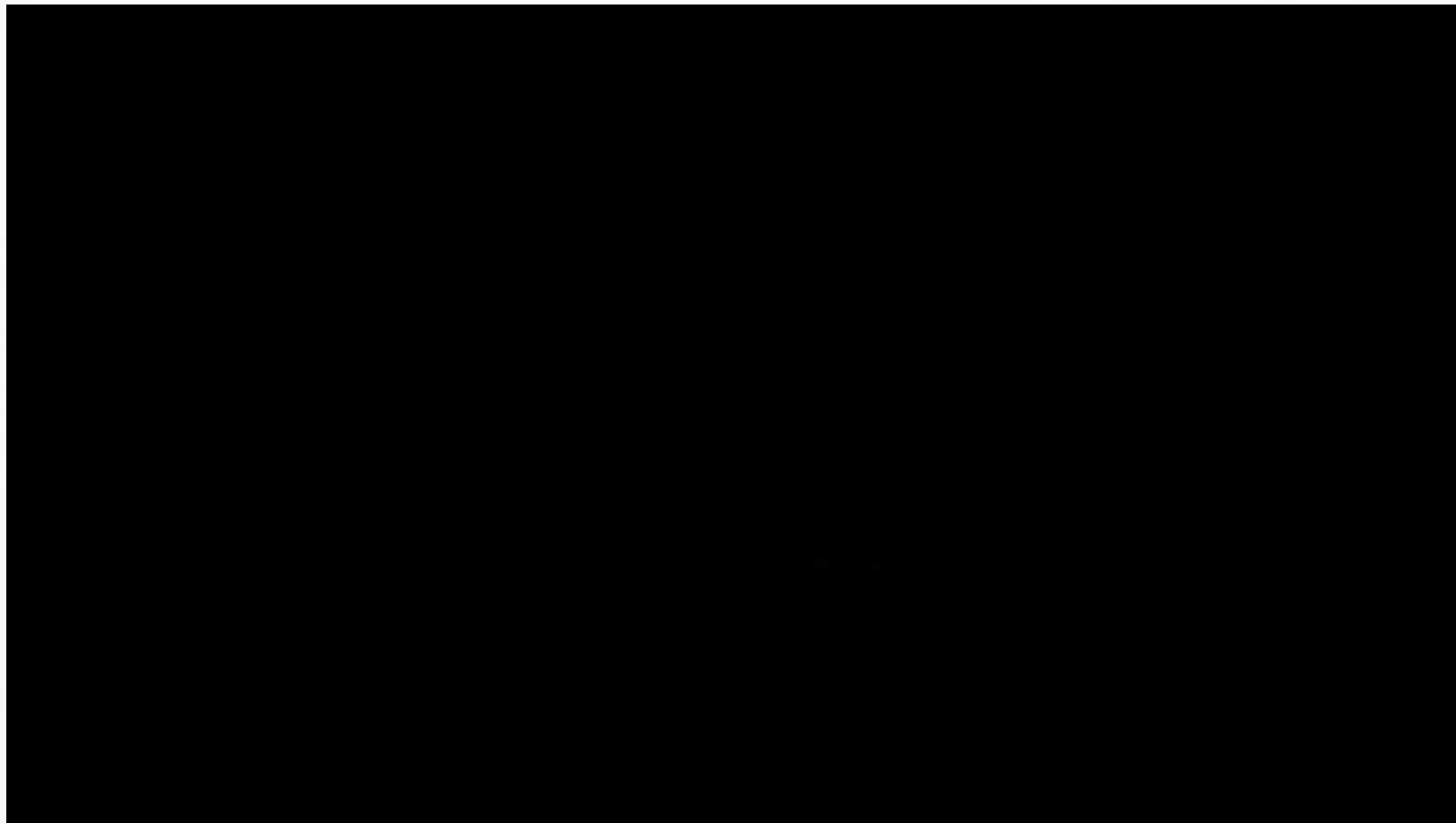
- Implikasinya?

Crisis on mathematical foundations!

Matematika tidak pernah memiliki landasan yang rigid dan tetap.
Matematika menjadi bangunan yang begitu rapuh

Jika ini **benar**, seluruh sains pun akan roboh, karena matematika adalah fondasi sains selain eksperimentasi.

Akan tetapi....



Keindahan pola di alam

- Dari mana asalnya pi?
- Apakah bilangan seperti “golden ratio” merupakan hasil konstruksi manusia?

Permasalahannya ada pada anggapan bahwa

Logika Manusia Tidak Terbatas

- Godel secara tidak langsung memproklamirkan keterbatasan logika manusia.

كما أن للعين حدا تقف عنده كذلك للعقل حد يقف عنده

Sebagaimana mata memiliki keterbatasan yang ia pasti berhenti padanya, maka akal juga memiliki keterbatasan yang ia harus berhenti padanya. (*Adabus Syafii*)

Matematika memiliki keindahan tersendiri, dimana proyeksi ide dari realita tersimpan di dalamnya

Mempelajari matematika seperti mencari hikmah melampaui dari yang terlihat

Mencari Makna I:
Keteraturan di balik kekacauan.

Laplace's Demon

Sejak Abad ke-17: Determinisme Sains Tumbuh.

"We may regard the present state of the universe as the effect of its past and the cause of its future. An intellect which at a certain moment would know all forces that set nature in motion, and all positions of all items of which nature is composed, if this intellect were also vast enough to submit these data to analysis, it would embrace in a single formula the movements of the greatest bodies of the universe and those of the tiniest atom; for such an intellect nothing would be uncertain and the future just like the past would be present before its eyes."

- Simon Pierre Laplace



Lorenz Memutus Harapan

- Mungkinkah segala hal bisa diprediksi?
- Pada 1963, Edward Norton Lorenz menemukan sistem yang mengubah pandangan dunia akan determinisme alam.



Lorenz memutus harapan

- Misalkan x, y, z bergantung waktu (t)

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$

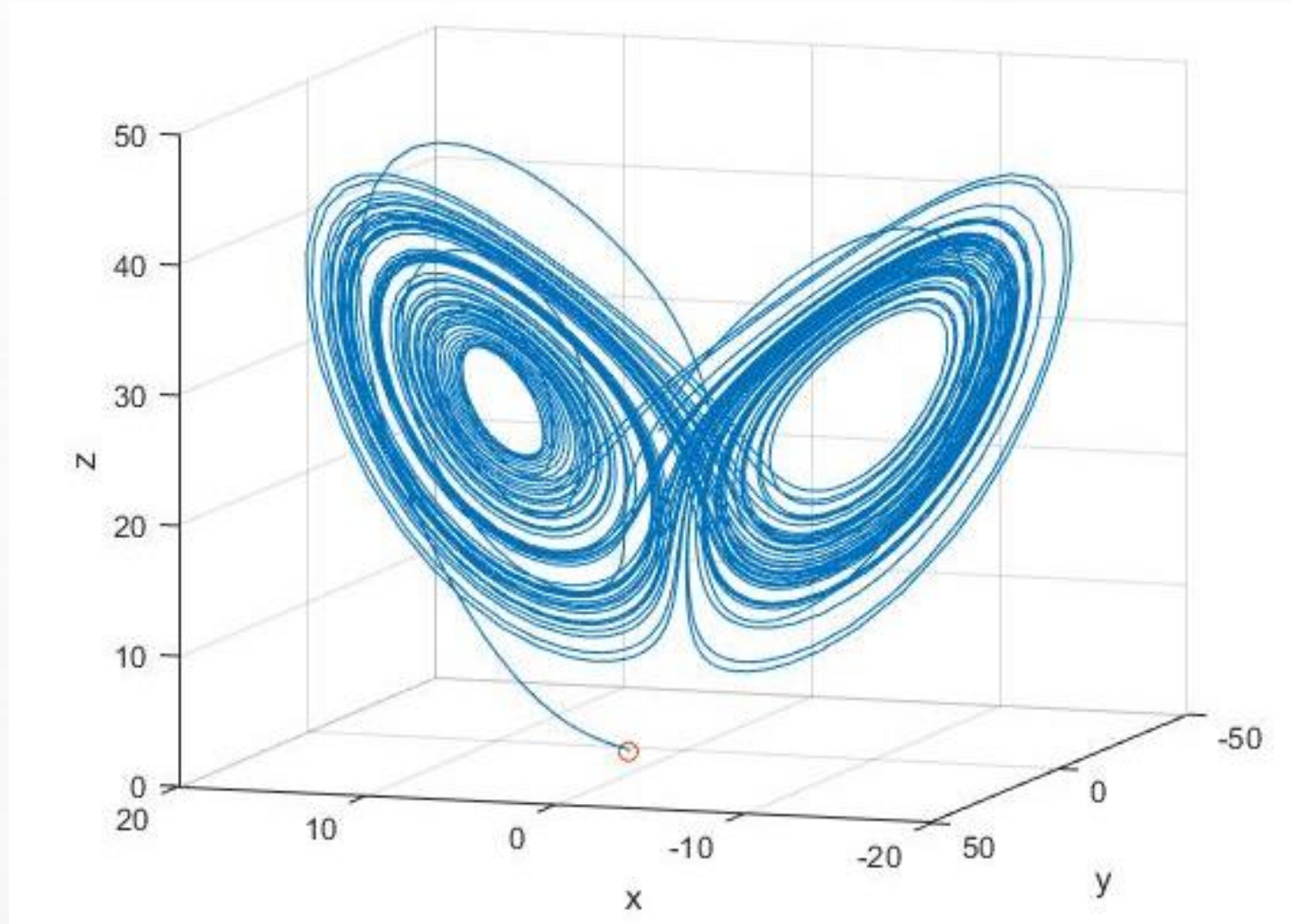
$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

$$\sigma = 10$$

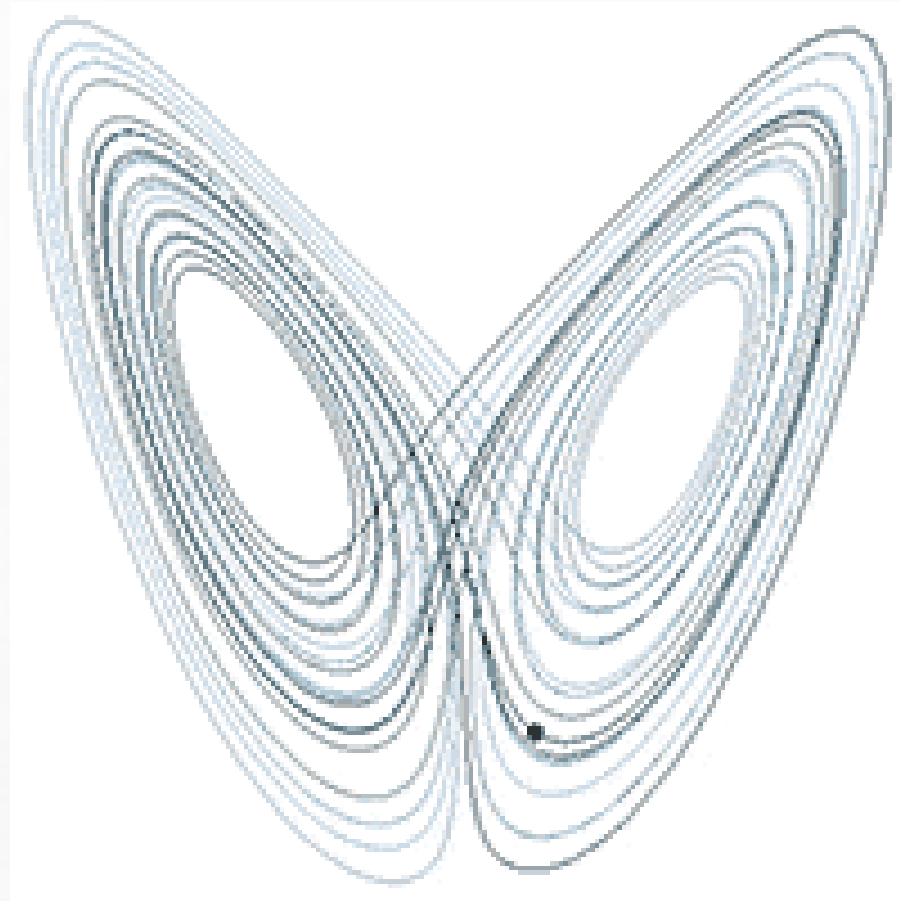
$$\rho = \frac{8}{3}$$

$$\beta = 28$$

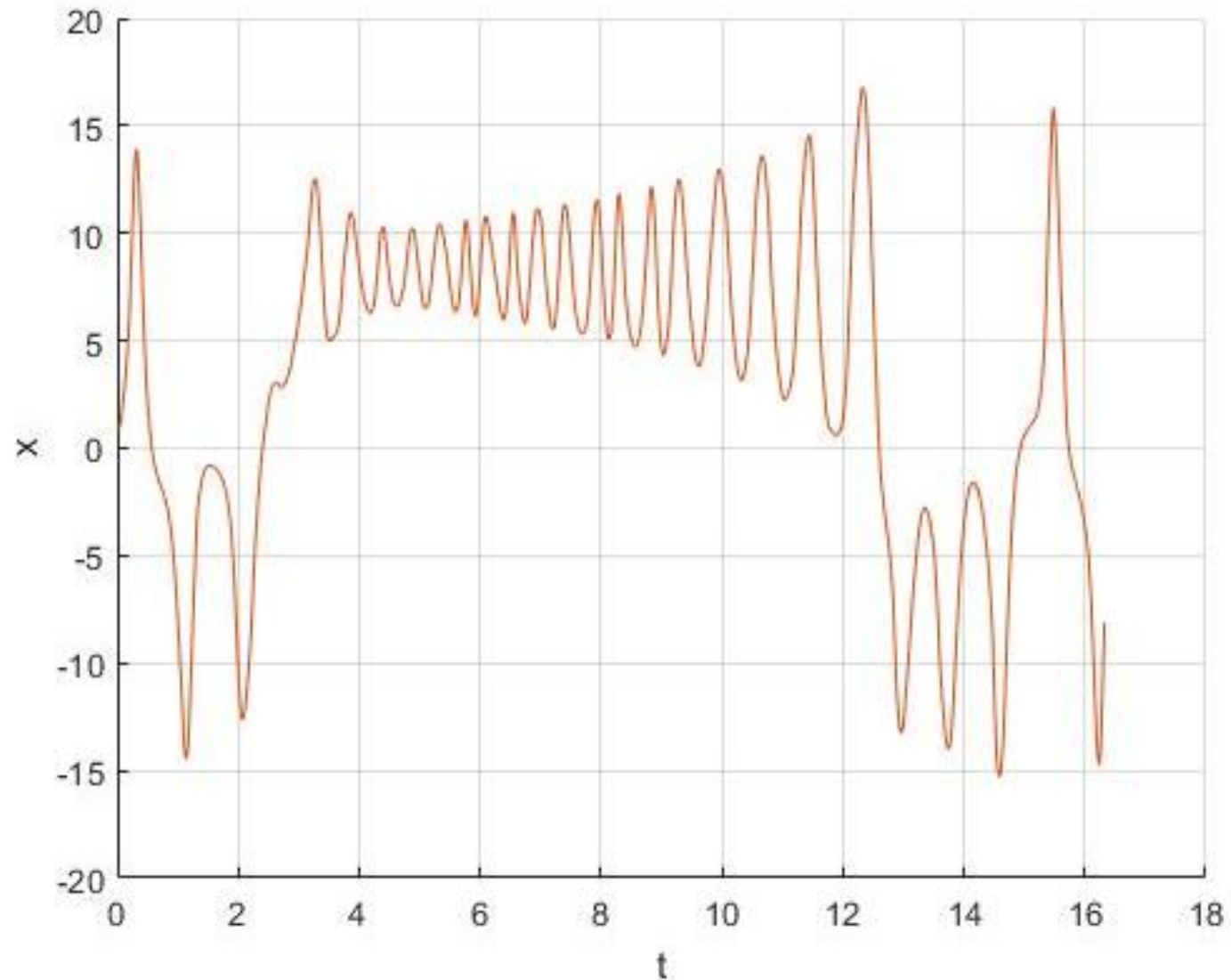
Lorenz memutus harapan



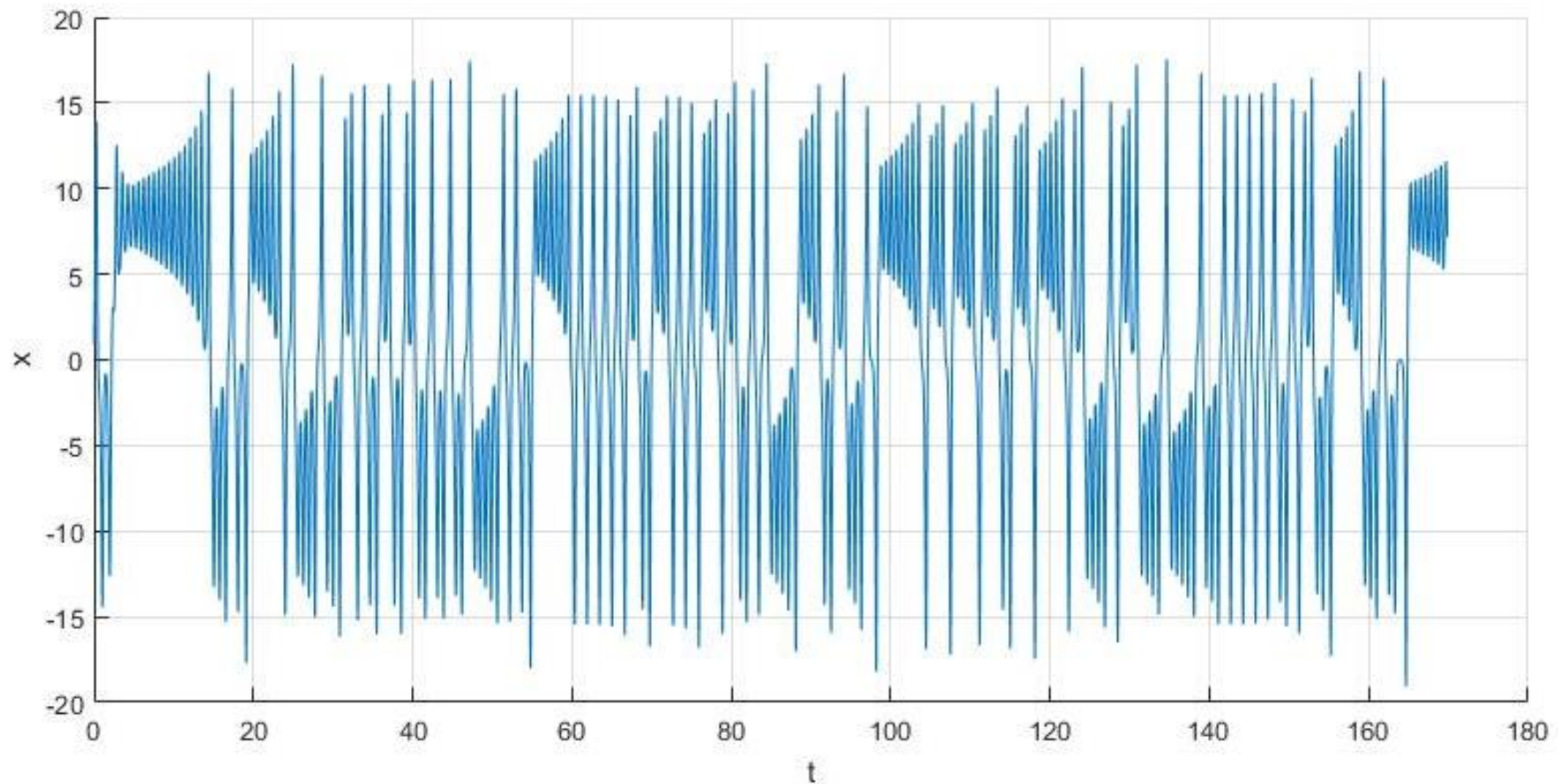
Lorenz memutus harapan



Lorenz memutus harapan



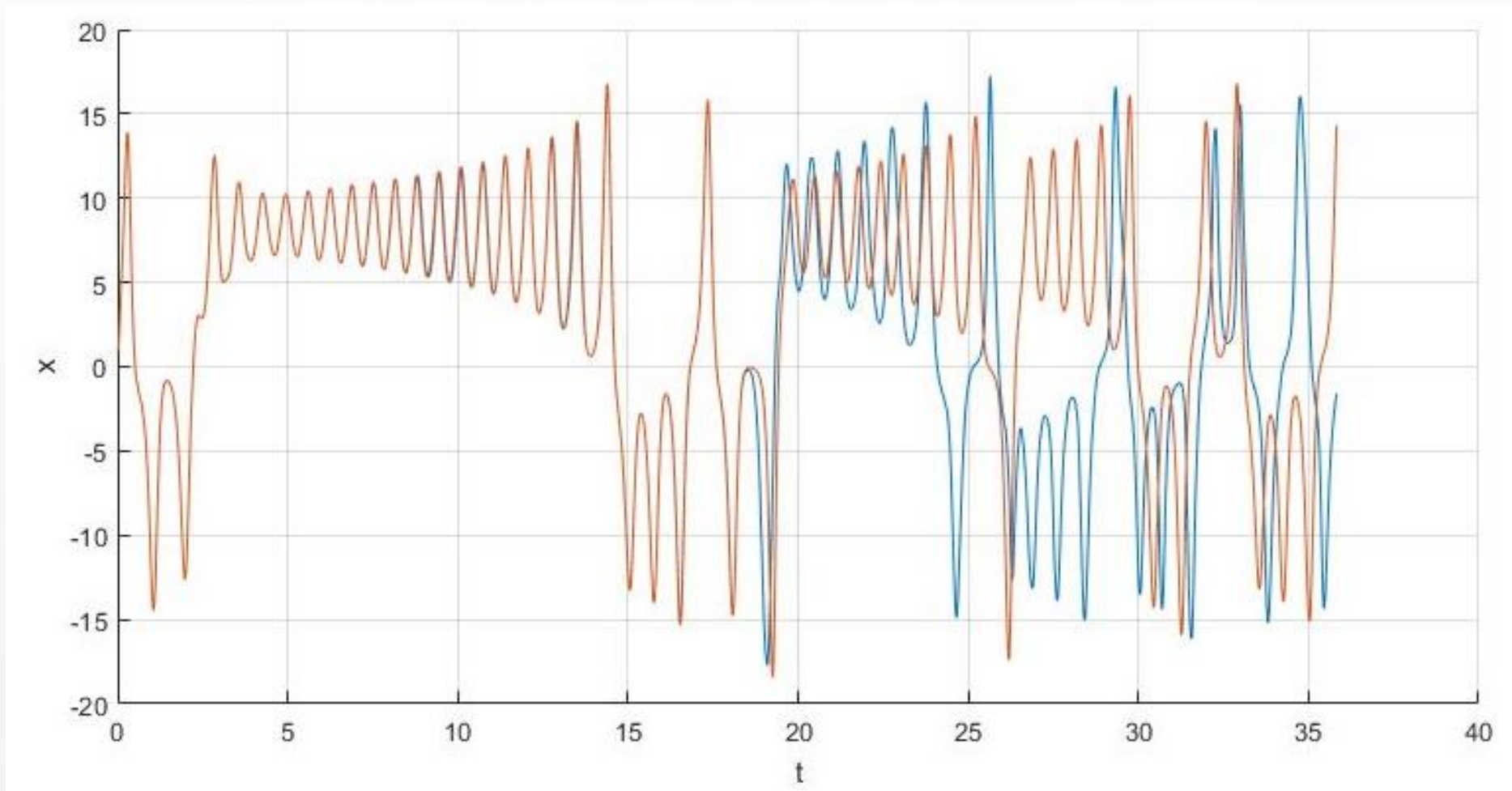
Lorenz memutus harapan



Sistem Lorenz: Deterministik tapi Unpredictable!

Semesta bukanlah mesin jam yang bisa diprediksi perilakunya selama tahu cara kerjanya.

Lorenz memutus harapan



Dua simulasi sistem Lorenz dengan beda nilai awal x sebesar 0.0001

Sistem Lorenz: sensitif oleh perubahan kecil!

Satu gangguan kecil menghasilkan perubahan yang besar

Butterfly Effect

One meteorologist remarked that if the theory were correct, one flap of a sea gull's wings would be enough to alter the course of the weather forever. The controversy has not yet been settled, but the most recent evidence seems to favor the sea gulls

- E.N. Lorenz

“Does the flap of a butterfly’s wings in Brazil set off a tornado in Texas?”

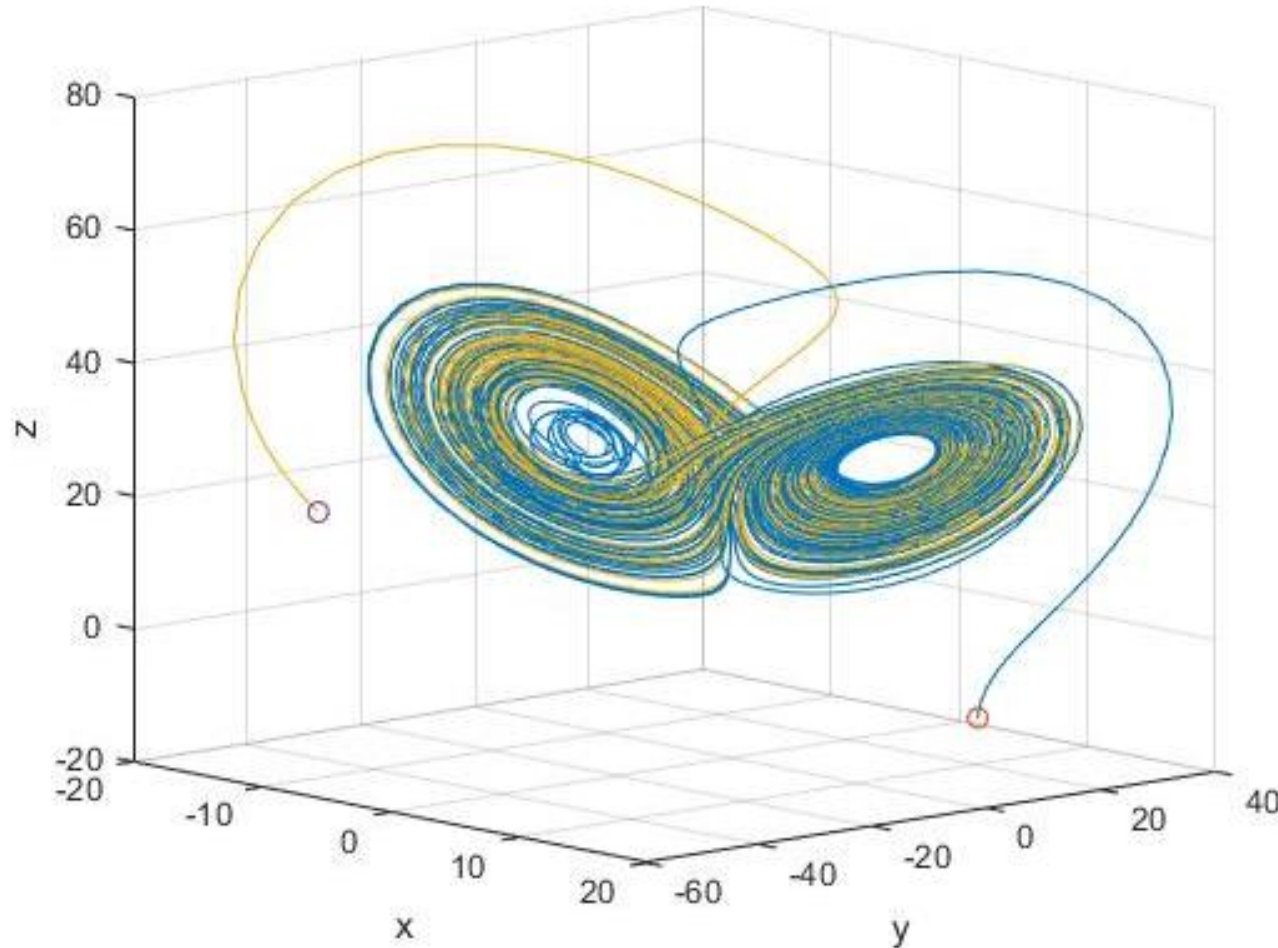
Chaos

- Sistem Lorenz menginisiasi apa yang dikenal sebagai *chaos*, sebuah perilaku alam yang kacau namun berasal dari sistem yang deterministik.
- Semesta sebenarnya seperti apa? *Wallahu'alam*

Chaos mengimplikasikan masih banyak yang belum bisa dipahami dari semesta ini

Mencari Makna II: Emergence dan pola statistik

Struktur yang tetap!



Dua simulasi sistem Lorenz dengan nilai awal yang cukup berjauhan

Sistem Lorenz: *Chaotic* tapi berstruktur

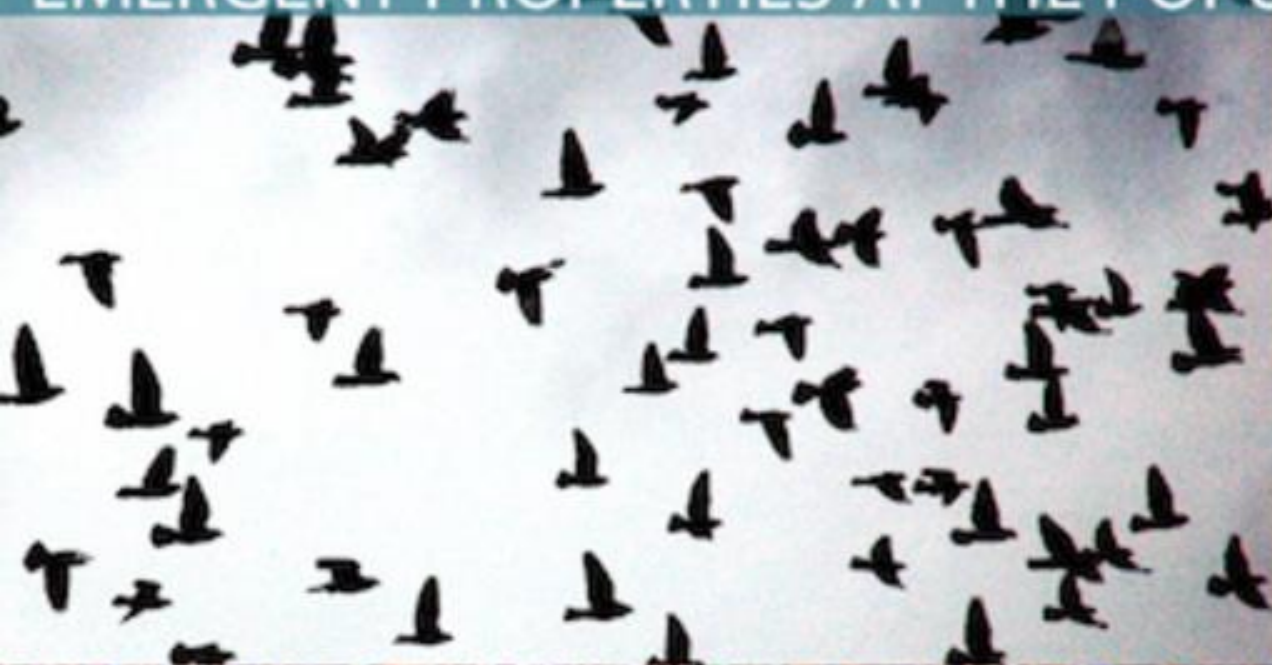
“Kualitatif” di atas Kuantitatif

- Data individu akan terlihat acak dan ‘berantakan’, namun bila dilihat dalam satu kesatuan kelompok, ada pola/struktur yang terbentuk
- Justifikasi statistik: kumpulan memiliki informasi yang lebih kaya ketimbang satuan
- Big data: Bagaimana sifat kualitatif disarikan dari yang kuantitatif

Emergence Property

- Dalam biologi, memandnag kumpulan objek sebagai satu kesatuan akan memunculkan (*emerge*) sifat-sifat baru.
- Kompleksitas bertingkat
- Sel -> jaringan -> organisme -> ekosistem -> bioma -> gaia -> semesta
- Setiap level kompleksitas memiliki keteraturan dan keteracakan yang berbeda ketimbang level sebelumnya.

EMERGENT PROPERTIES AT THE POPULATION LEVEL

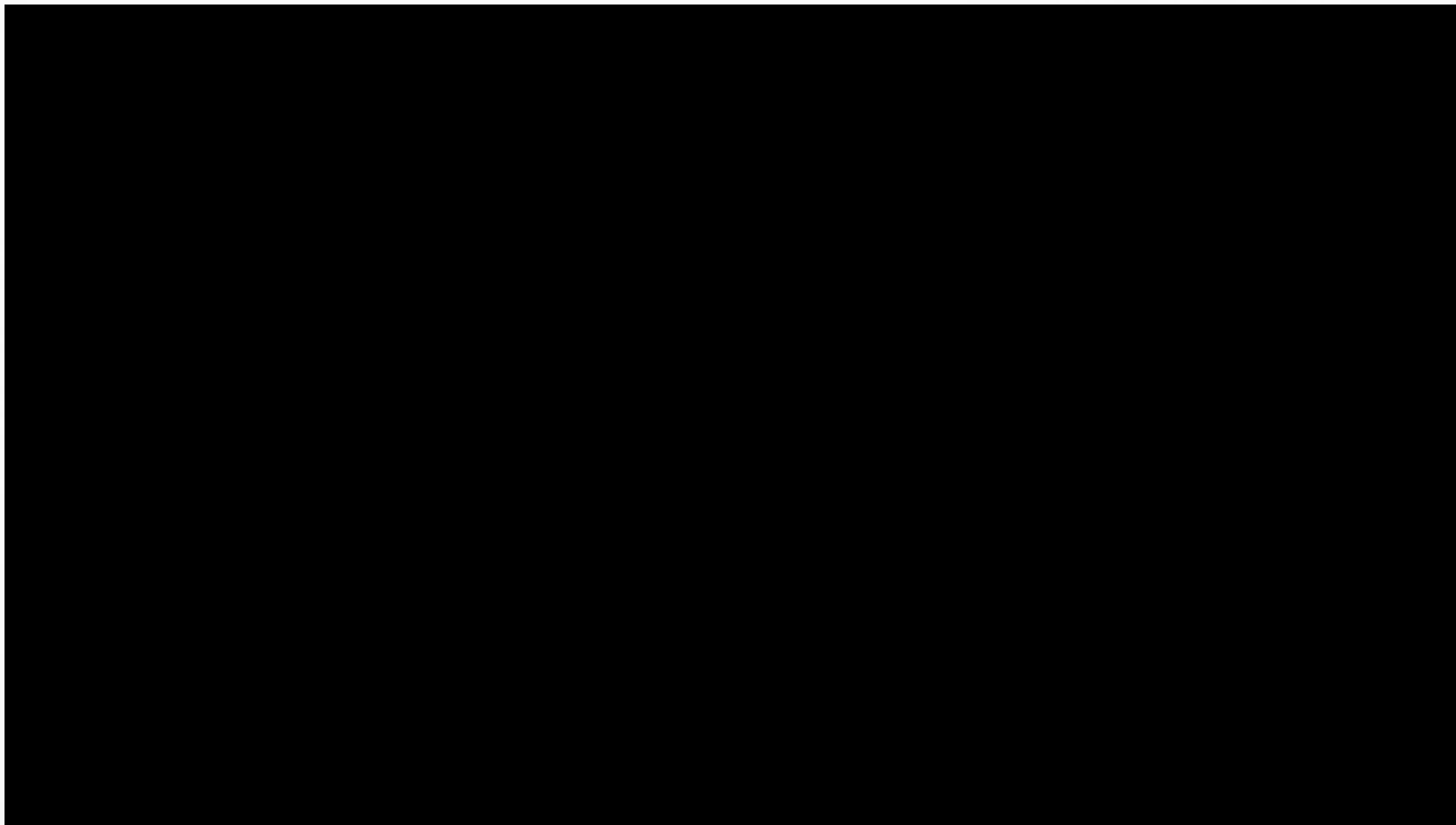


- Setiap kejadian terasa 'acak' dan kita memiliki kehendak 'bebas', tapi melihat semuanya dalam satu rangkaian waktu, ada pola/scenario/narasi yang terbentuk.
- Justifikasi takdir? *Wallahu'alam*

Mencari Makna III: Sinkronisasi dan Pengaturan Alam



Sinkronisasi Metronom



Sinkronisasi Sistem Lorenz

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$

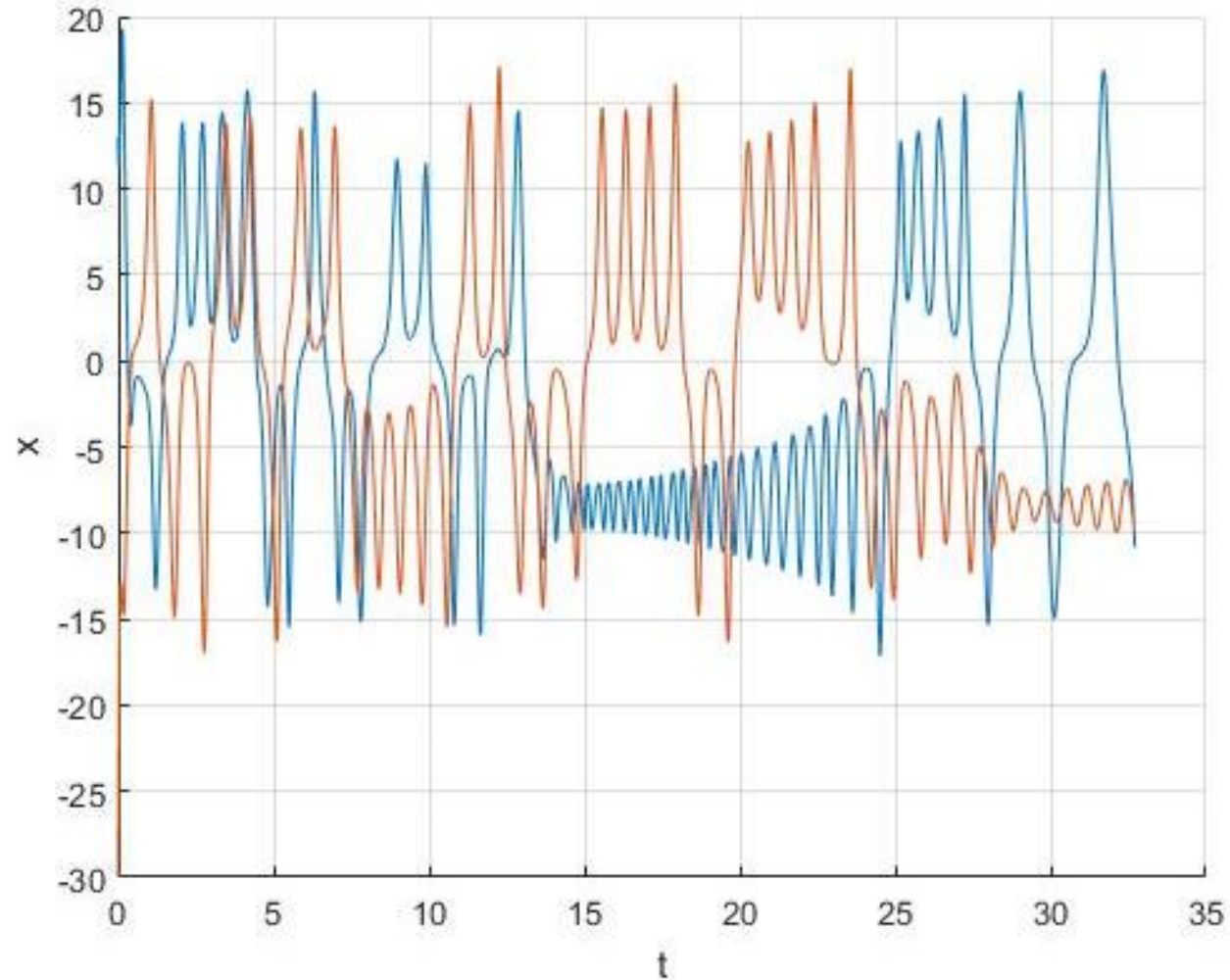
$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

$$\frac{dx'}{dt} = \sigma(y' - x')$$

$$\frac{dy'}{dt} = x'(\rho - z') - y'$$

$$\frac{dz'}{dt} = x'y' - \beta z'$$

Sinkronisasi Sistem Lorenz



Sinkronisasi Sistem Lorenz

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) + \varepsilon(x - x')$$

$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$

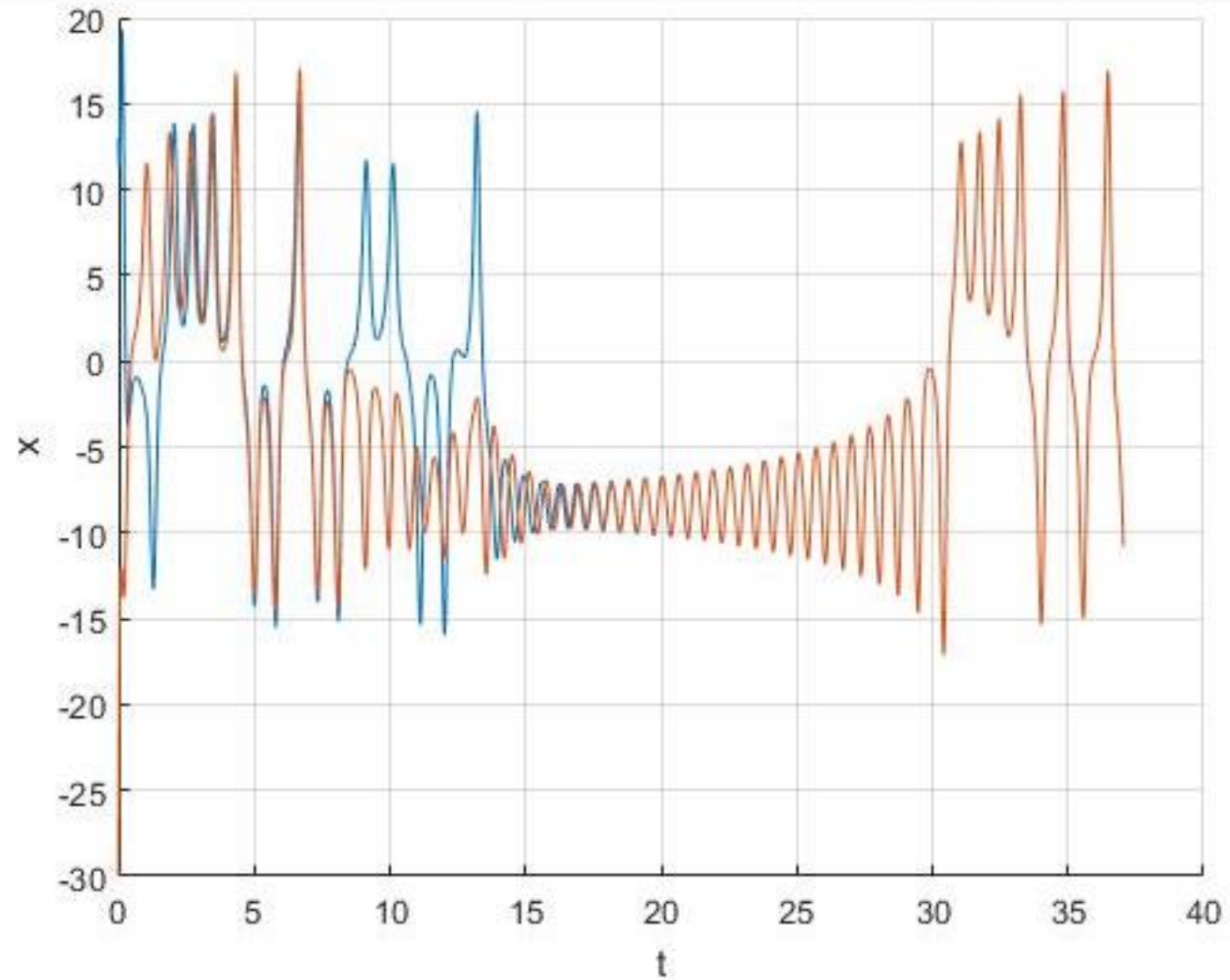
$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

$$\frac{dx'}{dt} = \sigma(y' - x') + \varepsilon(x' - x)$$

$$\frac{dy'}{dt} = x'(\rho - z') - y'$$

$$\frac{dz'}{dt} = x'y' - \beta z'$$

Sinkronisasi Sistem Lorenz



Two chaotic systems can synchronize!

Keselaran di alam seakan *self-regulate*

Kontrol macam apa yang terlibat, kita tidak tahu.

Mencari Makna IV: Struktur Fraktal

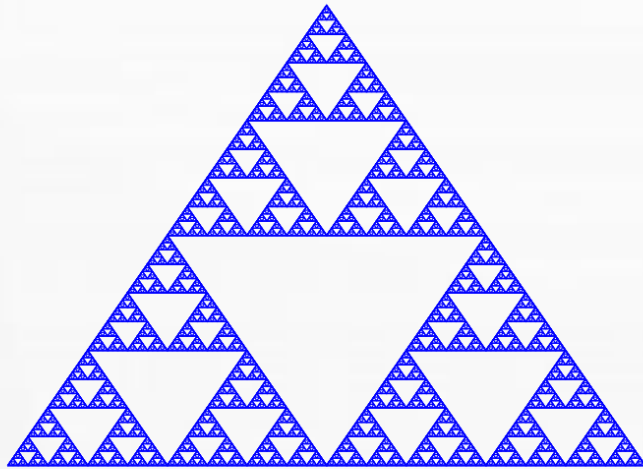
Fraktal?

- Sistem *chaos* pada beberapa kasus memiliki struktur fraktal.
- Fraktal: bentuk yang mengulang secara terus menerus

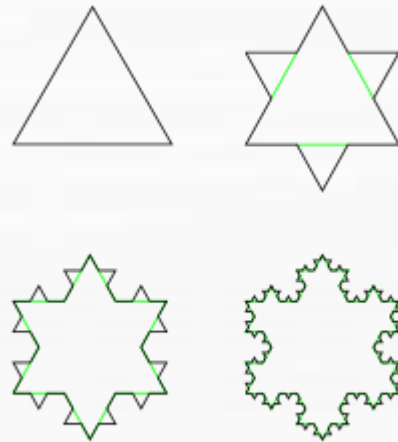


Dimensi pecahan

- Bentuk-bentuk fraktal mendeskripsikan wujud berdimensi pecahan (**Hausdorff Dimension**)
- Dimensi 0: titik. Dimensi 1: Garis. Dimensi 2: Bidang. Dimensi 3: Ruang. Fraktal ada **di antara** dimensi-dimensi itu

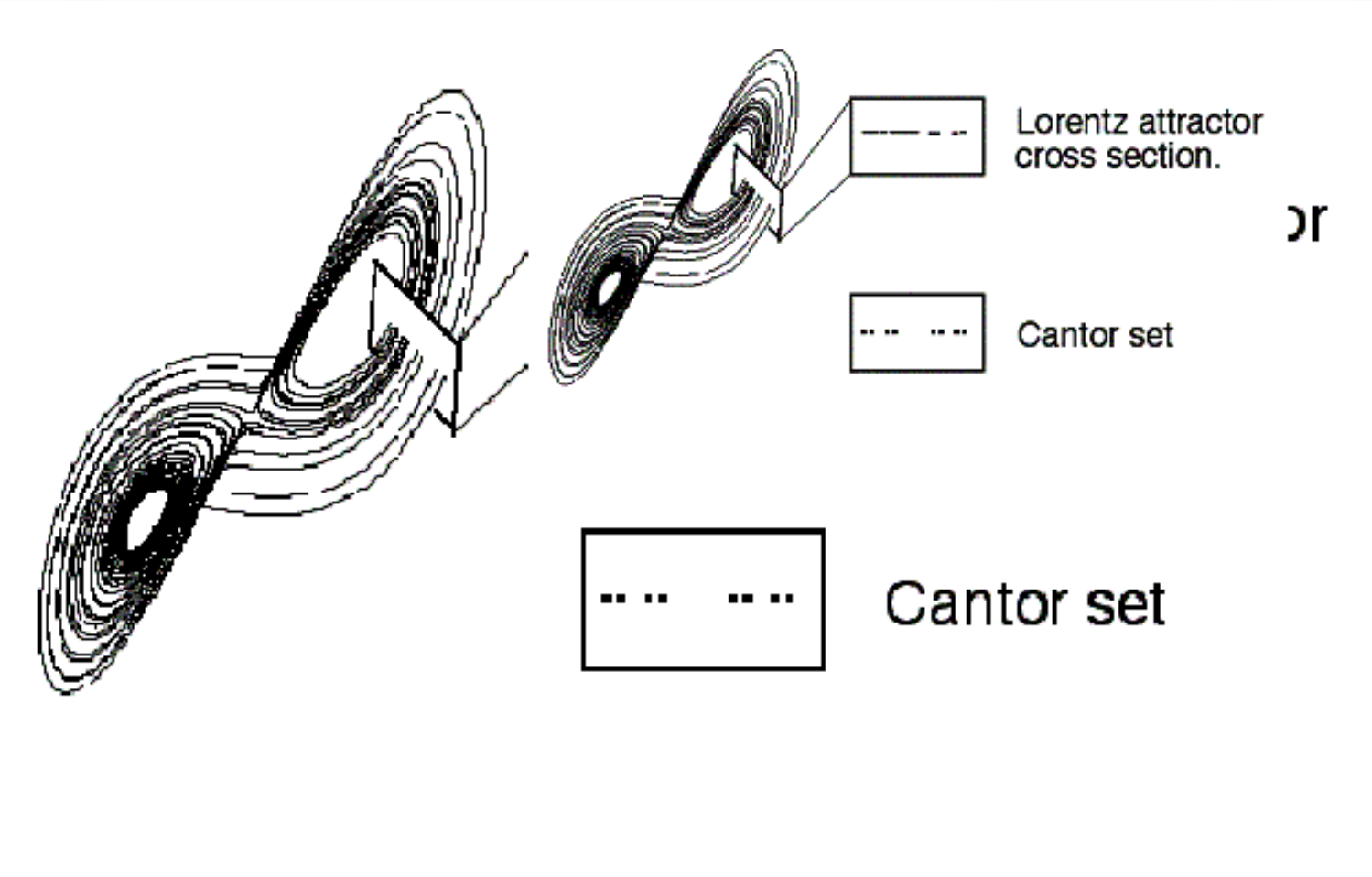


Segitiga Sierpinski, Dimensi 1,58



Salju Koch, Dimensi 1,26

Sistem Lorenz (lagi)?



Fraktal Mandelbrot

Kumpulan c
dimana

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

terbatas,



Di alam?



Di alam?



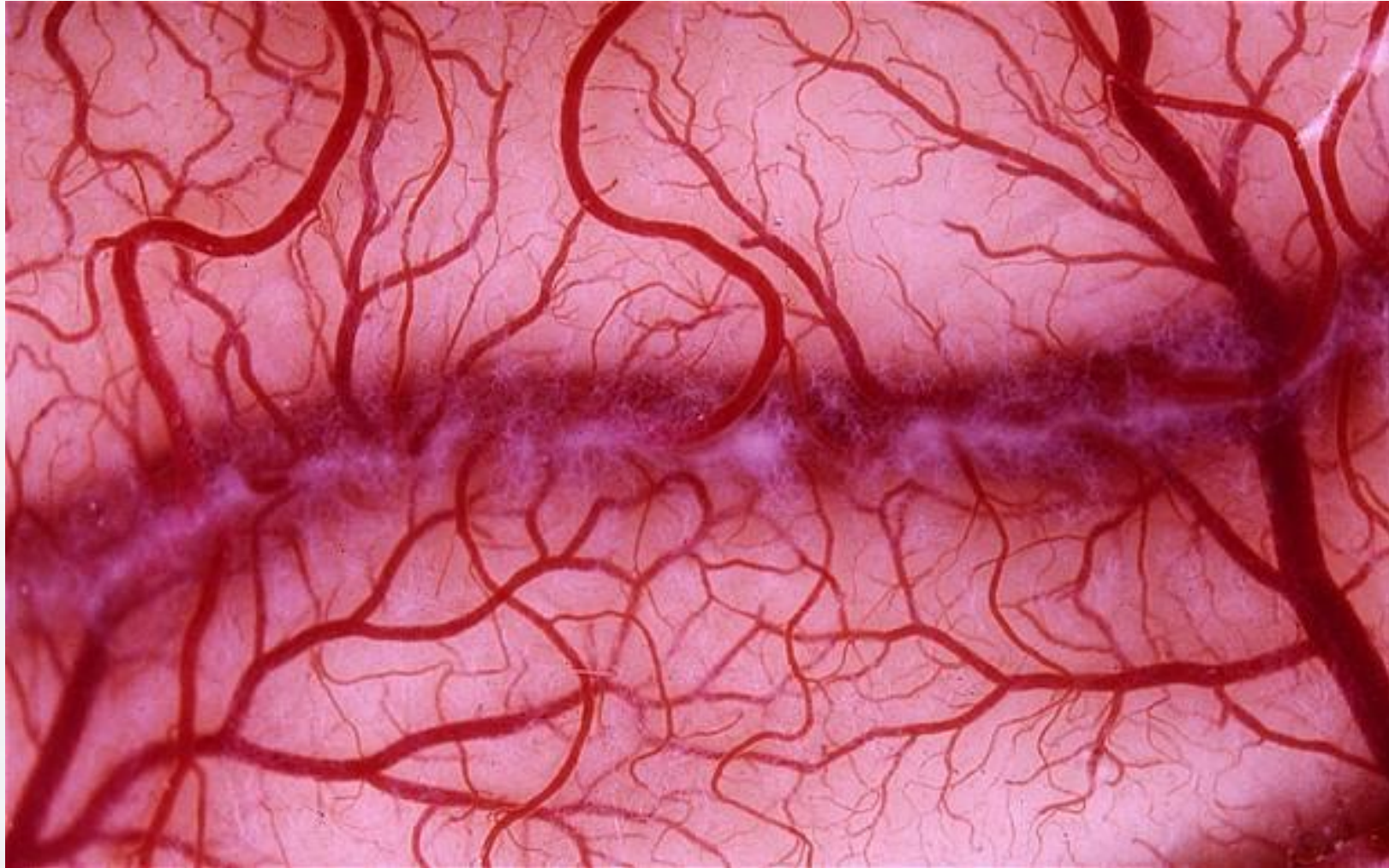
Di alam?



Di alam?



Di alam?



Di alam?



Struktur Fractal ada dimana-mana!

Epilog

- Ada keindahan di dunia abstrak di balik keindahan realita itu sendiri
- Fondasi logis dari matematika hanya memperlihatkan betapa terbatasnya kemampuan rasio manusia
- Matematika masih merupakan subjek yang luas ketimbang apa yang sudah dipaparkan.