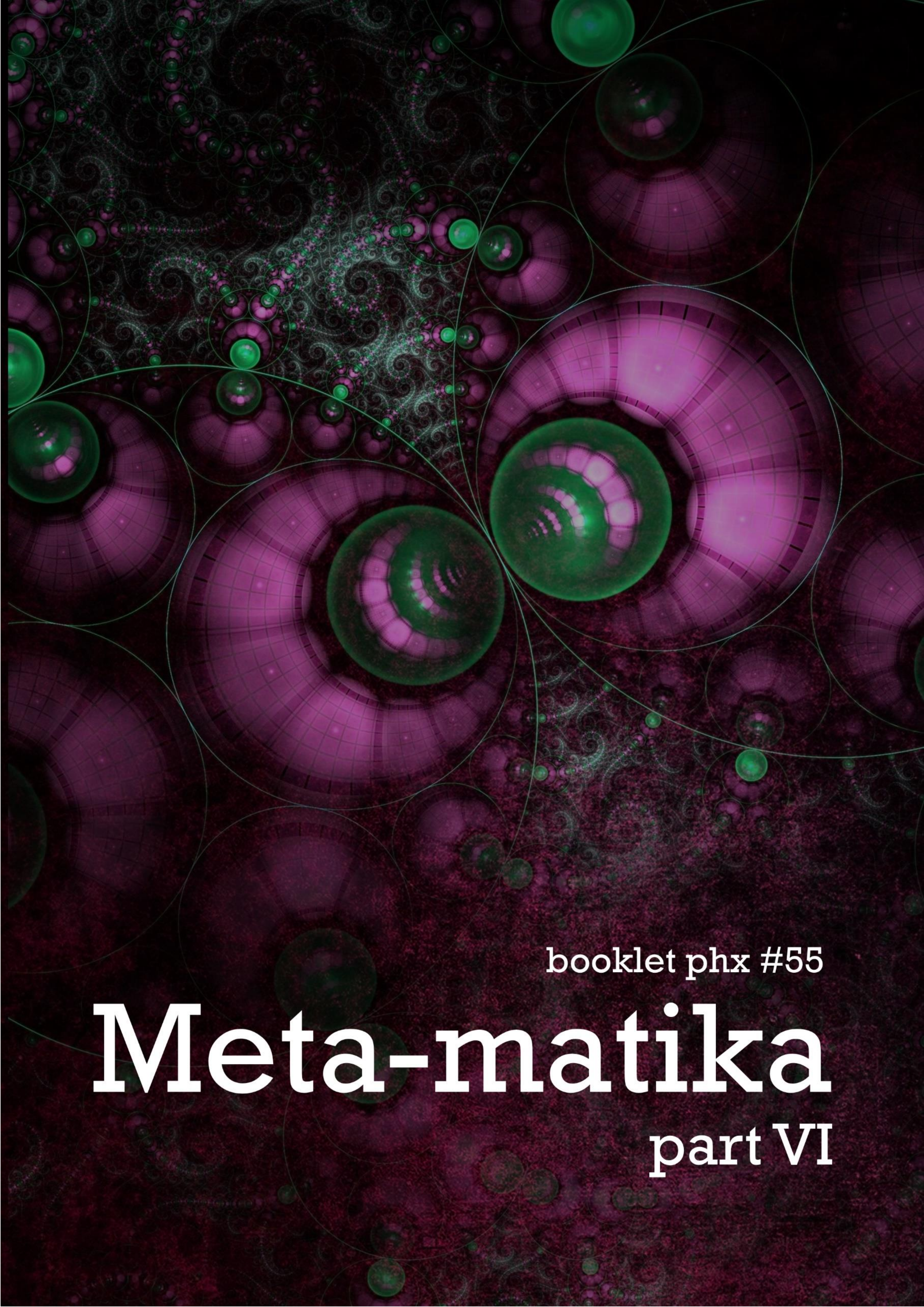


booklet phx #55

Meta-matika

part VI

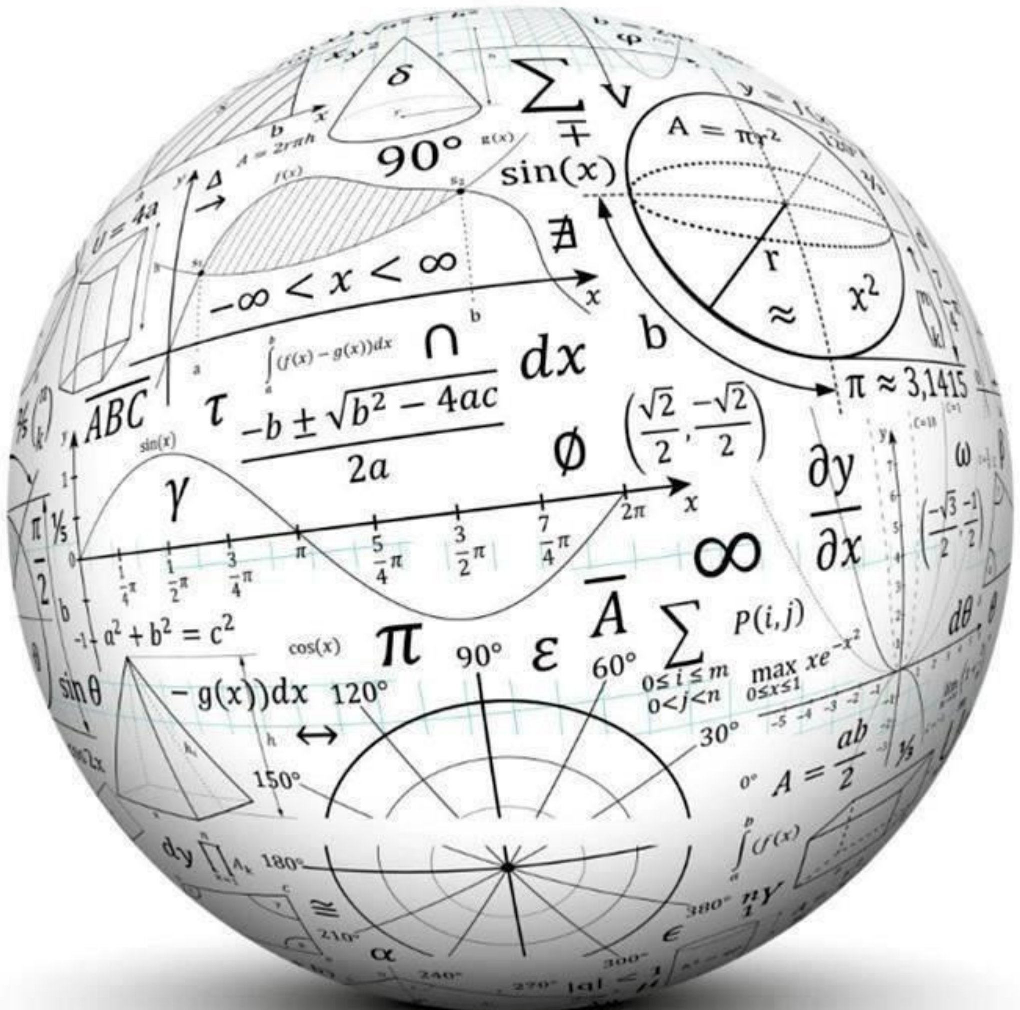
Booklet Seri 55

Metamatika VI

Oleh: Phoenix

Matematika adalah ilmu yang luas, karena kemampuan abstraksinya bisa tak terbatas. Ia bisa menjamah aspek-aspek yang semakin kontra intuitif, meskipun masih bisa dihubungkan ke realita. Memebedah satu-satu topik mungkin akan menjadi perjalanan panjang dan booklet ini bisa dianggap salah satu inisiasinya. Setelah mencoba menggali di wilayah fundamental dan mendasar di booklet-booklet sebelumnya, kali ini pencarian berlanjut ke topik-topik spesifik.

(PHX)



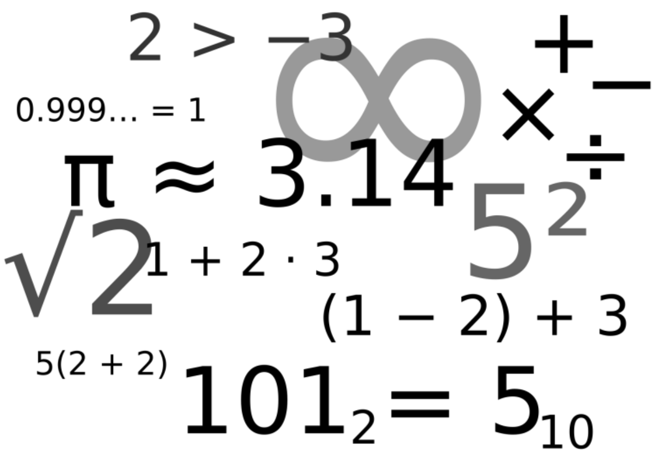
90°
sin(x)
A = πr²
−∞ < x < ∞
dx
b
r
≈
x²
π ≈ 3,1415
ABC
τ
−b ± √b² − 4ac
2a
∅
γ
2π
x
∞
∂y
∂x
a² + b² = c²
cos(x)
π
90°
ε
A
60°
P(i,j)
sin θ
− g(x))dx
120°
30°
150°
A = ab/2
180°
210°
α
300°

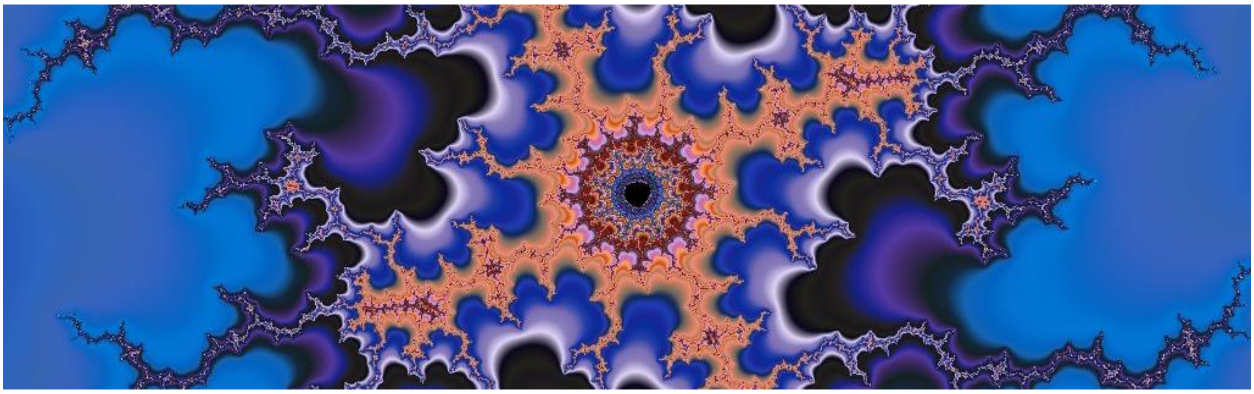
Teruntuk

Semua mahasiswa matematika di seluruh Indonesia,

Dan siapapun yang mengagumi keindahan angka

Daftar Konten





Sekompleks itukah Bilangan Kompleks?

That this subject (imaginary numbers) has hitherto been surrounded by mysterious obscurity, is to be attributed largely to an ill adapted notation. If, for example, 1, -1, and the square root of -1 had been called direct, inverse, and lateral units, instead of positive, negative, and imaginary (or even impossible), such an obscurity would have been out of the question. – Carl Friedrich Gauss

Dalam keseharian, kita menggunakan bilangan paling tidak untuk 2 keperluan, yakni pengukuran (*measure*) dan pencacahan (*count*). Dengan kedua keperluan itu, kita cukup mengenali bilangan yang selama ini kita ketahui, yang dengan sangat mudah digambarkan melalui sebuah garis bilangan. Kumpulan bilangan ini, tidak perlu nama khusus, karena sudah mencakup semuanya. Berbeda seperti bilangan bulat, bilangan rasional, bilangan prima, atau bilangan-bilangan lainnya yang memang diberi label tersendiri karena merupakan bentuk khusus dari keseluruhan bilangan. Ketika kita berusaha menyelesaikan suatu masalah matematika dan jawabannya tidak ada dalam bilangan ini, maka secara sederhana kita cukup katakan, memang solusinya tidak ada. Mudah bukan? Ketika sekolah kita mengenal persamaan kuadrat dan kita tahu ada bentuk-bentuk yang mana persamaan kuadrat tidak punya solusi. Jika tidak ditemukan, maka tidak ada. Simpel.

Sayangnya, kumpulan bilangan yang kita ketahui sehari-hari ini, yang seharusnya mencakup semua bilangan, justru punya nama khusus. Mereka disebut bilangan riil (nyata). Apa yang membuatnya dinamai demikian? Pandanglah terlebih dahulu persamaan $x^2 + 1 = 0$. Dari apa yang kita semua pelajari di SMA, persamaan ini tidak punya solusi. Namun, bagaimana jika sebenarnya solusinya bukan tidak ada, tapi hanya sekadar "tidak terlihat" dalam garis bilangan yang selama ini kita ketahui, seperti makhluk gaib yang mungkin ada namun tidak bisa kita persepsikan langsung sehingga kita katakan tidak nyata? Bilangan seperti ini, yang kemudian disebut bilangan imajiner, awalnya "diciptakan" oleh para matematikawan sekadar untuk keperluan manipulasi, namun sukar sekali dibayangkan representasinya di dunia nyata dan tidak punya aspek yang bisa dikaitkan dengan apapun yang nyata. Itulah yang kemudian menghasilkan dikotomi nama bilangan riil dan bilangan imajiner. Kombinasi keduanya begitu rumit untuk dipahami sehingga disebut bilangan kompleks. Tapi, apakah memang sekompleks itu? Apa sebenarnya bilangan kompleks?

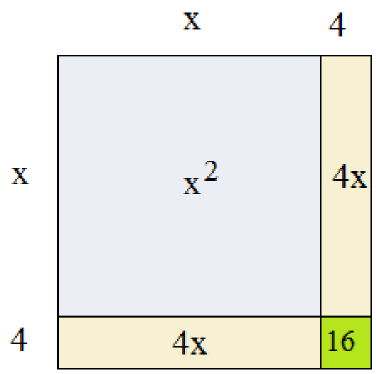
Kenapa perlu ada?

Matematika pada dasarnya terkait dengan aspek yang berbeda realita. Jika kita pikirkan kembali, kalau hanya untuk mengukur dan mencacah, bukankah kita cukup menggunakan bilangan positif? Secara alami, memang itulah yang terjadi, bilangan paling pertama digunakan adalah bilangan natural (karena itu juga dinamakan demikian), yakni bilangan dari 1, 2, dan seterusnya. Meskipun dalam perspekif matematika modern, bilangan negatif perlu dikonstruksi terlebih dahulu untuk membentuk himpunan bilangan bulat sebelum mengonstruksi bilangan rasional (pecahan). Akan tetapi, secara sejarah, kebutuhan yang muncul duluan adalah bilangan rasional. Konsep pengukuran sudah mulai berkembang jauh di awal peradaban, terutama untuk keperluan geometris yang aplikasinya mencakup konstruksi bangunan ataupun perkakas, sedangkan pengukuran sendiri bersifat kontinu dan tidaklah diskrit. Terlepas dari itu, bilangan pecahan kemudian dikembangkan untuk petunjuk posisi/ukuran yang berada di antara dua ukuran bulat. Paling tidak, bilangan rasional masih punya representasi langsung di dunia nyata. Yang menarik adalah justru bagaimana bilangan negatif muncul. Konsep pengurangan muncul hanya untuk penyelesaian aritmatika sederhana. Sebagai contoh, jika suatu kotak berisi apel diberi tambahan 3 apel maka kotak itu menjadi berisi 5 apel, maka kita akan bisa selesaikan bahwa kotak itu awalnya berisi 2 apel, karena $5 - 3 = 2$. Akan tetapi, seandainya kotak itu setelah diberi tambahan 3 apel ternyata menjadi berisi 2 apel, maka permasalahan ini menjadi tidak jelas. Apa artinya -1 apel? Secara sederhana, dalam aspek praktis, kita cukup katakan bahwa $x + 3 = 2$ tidak punya solusi, karena bilangan negatif itu tidak nyata.

Bilangan negatif baru kemudian memiliki representasi bila aspek keterhubungan bilangan dengan realita itu digeser ke aspek yang lebih konseptual. Bilangan tidak lagi merujuk ke suatu entitas atau atribut yang nyata secara fisik, namun dikembangkan agar bisa merujuk ke suatu atribut yang lebih abstrak, seperti hutang atau kekurangan. Seseorang memiliki uang sebanyak -3 keping emas, berarti ia tengah kekurangan 3 keping emas, meski keping emasnya itu sendiri memang tidak ada. Dalam perkembangan lebih lanjut, melalui orientasi geometris, bilangan negatif lebih memiliki makna yang lebih jelas dengan menunjukkan arah yang berlawanan dari suatu patokan tertentu. Bila kita mengukur jarak benda di depan kita dengan suatu bilangan positif, maka jarak benda di belakang kita menjadi bilangan negatif. Ini salah satu alasan kenapa Gauss berpendapat nama "negatif" itu kurang tepat, karena memberi kesan yang salah. Gauss mengusulkan bilangan positif dan negatif lebih baik dinamakan *direct number* (bilangan searah) dan *inverse number* (bilangan balikan), untuk menunjukkan bahwa bilangan ini merujuk pada orientasi.

Khusus untuk bilangan rasional dan irasional, probelmatikanya tidak serumit bilangan negatif, karena pada dasarnya mereka masih bisa diberi representasi langsung ke dunia nyata. Bilangan rasional hanyalah bagaimana ukuran itu terbagi-bagi (rasio). Jika jarak antara 2 bangunan adalah 5 meter, maka jika kita berdiri tepat di antara kedua bangunan, jarak kita adalah $5/2$ meter pada tiap bangunan. Sederhana. Bilangan irasional pun juga sama. Yang rumit dari bilangan irasional hanya penulisannya. Sebagai contoh, pandang bilangan $\sqrt{2}$. Dalam himpunan bilangan rasional mungkin kita sukar menemukan bilangan yang bila dikuadratkan sama dengan 2, tapi karena $1^2 = 1$, dan $2^2 = 4$, kita tahu ia ada di suatu tempat di antara 1 dan 2. Bila kita kecilkan intervalnya, misal dengan memeriksa bahwa $1.4^2 = 1.96$ dan $1.5^2 = 2.25$, tentu saja bilangan yang dikuadratkan menghasilkan 2 ada di antara 1.4 dan 1.5. Bilangan irasional uniknya kemudian menghasilkan desimal yang tak berhingga sehingga sukar dituliskan secara lengkap. Meskipun begitu, hal itu tidak mengubah fakta bahwa ia merepresentasikan ukuran yang nyata, seperti bahwa bilangan $\sqrt{2}$ adalah panjang dari sisi miring segitiga yang kedua sisi lainnya berukuran 1 atau bahwa bilangan π adalah panjang keliling lingkaran dengan diameter 1.

Masalah yang muncul dari bilangan negatif, terulang kembali ketika muncul persamaan yang mengharuskan penyelesaian di luar dari definisi bilangan yang diterima, yakni bilangan riil. Sebagaimana telah disebutkan di awal tulisan ini, contoh paling sederhana persamaan yang akhirnya memunculkan masalah $x^2 + 1 = 0$. Seperti ketika sebelumnya penyelesaian $x + 3 = 2$ tidak punya makna "riil", maka persamaan seperti itu awalnya dianggap tidak punya solusi, demikian juga $x^2 + 1 = 0$. Representasi nyata dari persamaan kuadrat adalah persegi. Suatu persegi dengan panjang sisi x akan memiliki luas x^2. Dalam penyelesaian persmaaan kuadratik bentuk umum sekalipun, kita selalu bisa gambarkan dalam bentuk gabungan persegi.



$$x^2 + 8x + 16$$

Masalah yang kemudian muncul adalah, untuk persamaan $x^2 + 1 = 0$, berarti $x^2 = -1$, yang memunculkan pertanyaan yang sama dalam problematika bilangan negatif: apa maknanya persegi yang luasnya -1? Langkah awal yang paling mudah diambil adalah menghindari masalah ini, dengan cukup mengatakan bahwa persamaan itu memang tidak punya solusi. Lagipula, dalam perkembangan selanjutnya dengan ditemukannya geometri analitik, kita tahu bahwa kurva $x^2 + 1$ memang tidak pernah menyentuh sumbu-x.

Isu ini kemudian justru menjadi masalah yang tidak bisa dihindari ketika matematikawan berusaha menyelesaikan persamaan berderajat lebih tinggi, yakni persamaan kubik. Ada cerita yang menarik di balik masalah ini, namun akan terlalu panjang untuk dituliskan di sini. Singkatnya, setelah perjalanan panjang pencarian solusi persamaan kubik, seorang matematikawan Itali, Girolamo Cardano, berhasil merumuskan formula untuk persamaan bentuk khusus $x^3 + cx = d$, yakni

$$x = \sqrt[3]{\frac{d}{2} + \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{d}{2} - \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3}}$$

Kelihatan menjanjikan, bukan? Sayangnya, formula ini ternyata menemui masalah dalam beberapa kasus. Salah satunya adalah jika kita gunakan $c = -15$ dan $d = 4$, sehingga dihasilkan

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

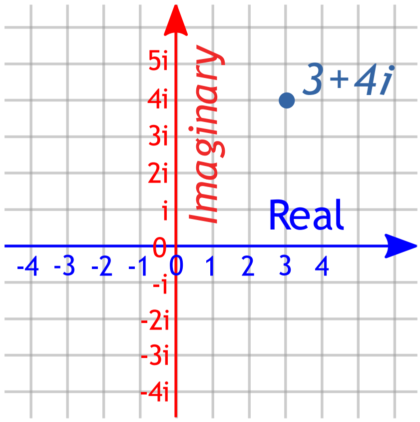
Penyelesaian ini mengharuskan akar kuadrat dari bilangan negatif, yang jelas tidak ada dalam khazanah bilangan yang diketahui. Hal ini persis seperti masalah $x^2 + 1 = 0$ yang sebenanrya solusinya menuntut $x = \pm\sqrt{-1}$. Tapi, kenapa harus pusing? Bukankah kita cukup lakukan langkah serupa seperti persamaan kuadratik? Abaikan saja masalah itu dan anggap bahwa persamaan itu memang tidak punya solusi. Sayangnya, hal ini tidak bisa dilakukan, karena persamaan itu paling tidak memang punya satu solusi. Bila kita lakukan sedikit pemeriksaan dengan mencoba beberapa bilangan, kita dapat temukan dengan mudah bahwa $x = 4$ adalah solusi dari $x^3 = 15x + 4$, namun kenapa ini tidak dapat diturunkan dari formula Cardano?

Matematikawan lain, Rafael Bombelli, mencoba melakukan suatu cara yang sebenarnya dalam sejarah sudah sering dilakukan, yakni terima saja bilangan itu apa adanya. Dalam penyelesaian $x + 3 = 2$, menerima bahwa solusinya memang ada menghasilkan $x = -1$, yang akhirnya membangun khazanah bilangan yang baru. Yang menjadi sulit adalah ketika kita berusaha mengaitkan bilangan itu dengan konsep di dunia nyata. Akan tetapi, Bombelli tidak peduli dan cukup melanjutkan perhitungan dengan memperlakukan $\sqrt{-1}$ selayaknya entitas aljabar biasa tanpa perlu memperhatikan apa maknanya, seperti x. Operasi-operasi aljabar pun tetap dilakukan dengan cara biasa. Menariknya, dengan cara ini Bombelli bisa mendapatkan solusi $x = 4$ dengan beberapa perhitungan cerdik. Akan tetapi, karena baik persamaan awal maupun solusinya sebenarnya tidak melibatkan $\sqrt{-1}$, bahkan Bombelli sendiri menganggap itu hanya trik matematis saja, tanpa ada makna tertentu di belakangnya. Meskipun kemudian aritmatika yang melibatkan $\sqrt{-1}$ kemudian terus terpakai, butuh waktu bertahun-tahun kemudian untuk akhirnya entitas ini dipandang penting untuk memiliki makna tersendiri, ketimbang sekadar alat atau trik matematis. Matematikawan terus memandang entitas itu sebagai sesuatu yang tidak nyata, hingga Rene Descartes, matematikawan perancis, menyebutnya imajiner, sebagaimana ia menyebutkan "…*sometimes only imaginary, that is one can imagine as many as I said in each equation, but sometimes there exists no quantity that matches that which we imagine*".

Dunia Khayalan

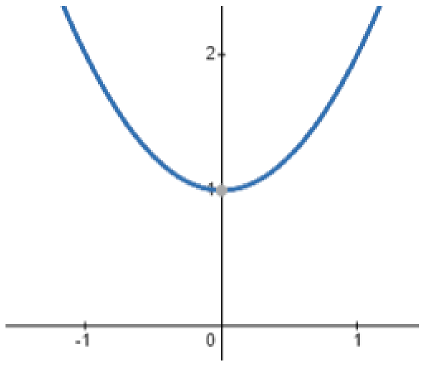
Dengan berulang kali muncul dalam berbagai kasus dan perhitungan, matematikawan mulai tidak bisa abai dengan $\sqrt{-1}$, dan perhatian lebih dalam mulai diarahkan terhadapnya. Jadi apa sebenarnya benda ini? *Well,* sebagai akibat dari Descartes, sayangnya akhirnya ia tetap disebut "bilangan imajiner", yang kemudian dinotasikan dengan i. Operasi aljabar sederhana berlaku secara normal dengan menganggapnya seakan peubah/variabel biasa selayaknya satuan di fisika, seperti bahwa $2i + 3i = 5i$. Karena dianggap satuan, maka penjumlahannya dengan bilangan riil tidak akan menjadikannya apa-apa, seperti penjumlahan bilangan riil a dengan bi tetap dituliskan $a + bi$. Bilangan gabungan ini kemudian diberi nama khusus bilangan kompleks. Perbedaan antara i dengan satuan atau variabel pada umumnya adalah ia bisa berinteraksi dengan dirinya sendiri *by definition*. Kita ketahui bahwa karena $i = \sqrt{-1}$, maka jelas $i \cdot i = i^2 = -1$, dan bila diteruskan, kita bisa dapatkan $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, dan akhirnya $i^5 = i$. Dengan 4 kali perkalian terhadap dirinya sendiri, ia akan kembali bernilai i. Kita akan lihat bahwa sifat dasar ini yang kemudian bisa menjadi inspirasi untuk pemahaman lebih dasar bilangan ini. Sebelum itu, kita perlu lihat bahwa kemampuan i untuk bisa menghasilkan bilangan riil dengan cukup operasi kuadratik menunjukkan bahwa i bukan sekadar variabel, tapi ia memang punya hubungan dengan bilangan. Pertanyaan yang kemudian lebih mendesak adalah, kalau ia bisa diperlakukan selayaknya bilangan, dimana letaknya di khazanah dunia bilangan yang sudah kita ketahui?

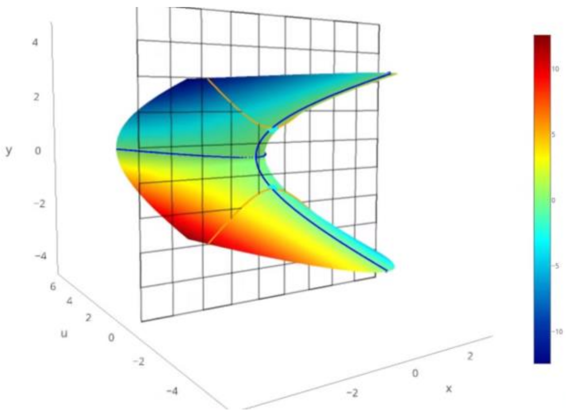
Jelas bahwa tidak ada tempat untuknya di garis bilangan. Posisi di garis bilangan biasanya dengan mudah ditentukan dari urutan (*order*) bilangan tersebut terhadap bilangan lain. Seperti ketika kita menentukan posisi $\sqrt{2}$ pada bagian sebelumnya, kita bisa lakukan dengan menentukan ia berada di sebelah kanan atau sebelah kiri bilangan apa. Masalahnya adalah, untuk hal ini, kita tidak bisa menetapkan urutan apapun. Bilangan imajiner tidak bisa dibandingkan dengan bilangan lain, paling tidak dengan definisi urutan yang standar. Pikiran logis berikutnya adalah pastinya ia berada di luar garis bilangan. Apa yang berada di luar suatu garis? Jelas, sebuah bidang. Jika kita kembali memandang i sebagai sebuah satuan yang independen dari bilangan riil, maka kita bisa pandang bahwa ada sumbu lain dengan i sebagai satuannya yang membentuk dimensi baru. Dengan ini, ketimbang melihat dunia perbilangan sebagai sebuah garis satu dimensi, kita bisa melihatnya sebagai sebuah bidang dua dimensi, yang mana salah satu sumbunya adalah garis bilangan riil. Bidang ini disebut dengan bidang kompleks, dimana setiap titik di dalamnya adalah bilangan kompleks.



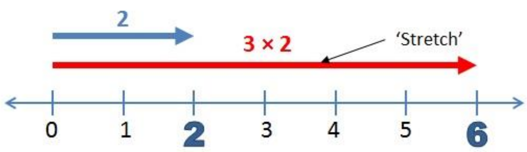
Dengan gambaran seperti ini, Gauss mengusulkan nama imajiner seharusnya diganti menjadi "bilangan lateral", karena bilangan ini menjadi sumbu vertikal dari dimensi baru bidang kompleks. Bilangan imajiner membuat seakan sumbu tambahan ini hanya buatan, atau imaninasi belaka, yang tidak sepenuhnya nyata. Padahal, bilangan ini punya banyak implikasi ke dunia nyata, meskipun mereka *hidden* atau tersembunyi. Bidang kompleks memberi gambaran bahwa sebenarnya i adalah makhluk yang berada pada di dimensi lain, sehingga hanya tidak terlihat melalui persepsi fisis yang kita bisa cerap.

Mari kita tinjau kembali persamaan $z^2 + 1 = 0$. Sekarang kita gunakan z sebagai simbol untuk variabel untuk menunjukkan bahwa sekarang kita pertimbangkan ia bernilai kompleks, dengan bentuk $z = x + iy$. Dalam kasus bilangan riil, kita bisa lihat bagaimana persamaan $x^2 + 1 = 0$ tidak punya solusi dari fakta bahwa fungsi $f(x) = x^2 + 1$ tidak memotong sumbu-x seperti gambar kiri di bawah. Jika kita kemudian meninjau dunia kompleks, maka grafik itu hanyalah potongan dari gambar yang sesungguhnya. Fungsi kompleks $f(z) = z^2 + 1$ akan punya hasil berupa bilangan kompleks juga, yang kita tuliskan $u + iv$. Karena ini pemetaan dari dua dimensi ke dua dimensi, maka kita sebenarnya butuh menggambarkan 4 dimensi sekaligus, yang salah satu caranya adalah menggambarkannya dalam 3 dimensi dan 1 dimensi sisanya direpresentasikan dalam warna. Pada gambar kanan di bawah, terlihat bagaimana z dipetakan ke u, dengan v (komponen imajiner dair hasil petanya) ditunjukkan dengan warna. Kurva parabolik pada gambar sebelah kiri itu hanya menjadi kurva irisan di gambar sebelah kanan (terlihat berwarna biru horizontal). Jelas kurva itu memang tidak memotong bidang sumbu (terlihat bidang berbentuk grid), maka solusinya tidak ada, secara riil. Namun dalam perspektif kompleks, solusi ini ada di arah yang berbeda (titik biru muda).

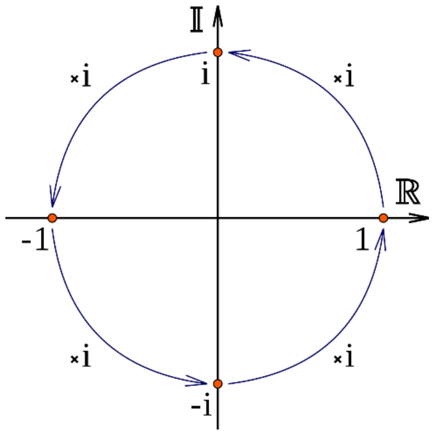




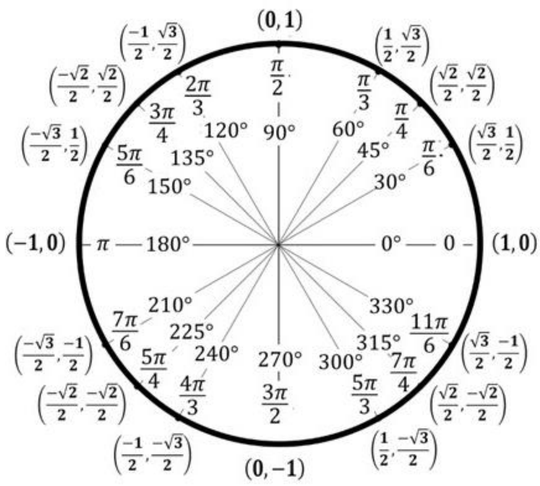
Untuk lebih memahami lagi bidang kompleks, kita kembali ke definisi dasar bilangan imajiner. Setiap operasi di aritmatika pada dasarnya terkait dengan suatu operasi geometris yang berkorespondensi. Sebagai contoh, penjumlahan dan pengurangan berkoresponensi dengan pergeseran (translasi) bilangan sepanjang garis bilangan riil. Operasi 2+3 berarti bilangan 2 bergeser sebanyak 3 ke kanan garis bilangan. Operasi lain, perkalian dan pembagian, berkorespondensi dengan penarikan (*stretch*) dan pemampatan bilangan. Operasi 3x2 berarti bilangan 2 (lebih tepatnya vektor/panah dari 0 ke 2) ditarik sampai panjangnya 3 kali lipat. Terkait perkalian atau pembagian, tanda bilangan mempengaruhi arah penarikan/pemampatannya. Ketika suatu bilangan dikalikan dengan bilangan negatif, maka arahnya berubah (berbalik arah, dari negatif ke positif atau sebaliknya), sedangkan ketika dikalikan dengan bilangan positif arahnya tetap.



Bila kita lihat kembali, kita sebenarnya bisa maknai bahwa berbalik arah itu tidak lain adalah berputar 180 derajat, dan arah yang tetap bisa berarti juga perputaran tapi lingkaran penuh alias 360 derajat. Karena kita berada di garis bilangan riil, maka dua putaran ini saja yang memungkinkan, antara maju, atau berbalik, karena tidak ada makna bila kita ingin "belok" dengan berputar sedikit. Akan tetapi, jika kita lihat definisi dari bilangan imajiner, bagaimana ia kalau dikuadratkan justru menjadi -1. Berarti seakan-akan ada suatu operasi geometris, yang bila dilakukan dua kali, membawa 1 ke -1, dan bila dilakukan 4 kali mengembalikan 1 kembali ke 1 lagi. Kita langsung bisa bayangkan bahwa ini adalah "berbalik setengah", alias berputar 90 derajat. Ke arah mana? Ya tentu karena sekarang kita sudah punya sumbu lateral imajiner, maka putaran ini akan membawa ke i. Dari i, putaran berikutnya akan sampai ke -1, dan kemudian ke i, serta terakhir kembali lagi ke 1. Putaran "antara" ini tidak terlihat di garis bilangan riil, sehingga yang bisa kita lihat adalah ketika 2 kali dilakukan, menghasilkan -1. Hanya ketika kita perkenalkan sumbu lateral ini lah kita bisa melihat "dunia lain" yang tidak terdeteksi di garis bilangan riil.



Proses di atas memperlihatkan dengan jelas kenapa $z^2 + 1 = 0$ memiliki solusi i dan $-i$, karena kita mencari suatu proses rotasi yang bila dilakukan 2 kali, menghasilkan -1. Kenapa $-i$ juga termasuk solusi? Karena perkalian dengan $-i$ setara dengan rotasi 270 derajat, sehingga melakukannya 2 kali sama saja dengan rotasi 540 derajat, alias 360 derajat (1 putaran penuh) plus tambahan 180 derajat, yang akhirnya sama-sama mencapai -1. Cara pandang ini bisa diperluas pada persamaan lainnya. Sebagai contoh, dari gambar di atas, kita bisa simpulkan juga bahwa solusi dari $z^4 - 1 = 0$ (setara dengan mencari x yang bila dikalikan 4 kali menghasilkan 1) ada 4, yakni i, -1, $-i$, dan 1. Solusinya adalah titik-titik hasil rotasi yang bila dilakukan 4 kali sama dengan putaran penuh 360 derajat, yang brarti putaran 90 derajat (i), putaran 180 derajat (-1), putaran 270 derajat ($-i$), dan putaran 360 derajat itu sendiri (1). Bagaimana persamaan dengan pangkat yang lain, seperti $z^3 - 1 = 0$ atau $z^5 - 1 = 0$? Mungkin agak sedikit *tricky*, namun bila dapat idenya, akan terlihat lebih jelas. Menerapkan cara berpikir sebelumnya, solusi dari $z^3 - 1 = 0$ harusnya adalah titik-titik yang berkorespondensi dengan rotasi 120 derajat, 240 derajat, dan 360 derajat.



Jika pada kasus sebelumnya kebetulan rotasinya mencapai tepat di sumbu, sehingga mudah menentukan nilai titiknya, maka bagaimana dengan ini? Dari sini, kita bawa lagi saja ilmu lama di SMA tentang trigonometri. Setiap sudut, akan punya korespondensi nilai sinus dan kosinus, yang bila dimaknai secara geometris dalam sebuah lingkaran satuan, bermakna berturut-turut sebagai nilai koordinat x dan y dari titik terkait (karena segitiga yang dibentuk dari titik tersebut selalu punya sisi miring sama dengan jari-jari lingkarannya, yang dalam hal ini bernilai 1). Bila kita adopsi ini ke bidang kompleks, maka koordinat x, atau nilai kosinus sudutnya, adalah komponen riil dan koordinat y, atau nilai sinus sudutnya, adalah komponen imajiner. Dengan demikian, titik bilangan kompleks yang setara rotasi 120 derajat adalah $\cos(120°) + i\sin(120°) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Dari observasi di atas, kita bisa perumum dengan mengatakan setiap bilangan kompleks sebenarnya bisa dituliskan sebagai $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ dengan r adalah jarak dari 0 (disebut juga modulus) dan θ adalah besarnya rotasi yang berkorespondensi dengan bilangan terkait (disebut juga argumen). Dalam kasus di atas, $r = 1$ karena kita bermain pada lingkaran satuan, atau pada titk-titik yang berjarak 1 dari 0.

Dari sini, kita telah melengkapi konsep kita tentang operasi aritmatika. Perkalian dan pembagian punya makna yang lebih luas sebagai sebuah rotasi **dan** penarikan. Dalam dunia bilangan riil, kita hanya bermain dengan r (modulus) karena sudut rotasi (argumen) tidak punya makna dalam dunia 1 dimensi garis bilangan riil. Bilangan imajiner membuka khazanah baru dunia bilangan yang memungkinkan operasi-operasi matematika yang lebih luas, selain juga memberi jawaban atas banyak isu-isu terkait akar negatif. Dengan melihat dunia bilangan dalam 2 dimensi, banyak teorema matematika bisa lebih jelas terungkap. Salah satunya adalah teorema dasar aljabar, yang mengatakan setiap persamaan polinom derajat n harus selalu punya akar (solusi) sebanyak n juga. Sebagai contoh, persamaan kuadrat harusnya selalu punya dua akar dan persamaan kubik harusnya selalu punya tiga akar. Di SMA kita mengidentifikasi beberapa persamaan kuadrat yang tidak punya solusi, namun pada dasarnya yang lebih tepat adalah tidak punya solusi di garis bilangan riil. Solusinya banyak tersembunyi di dimensi lain. Memang, semua ini terkesan khayalan atau buatan dalam matematika, namun adanya bilangan kompleks seperti memberi *closure* atau menutup isu-isu yang sebelumnya tidak terjawab.

Apakah ia nyata?

Pertanyaan paling natural muncul terhadap bilangan kompleks adalah, apakah ia nyata? Well, dari namanya, kita minimal bisa bilang ia tidak "riil". Jawaban utuh dari pertanyaan ini akan cukup rumit, karena pada dasarnya bilangan riil itu sendiri belum tentu "nyata" dengan semua keanehan sifat kontinuitasnya. Di sini kita cukup membatasi bahwa nyata yang dimaksud di sini adalah punya representasi aspek fisis, meski tidak eksak atau presisi (sebagai contoh, tongkat dengan panjang tepat π belum tentu ada di realita karena bilangan π punya desimal tak berulang yang tak berhingga banyaknya sedangkan pengukuran manusia di dunia nyata terbatas dan tidak bisa lepas dari ketidakpastian).

Dalam aspek atau fenomena fisis yang biasa dalam keseharian, mungkin kita tidak akan pernah bisa menemukan makna dari akar negatif. Bagaimanapun kita memandangnya, kita tidak bisa menemukan aspek riil yang punya makna langsung ke bilangan imanjiner. Matematikawan sampai menggunakan kata "imajiner" adalah bentuk frustasinya atas pencarian korelasi bilangan ini ke dunia nyata. Sayangnya, bilangan ini memang dibutuhkan untuk menyelesaikan beberapa masalah, sebagai entitas "perantara", yang muncul di tengah sebagai jembatan bagi suatu masalah untuk mencapai solusinya. Pada banyak kasus, bilangan kompleks ini sendiri bahkan menjadi bagian dari solusinya. Akan tetapi, solusi ini memang pada akhirnya hanya sebatas solusi matematis yang bersifat abstrak dan tidak punya interpertasi fisis. Bahkan, bisa dikatakan bilangan kompleks menjadi pemisah antara aljabar dengan geometri praktis, ketika awalnya keduanya sangat terkait. Penyelesaian aljabar pada awalnya tidak bisa dilepaskan dari representasi objek geometris yang memang menjadi deskripsi langsung realita. Contoh sederhana telah diilustrasikan sebelumnya bagaimana penyelesaian persamaan kuadrat bisa digambarkan dalam bentuk perhitungan luas persegi. Bahkan ketika Cardano berusaha merumuskan formula penyelesaian persamaan kubik, representasi geometri dalam bentuk kubus juga digunakan untuk membantu. Sayangnya, hadirnya akar negatif membuat aljabar harus berdiri sendiri, dengan entitas abstrak yang tidak harus punya representasi bentuk apapun. Akar negatif sama saja dengan mencari panjang sisi persegi yang luasnya negatif, yang jelas mustahil, dari definisi luas itu sendiri.

Ketika suatu permasalahan matematis memiliki solusi yang tidak murni riil, maka kita punya dua keadaan. Jika solusi ini butuh interpretasi fisis, maka solusi yang mengandung imajiner akan tertolak atau dianggap tidak ada, namun jika tidak, maka solusi imajiner akan tetap dipandang ada sebagai sebuah entitas matematis. Hal ini dikarenakan memang ukuran-ukuran fisis haruslah berupa bilangan riil. Sebagai contoh, dalam mekanika fluida, sebuah ukuran bernama faktor kompresibilitas (ukuran yang mendeskripsikan bagaimana suatu fluida dapat diubah volumenya dengan tekanan tertentu) dan dinotasikan dengan Z dapat dihitung melalui suatu persamaan kondisi yang berbentuk kubik. Dari teorema dasar aljabar, persamaan kubik haruslah memiliki 3 solusi. Dalam kasus ini, persamaannya selalu menghasilkan 1 solusi riil dan 2 solusi kompleks. Karena Z merupakan ukuran fisis, maka yang diterima adalah solusi riil dan 2 solusi kompleks yang lain dianggap tidak ada.

Sering kali, eksistensi bilangan kompleks memang hanya diterima di dunia abstrak matematis. Akan tetapi, hal ini terjadi karena kita berusaha memandang bilangan kompleks sebagai ukuran, selayaknya bilangan riil. Padahal, bilangan kompleks, walaupun dapat diperlakukan serupa dengan bilangan lainnya secara aljabar, memiliki aspek yang lain yang tidak dimiliki bilangan riil murni. Kita telah lihat sebelumnya bagaimana perkalian terhadap bilangan kompleks tidak hanya berarti penarikan (*stretch*), namun juga rotasi, yang direpresentasikan dengan $\sin(\theta) + i\cos(\theta)$. Jika diperhatikan kembali, bentuk seperti ini pada dasarnya memperlihatkan bagaimana rotasi itu sendiri merupakan gabungan osilasi dua komponen, yang dalam kasus ini adalah komponen riil dan komponen imajiner. Karakteristik ini, menariknya, memiliki implikasi besar dalam aplikasi bilangan kompleks.

Dalam dunia fisis, terdapat suatu fenomena atau mungkin bisa juga disebut entitas, yang bisa dikatakan ada dimana-mana. Entitas ini adalah gelombang. Dalam matematika, gelombang secara mendasar memang paling mudah dideskripsikan dengan fungsi sinus atau kosinus, atau lebih tepatnya kombinasi dari keduanya. Bahkan, bentuk umum dari persamaan gelombang yang merambat sepanjang x selama waktu t secara matematis selalu direpresentasikan dalam bentuk

$$\Phi = A\cos(kx - \omega t + \varphi)$$

dengan A adalah amplitude, k terkait dengan panjang gelombang, ω terkait dengan frekuensi gelombang, dan φ adalah fase dari gelombang. Kita mungkin tidak akan terlalu masuk ke detail teknis di sini, tapi bayangkan saja sebuah fungsi kosinus yang bergerak merambat dengan kerapatan dan ketinggian tertentu. Bentuk ini bisa juga dituliskan dalam sinus, yang sebenarnya adalah bisa disebut sebagai pasangan komplementer dari kosinus (lebih tepatnya kalau $\varphi = \pi$ atau 90°, kosinus itu dapat berubah menjadi sinus). Kedua komponen ini bahkan terkadang hadir secara bersamaan sehingga seringkali ditulis dalam satu persamaan. Di sisi lain, dalam matematika terdapat sebuah formula anggun yang begitu efektif meringkas perhitungan dan notasi bernama formula Euler:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Dengan formula ini, perhitungan yang terkait kosinus dan sinus tadi lebih bisa secara efektif dilakukan dengan pangkat dari e. Formula ini kemudian sering dimanfaatkan sebagai representasi alternatif atas persamaan gelombang, yakni $\Phi = \Phi_0 e^{i(kx-\omega t)}$, bentuk yang lebih ringkas dibandingkan formula sebelumnya. Kita mungkin kemudian bertanya, kenapa tiba-tiba ada bilangan imajiner muncul di sana? Bilangan kompleks, dengan sifat yang dimilikinya, sering digunakan di matematika hanya sebagai representasi, baik untuk tujuan efektivitas atau memang ada aspek lain yang ingin dilihat. Terlebih lagi, dalam kasus gelombang, formula Euler sangat membantu. Bahkan, dalam tinjauan yang lebih dalam, fungsi fundamentalnya justru adalah rotasi, sedangkan sinus dan kosinus hanyalah bayangan atau proyeksinya ke salah satu sumbu. Meskipun kita mengenal sinus atau kosinus ketika sekolah hanya sebagai rasio atau perbandingan sisi segitiga dengan sudut tertentu dalam konsep trigonometri, keduanya adalah terkait erat dengan konsep yang lebih general yakni rotasi vektor, yang disimbolkan melalui konsep bilangan kompleks. Gelombang, dengan demikian, selalu dapat dilihat sebagai proyeksi dari suatu rotasi yang terjadi dalam ruang kompleks. Komponen imajinernya sebenarnya selalu ada, namun tidak dapat kita lihat dalam bentuk fenomena fisis. Ini tentu tidak menutup kemungkinan bahwa komponen imajiner dari rotasi itu memiliki representasi tertentu yang saat ini belum kita temukan dan ketahui.

Bentuk umum gelombang di atas, implikasinya pun banyak di dunia fisis. Seperti yang kita ketahui, gelombang ada dimana-mana. Dalam analisis sinyal misalnya, persamaan gelombang di atas menjadi batu bata mekanisme canggih di matematika yang dikenal dengan transformasi Fourier. Transformasi ini mengubah suatu sinyal sepanjang waktu ke dalam dimensi frekuensi, sehingga bisa dianalis berdasarkan distribusi frekuensinya. Jelas, transformasi Fourier melibatkan bilangan kompleks, tapi tentu saja ketika melakukan analisis frekuensi sinyal, yang dilihat cukup komponen riilnya. Meskipun berasal dari analisis sinyal, aplikasi transformasi Fourier merentang sangat luas, dari penyelesaian persamaan diferensial, desain sirkuit elektronik, sampai ke pemrosesan gambar digital. Bahkan khusus untuk analisis sinyal sendiri aplikasinya bisa sangat beragam karena transmisi informasi sekarang sangat didominasi dalam bentuk sinyal elektromagnetik.

Hal yang lebih menarik lagi adalah, bilangan imajiner muncul secara eksplisit di salah satu persamaan paling terkenal di fisika, yakni persamaan Schrodinger. Sampai awal abad ke-20, partikel dan gelombang masih dianggap dua entitas yang berbeda. Partikel, seperti benda-benda yang kita dapat pegang, punya atribut posisi dan kecepatan, sedangkan gelombang, seperti cahaya, punya atribut panjang gelombang dan frekuensi. Gelombang tidak punya "posisi" atau "kecepatan", demikian juga sebaliknya. Mendekati awal abad ke-20, semakin banyak eksperimen yang memperlihatkan bahwa partikel juga punya sifat gelombang dan juga sebeliknya. Konsep ini dikenal dengan dualisme partikel-gelombang. Untuk membangun basis teoretis dari konsep ini, dinamika partikel harus dapat dituliskan dalam bentuk persamaan gelombang, yang bentuk umumnya seperti yang kita lihat di atas. Erwin Schrodinger, ketika berusaha melakukan ini, menghasilkan persamaan diferensial berbentuk

$$\hat{H}\psi(t) = i\hbar\frac{\partial\psi(t)}{\partial t}$$

yang terang-terangan memperlihatkan bilangan imajiner di dalamnya. Dengan ini, maka solusi fungsi gelombang ψ pun akan bernilai kompleks, namun apa maknanya?

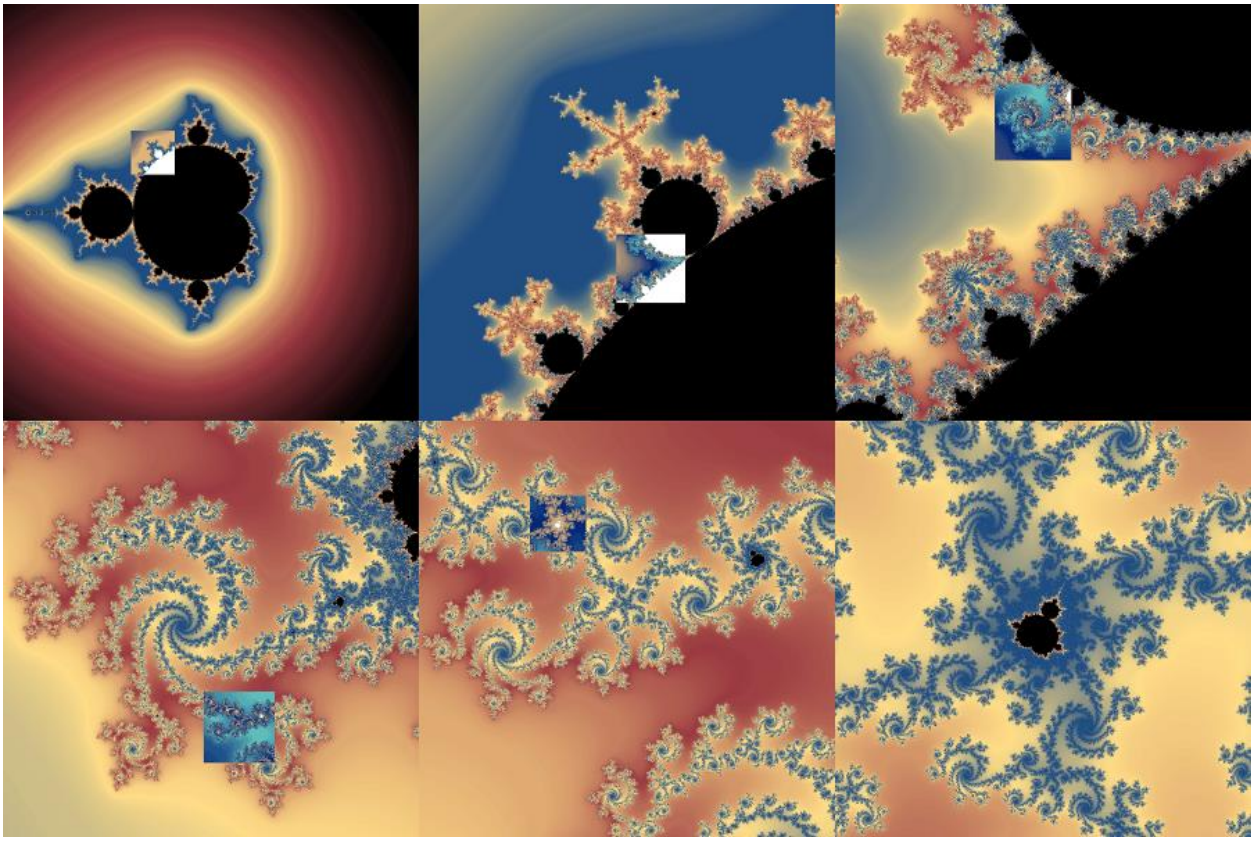
Sayangnya, Schrodinger menurunkan persamaan ini tanpa menyebutkan apa sebenarnya gelombang yang dimaksud di sini. Makna sesungguhnya ψ bergantung dari interpretasi terhadap mekanika kuantum, sesuatu yang sebenarnya murni spekulasi dan kesepakatan. Interpertasi yang umum dipegang sekarang adalah interpretasi Copenhagen, yang mengatakan bahwa fungsi gelombang ψ adalah kumpulan informasi statistik dari sistem terkait. Dengan itu, yang dilihat adalah modulus dari ψ yang jelas bernilai riil (ingat lagi bahwa modulus adalah jarak bilangan kompleks dari 0) dan kuadrat dari modulus ψ dianggap sebagai distribusi peluang lokasi elektron (atau partikel umum) dalam sistem. Sekali lagi, ketika dikaitkan dengan realitas fisik, maka yang dilihat selalu aspek riilnya, yang dalam hal ini dalam bentuk modulus. Bilangan Imajiner selalu dihindari dalam korespondensi ke dunia fisis. Ia hanya diizinkan ada di dunia matematis, yang dalam hal ini termanifestasi dalam persamaan Schrodinger.

Selain contoh fundamental yang terkait gelombang ini, masih banyak masalah fisis yang melibatkan dan memerlukan bilangan imajiner untuk dapat diselesaikan. Dengan semua aplikasi dan contoh yang ada, apakah bilangan imajinernya sendiri muncul dalam realita? Tidak pernah. Bilangan imajiner seperti portal ke dunia lain yang bisa membantu kita untuk "melompat" di realita. Hal ini sebenarnya merupakan ciri khas entitas matematika secara umum, yang berada di dunia abstrak platonik yang tidak punya representasi langsung realitas fisik, namun punya korespondensi dan pengaruh besar padannya.

Beyond complex

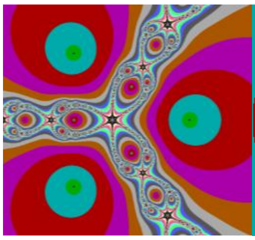
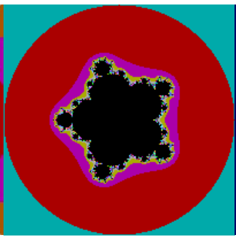
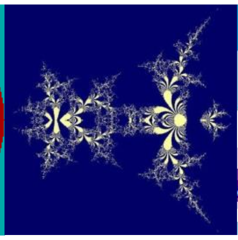
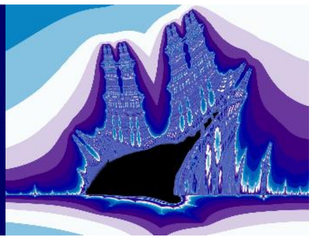
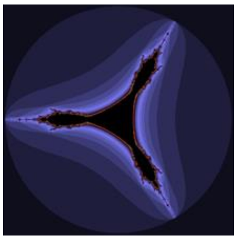
Nama bilangan kompleks mungkin tidak terlalu bisa dimaknai hanya dari definisinya. Tentu pada masanya, bilangan itu memang terlalu "kompleks" untuk dipahami. Eksistensi dari bilangan imajiner sendiri sudah sangat kontra intuitif, apalagi memaknai gabungan yang riil dan imajiner sebagai satu kesatuan bilangan. Nama bilangan kompleks memang diberikan langsung oleh Cardano sendiri ketika mencari solusi persaman kubik, yang seperti kita telah lihat sebelumnya, cukup 'kompleks'. Akan tetapi, ketika melihat bilangan ini seperti halnya entitas aljabar lainnya, ya memenuhi suatu struktur tertentu yang sebenarnya mudah untuk dipahami. Bilangan ini terlihat kompleksitas yang sesungguhnya justru ketika didalami lebih lanjut dimana ditemukan banyak sekali sifat-sifat yang kontraintuitif. Kita tidak akan bahas itu semua karena kajian tentang bilangan kompleks menghasilkan bidang tersendiri di matematika bernama analisis kompleks, yang isinya jauh lebih rumit dari yang bisa kita duga.

Salah satu kompleksitas yang muncul dari bilangan kompleks adalah kemampuannya untuk menghasilkan struktur fraktal, yang tidak muncul di sistem bilangan yang lebih sederhana. Fraktal adalah bentuk geometris yang memiliki struktur rinci pada beragam skala. Terkadang struktur rinci ini bahkan berulang. Dengan kata lain, fraktal selalu memiliki struktur tertentu yang bila diperdetail sampai skala yang kecil pun, struktur ini akan terus terlihat. Fraktal dapat muncul melalui konstruksi rekursif pada bentuk geometri sederhana seperti kepingan salju Koch atau segitiga Serpinski. Akan tetapi, menariknya, struktur ini seperti natural terjadi di bidang kompleks. Salah satu fraktal yang cukup mengejutkan sekaligus mengagumkan adalah fraktal Mandelbrot. Fraktal ini dihasilkan hanya dengan sebuah fungsi sederhana: $f(z) = z^2 + c$ dengan c adalah sembarang bilangan. Dalam pandangan bilangan riil, ini fungsi seperti ini hanya akan menghasilkan sebuah kurva parabolik. Ketika fungsi ini diiterasikan melalui pemetaan: $z_n \to z_n + c$, fungsi ini akan menghasilkan sebuah barisan, yakni z_0, z_1, z_2, ... dimana $z_1 = z_0^2 + c$, $z_2 = (z_0^2 + c)^2 + c$, dan seterusnya. Barsan ini, bila dipandang hanya dalam garis bilangan riil, hanya akan menghasilkan pola terus membesar atau terus mengecil, tergantung nilai z_0 awal. Sebagai contoh, jika $c = 0$, maka pemetaan tersebut seperti kuadrat berulang, yang jelas akan menuju 0 jika z_0 awal kurang dari 1 dan menuju tak hingga jika lebih dari 1. Pola yang sama sebenarnya berlaku juga dalam perspektif bilangan kompleks, namun uniknya ini bisa menghasilkan hal lain. Apabila kita tetapkan $z_0 = 0$ dan kemudian mendata setiap nilai c selagi mengidentifikasi kapan pemetaan itu menuju tak hingga (divergen), dan kapan tidak (terbatas). Setiap nilai c yang menghasilkan pemetaan yang terbatas ditandai dan dikelompokkan sebagai suatu himpunan. Ia dinamakan himpunan Mandelbrot.



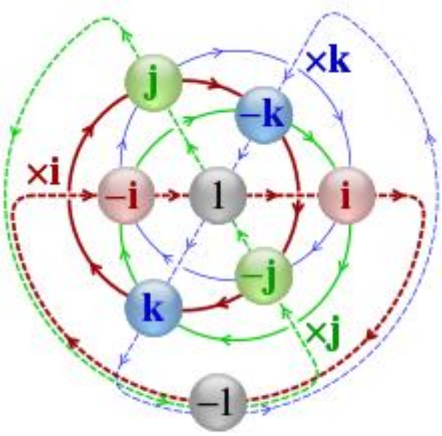
Apa menariknya himpunan Mandelbrot? Menyebutkan semua ke-luarbiasa-annya mungkin akan terlalu panjang, namun salah satu yang paling utama adalah struktur fraktalnya. Ketika himpunan Mandelbrot diperbesar terus, maka bentuk yang sama akan muncul lagi. Gambar di atas adalah bagaimana perbesaran bertahap ini terjadi. Pada gambar itu, himpunan Mandelbrot ditandai dengan warna hitam, adapun warna lain digunakan untuk mengelompokkan tingkat divergensinya. Warna-warna lain ini sendiri pun membentuk pola yang mengagumkan!

Himpunan Mandelbrot adalah satu contoh dari fraktal yang dihasilkan bilangan kompleks. Ada banyak contoh lainnya bagaimana perhitungan tertentu di bidang kompleks menghasilkan Fractal. Beberapa di antaranya adalah fraktal *Newton*, *Multibrot*, *Power Tower*, *The Burning Ship*, dan *Tricorn/Mandelbar*, yang secara berturut-turut diperlihatkan pada gambar di bawah dari kiri ke kanan.

Sampai saat ini, struktur fraktal adalah yang paling sukar dimaknai. Matematikawan bisa dengan mudah mengeksplorasi dan menganalisis semua sifat-sifatnya, rasionalisasi di baliknya, dan segala macam manipulasinya. Akan tetapi, kenapa bisa terbentuk fraktal dan mencerminkan apa sebenanrya ia, tidak ada yang tahu. Bentuk mirip fraktal memang ada di dunia nyata, seperti percabangan delta, brokoli, beberapa daun tipe paku, dan lain lagi, meskipun kerincian strukturnya memang terbatas. Akan tetapi, semua fraktal alami itu sangat jauh dengan apa yang diperlihatkan fraktal kompleks, yang entah kenapa bisa meledakkan pikiran. Dengan fraktal sendiri sudah cukup aneh dengan gabungan mengagumkan sekaligus membingungkan, apakah bilangan kompleks sudah menjadi pelengkap final dari sistem bilangan?

Bukan matematika kalau tidak eksplorasi lebih jauh lagi ke dunia abstrak. Bilangan kompleks sendiri sudah cukup aneh bila dipandang dari perspektif reaitas. Bila bilangan imajiner i mengekstensi bilangan riil dengan adanya dimensi tambahan, maka kenapa kita berhenti di satu tambahan dimensi saja? Dalam perkembangan matematika modern, untuk kebutuhan analisis di ruang dimensi tiga, bilangan kompleks diekstensi bahkan sampai ke 4 dimensi. Ekstensi ini bernama quaternion. Ketimbang melihat satu dimensi imajiner, quaternion memiliki tiga dimensi imajiner, yang bisa dinotasikan sebagai **i**, **j**, dan **k**. Seperti bilangan imajiner biasa, ketiganya jika dikuadratkan menghasilkan -1. Sifat tambahan yang mereka miliki adalah perkalian antara mereka membentuk sebuah siklus, yakni **i** x **j** = **k**, **j** x **k** = **i**, dan **k** x **i** = **j**. Jika sudah bisa membayangkan bagaimana bilangan kompleks memperluas *realm* bilangan ke dua dimensi, maka quaternion bisa dibayangkan dengan cara yang sama namun langsung ke empat dimensi, dimana setiap titiknya ditulis dalam bentuk $a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$. Bilangan riil, tentu saja tetap merupakan bagian dari quaternion, namun hanya sebagai salah satu sumbunya saja, seperti halnya di bidang kompleks. Lebih jauh lagi, bahkan a, b, c, dan d dalam notasi quaternion tidak harus bilangan riil, tapi juga bisa diekstensi ke bilangan kompleks. Dalam kasus ini, bilangan yang dihasilkan disebut biquaternion.



Tidak berhenti sampai di situ, ide konstruksi quaternion kemudian diaplikasikan ulang untuk menghasilkan bilangan yang lebih luas lagi. Wait, untuk apa? Di sinilah salah satu batas dimana matematikawan bergerak lepas tanpa peduli lagi dengan realita. Ini tentu tidak berarti lantas secara pasti kita bisa katakan entitas-entitas abstrak ekstensi di matematika memang tidak akan ada hubungannya dengan realitas. Yang lebih tepat adalah, kita belum tahu. Ekstensi quaternion dalam hal ini dapat dilanjutkan langsung ke 8 dimensi. Kenapa langsung meloncat? Karena ada struktur dan konsistensi tertentu yang dipertahankan sehingga tidak memungkinkan menghasilkan bilangan imajiner ekstensi ke 5, 6, atau 7 dimensi. Ekstensi ini kemudian disebut dengan nama *oktonion*. Semua sifat yang dimiliki persis sama, yakni semua komponen imajinernya menghasilkan -1 bila dikuadratkan dan perkalian antar bilangan imajinernya membentuk siklus. Lebih jauh lagi, kita bisa ekstensi lagi oktonion ke 16 dimensi, yang kemudian diberi nama *sedenion*. *Well,* secara logika, ini memang bisa terus dilanjutan, melalui proses yang dikenal dengan konstruksi Cayley-Dickson, yang memungkinkan konstruksi sistem bilangan dengan dimensi 2^n. Dalam hal ini, sistem bilangan selanjutnya yang bisa dionstruksi adalah dimensi 32 dan 64. Akan tetapi, ada batas juga dimana matematikawan sudah cukup melihat pola dan akhirnya tidak secara brutal meneruskan abstraksi. Jika hasil abstraksi itu tidak menghasilkan sifat-sifat yang unik dan menarik, maka ia tidak pantas untuk diteliti lebih lanjut. Meski demikian, tentu saja itu tidak menghalangi mereka yang mungkin terlalu penasaran hingga akhirnya tetap melanjutkan. Ekstensi sistem bilangan ke dimensi 32 sudah ada yang meneliti dan dinamakan *trigintaduonion* (bahkan menyebut namanya saja sulit). Semua sistem bilangan ekstensi ini, dari quatenion sampai trigintaduonion atau sistem lain dengan dimensi yang lebih tinggi, dinamai khusus sebagai hiperkompleks.

Pada akhirnya, proses ini akan kembali seperti semua aspek matematika lainnya, dimana akan selalu ada wilayah abstrak tempat matematikawan bermain dan eksplorasi meskipun hubungannya dengan realitas sudah tak terlihat lagi. Khusus ekstensi bilangan kompleks sendiri, yang dilihat lebih ke strukturnya, ketimbang secara spesifik ke bilangan itu sendiri. Di sisi lain, analisis kompleks pun juga merupakan cabang matematika yang terus berkembang, dengan aplikasi yang juga terus hadir di fisika ataupun perteknikan. Satu hal yang bisa kita pelajari paling tidak dari bilangan kompleks, bahwa yang tak terlihat tidak berarti tidak bisa mempengaruhi. Bilangan imajiner berada di luar dimensi riil, tapi ia merupakan satu bagian utuh semesta kompleks, yang akhirnya apa yang terjadi di dimensi imajiner, tetaplah berpengaruh pada yang riil. Matematikawan menghabiskan waktu begitu lama menolak dimensi itu, menganggap segala sesuatu harus menjadi bagian dari realitas yang bisa kita cerap dan maknai. Alhasil, melepaskan diri dari realitas fisik sepenuhnya justru membuka khazanah baru kebenaran. Apa yang kita lakukan di dunia imajiner, meskipun tidak terlihat, pada akhirnya akan kembali menjadi solusi untuk yang riil.

(PHX)

Seberapa Benar Statistik?

“Berbicaralah dengan data”, kata seseorang. Kalimat serupa banyak bermunculan akhir-akhir ini, meski sebenarnya ia bukanlah kalimat yang basi. Setiap kali seseorang membuat keputusan, memberi pernyataan, atau mengambil Tindakan, selalu yang dituntut adalah data yang mendukung setiap hal tersebut, di pemerintah, di dunia akademik, hampir dimanapun. Bahkan, terkadang itu seperti sudah menjadi hal yang heuristik, menancap seakan kata kunci, yang akan membuat setiap orang cenderung segera mengafirmasi apapun yang mengikutinya. Mulailah dengan data, seaneh apapun itu, maka alam bawah sadar seakan langsung membiarkan kalimat yang mengikuti masuk sebagai sebuah hal yang pantas diterima. Apa hebatnya data sehingga selalu bisa menjadi alasan yang dianggap kuat oleh semua orang?

Yang Pasti adalah Ketidakpastian

Berbicara dengan data bukanlah jargon kekinian, karena data sudah menjadi standar pembuktian pada hampir semua bidang keilmuan, eksak ataupun sosial. Mungkin, hanya matematika dan seni yang tidak butuh data. Tentu, karena matematika adalah ilmu yang hanya membutuhkan aturan logika untuk berbicara benar dan salah, sedangkan seni tidak berurusan dengan benar dan salah. Mayoritas ilmu berdiri di atas realitas, sehingga berkata sesuatu itu benar atau salah harus berdasarkan realitas, dan data pada hakikatnya adalah representasi dari realitas. Itu klise. Bahkan kita dapat mengatakan bahwa “hari ini hujan” adalah suatu hal yang benar karena kita dapat secara langsung melihat realitas dengan data yang dicerap mata kepala sendiri, bahwa telah turun hujan di atap rumah kita.

Sayangnya, realitas bukanlah objek yang sederhana, dan alat untuk mencerap realitas itu terbatas. Adalah suatu hal yang pasti bahwa sepanjang hidup, pada dasarnya kita selalu berurusan dengan informasi yang tak pernah lengkap. Akan tetapi, yang menyedihkan adalah kita butuh informasi untuk bisa memutuskan sesuatu, sehingga sebenarnya setiap orang, sadar atau tidak, selalu berpikir, meyakini, berpendapat, menjawab, memilih, atau bertindak dengan menerka-nerka. Ya, kita adalah peramal! Tidak ada hal yang kita ketahui selain bersumber dari ketidakpastian. Untungnya, kita adalah peramal yang jenius, sehingga daripada mengeluh dan pasrah pada ketidakpastian dan ketidaklengkapan informasi, kita bisa atur ketidakpastian itu sehingga kita bisa “cukup yakin” bahwa sesuatu itu benar. *Well*, terlalu naif memang berharap dapat selalu mengatakan sesuatu itu benar dengan keyakinan 100 persen, sebagaimana kita sebagai manusia memiliki banyak keterbatasan.

Bagaimana caranya? Kita terima ketidakpastian itu sebagai hal yang tak mungkin kita singkirkan sebagaimana kita memang harus menerima banyak kepahitan dalam hidup ini, dan jadikan ia sebagai bagian dari informasi. Itulah statistika! Salah satu kehebatan statistika adalah dapat memberi pernyataan yang tegas lengkap dengan jaminan ketidakpastiannya. Ketimbang mengatakan bahwa "saya tahu bahwa A benar", kita dapat mengatakan "saya yakin sekian persen bahwa A benar".

Statistika merupakan ilmu yang begitu perkasa sehingga mayoritas ilmu bersandar olehnya. Ya, ketika dikatakan "berbicara dengan data" maka sesungguhnya yang dimaksud adalah "berbicara dengan statistik." Karena data tanpa statistik hanya informasi biasa tak berguna yang penuh ketidakpastian. Hanya dengan statistik, ketidakpastian itu sendiri menjadi informasi penguat. Dengan statistik, seorang mikrobiolog tidak perlu mencobakan suatu vaksin baru ke setiap manusia untuk secara yakin bisa mengatakan bahwa vaksin itu bekerja dengan baik, seorang meteorolog tidak perlu menunggu esok hari untuk bisa cukup yakin mengatakan bahwa besok akan turun hujan, seorang calon legislatif tidak perlu bertanya pada setiap rakyat Indonesia untuk bisa cukup yakin mengatakan bahwa ia akan terpilih lagi pada pemilu berikutnya. Namun ingat, bahwa mereka semua hanya "cukup yakin", sehingga selalu ada ruang ketidakpastian yang diterima dengan ikhlas dan tulus pada setiap pernyataan statistik yang diberikan.

Matematika adalah solusi

Bagaimana statistik melakukannya? Terlebih lagi, realitas bukan hanya sekadar kompleks, namun kita sebagai manusia merupakan subjek dari sekian banyak bias. Apapun instrumen yang digunakan untuk mengekstrak data dari realitas, pasti akan selalu ada kontaminasi dari manusia yang melakukannya, sebagaimana dua orang yang berbeda melihat fakta yang sama akan mendapatkan informasi yang berbeda.

Rumitnya realitas ini mau tidak mau harus disederhanakan dengan dibawa ke wilayah yang bersih dari bias dan ketidakpastian. Ya, wilayah yang rigid, pasti, jelas, dan tegas. Wilayah yang kita kenal dengan matematika. Secara umum, utilitas matematika sedari awal adalah proyeksi formal dari realita. Begitu banyak permasalahan diselesaikan dengan cara dibawa terlebih dahulu ke wilayah ini, sebelum kemudian balik diinterpretasi ulang ke realitas. Itulah kenapa salah satu orang tua dari statistika adalah matematika, karena perangkat-perangkat penyelesaian yang digunakan oleh statistika berbasis pada matematika. Saya sebut salah satu, karena statistika berdiri di banyak fondasi, sehingga banyak yang kemudian juga menolak bahwa statistika adalah cabang dari matematika.

Untuk bisa dimanipulasi oleh matematika, maka realitas harus dapat direpresentasikan dengan angka. Untuk itu realitas kemudian diekstrak terlebih dahulu menjadi sebuah set data, yang tentu saja, harus berupa angka, atau dengan kata lain kuantitatif. Segala bentuk data yang tidak berupa angka hanya bisa dianalisis secara kualitatif dan matematika tidak akan mengurusi itu. Sayangnya, analisis kualitatif, meskipun bisa menjaga kompleksitas, rentan terhadap banyak bias dan sukar digeneralisasi. Itulah kenapa analisis kuantitatif yang sangat populer, karena siapa yang tidak setuju bahwa satu ditambah satu sama dengan dua?

Mengekstrak data kuantitatif sayangnya tidak semudah itu untuk dilakukan, karena banyak hal di dunia ini tidak terukur. Misalnya, bagaimana kita mengukur kemajuan ekonomi, kepuasan masyarakat, atau sesederhana seberapa berhasil sekolah mendidik anak? Semua itu merupakan entitas, indikator, variabel, yang sifatnya kualitatif sehingga tidak dapat diukur langsung seperti tinggi badan, jarak tempuh, rentang waktu, atau variabel kuantitatif lainnya. Maka dari itu, haruslah dirumuskan suatu metrik, atau ukuran, yang diharapkan menjadi representasi terdekat dari variabel kualitatif. Metrik ini banyak bentuknya, dari yang sederhana sampai yang harus diukur dengan sangat rumit. Untuk melihat kemajuan ekonomi, para ekonom menggunakan metrik berupa PDB (Produk Domestik Bruto). Untuk melihat keberhasilan sekolah atau perguruan tinggi mendidik, digunakan metrik berupa nilai ujian atau IPK. Untuk melihat baik tidaknya proporsi tubuh seseorang, maka dijadikan IMT (Indeks Massa Tubuh) sebagai metrik. Bebrapa metrik bahkan tidak butuh rumusan spesifik, yakni hanya pengukuran langsung dari suatu variabel kuantitatif, seperti kesehatan penggunan gawai dapat diukur dari metrik berupa durasi penggunaan gawai dalam sehari.

Ketika suatu metrik telah ditentukan, maka barulah kemudian dilakukan semua pengukuran yang terkait untuk didapatkan suatu data kuantitatif. Data-data ini kemudian siap diolah sebagai bahan mentah oleh statistika untuk menghasilkan banyak kesimpulan sesuai keperluan. Secara umum, statistika akan menggunakan data kuantitatif untuk dua hal, yakni sekadar untuk mendapatkan gambaran holistik dari metrik yang digunakan, atau untuk mendapat kesimpulan berupa prediksi, atau pembuktian. Yang pertama dikenal dengan statistika deskriptif, dan yang kedua dikenal dengan statistika inferensial.

Apa Gunanya Data?

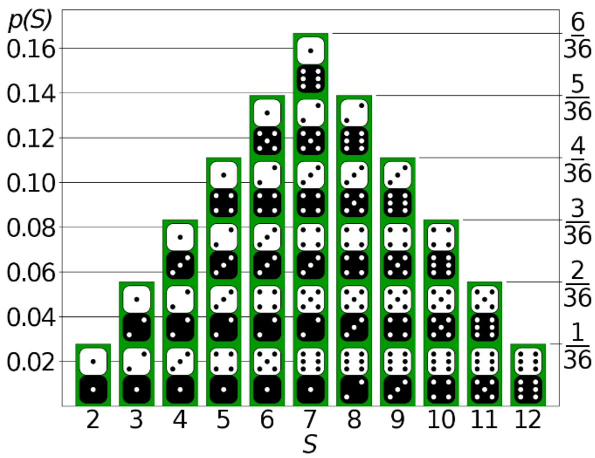
Statistika deskriptif sebenarnya tidak rumit, ia hanya menghitung metrik-metrik tambahan untuk mengkuantifikasi gambaran utuh set data, dari metrik yang sesungguhnya. Metrik tambahan ini secara umum dapat dibagi dua, yakni metrik yang dapat memperlihatkan pusat dari data, dan metrik yang dapat memperlihatkan sebaran dari data. Kenapa kita perlukan dua ini? Bayangkan anda merasakan gempa, maka apa informasi penting pertama yang dibutuhkan terkait gempa itu? Ya, episentrum gempanya, karena dari situ kita memiliki gambaran area yang terdampak kira-kira berada di sekitarnya. Berhubung perambatan gempa relatif seragam, maka kita tidak butuh metrik sebaran.

Metrik pusat menggambarkan data-data itu akan relatif berkumpul dimana. Metrik pusat yang sering digunakan adalah mean (rata-rata), median (nilai tengah), dan modus (nilai terbanyak muncul). Metrik sebaran sendiri menggambarkan seberapa jauh data itu merentang dari pusat. Metrik ini antara lain simpangan baku, rentang interkuartil, nilai minimum dan maksimum, dan kecondongan (*skewness*). Meskipun banyak bentuknya, metrik yang paling umum adalah pasangan rata-rata dan simpangan baku. Jarang laporan statistik yang bersifat publik lengkap mencantumkan setiap metrik dari statistika deskriptifnya.

Dengan metrik-metrik deskriptif ini, kita bisa mengetahui gambaran utuh dari metrik ukuran yang sesungguhnya. Misal, mengetahui rata-rata nilai matematika di suatu kelas akan memperlihatkan kualitas pengajaran matematika di kelas tersebut.

Statistika inferensial melakukan lebih dari itu. Data-data yang diperoleh dari realitas, dibagi dengan total setiap nilainya, akan menghasilkan frekuensi relatif dari setiap data. Misal ada data berat 3 anak, yakni 25, 30, dan 24. Data ini bisa diubah berbentuk frekuensi relatif dengan membagi setiap datanya dengan sehingga menjadi 0.316, 0.38, dan 0.304. Data berupa frekuensi relatif ini membentuk apa yang disebut dengan distribusi peluang, yang secara intuitif bisa diartikan fungsi yang memetakan setiap nilai data ke peluang untuk mendapatkan data tersebut. Dalam konteks 3 data tadi, berarti distribusi yang kita punya memperlihatkan bahwa ketika kita ambil data lain maka 31.6 persen kemungkinan kita dapatkan nilai 25. Salah satu alasan kenapa data yang kita miliki harus diubah menjadi frekuensi relatif adalah karena kita ingin mendapatkan distribusi peluangnya.

Untuk lebih dapat membayangkan, salah satu contoh distribusi peluang yang sederhana adalah seperti gambar di bawah ini, dimana data yang dilihat adalah nilai yang muncul dari dua mata dadu yang dilempar. Dari distribusi peluang, kita dapat mengetahui seberapa mungkin suatu nilai didapatkan dari suatu data.



Distribusi peluang menjadi karakteristik dari suatu variabel, sehingga pada dasarnya banyak yang bisa disarikan dari distribusi peluang. Dari distribusi peluang, kita bisa dapatkan secara eksak seberapa mungkin suatu nilai didapatkan. Sehingga, kita bisa menguji suatu klaim atau pernyataan tertentu terkait suatu variabel, dengan melihat seberapa mungkin klaim itu benar. Misal kita telah mengetahui distribusi peluang dari IPK mahasiswa suatu perguruan tinggi. Anggap kemudian seseorang memberikan pernyataan bahwa rata-rata IPK mahasiswa di perguruan tinggi tersebut selalu lebih dari 2. Maka kita bisa periksa apakah klaim ini benar atau salah melalui statistik inferensial dengan menggunakan distribusi peluang yang kita miliki. Detail bagaimana hal ini dilakukan tentu tidak sederhana dan diluar dari lingkup tulisan ini.

Acak Berarti Benar

Jika sedikit mundur, tidakkah kemudian kita bertanya, kenapa tiba-tiba berurusan dengan peluang? Padahal, yang kita pandang sedari awal adalah nilai mentah suatu variabel kuantitatif dan itu cukup pada statistika deskriptif. Idealnya, untuk bisa mendapatkan deskripsi lengkap suatu variabel, kita tentu harus bisa memiliki seluruh data dari variabel tersebut bukan? Jika kita hanya berurusan dengan koleksi data kecil mungkin tidak masalah, seperti data siswa di suatu kelas atau data warga di suatu RT, atau data penjualan suatu kios. Akan tetapi, bayangkan jika datanya sebesar data siswa di Indonesia atau data pasien Rumah Sakit sepanjang tahun atau data penjualan suatu komoditas besar, maka tentu akan sangat repot bila harus melakukan pengukuran pada seluruh data tersebut bukan? Lagipula, jika memang bisa mendapatkan seluruh data yang dibutuhkan, tentu informasi yang didapatkan pasti lengkap kan? Kenapa butuh statistik?

Statistika adalah ilmu untuk berurusan dengan ketidakpastian, sehingga bila datanya lengkap, itu hanya perhitungan biasa dan bukan statistika. Berurusan dengan data besar selalu butuh statistika karena keterbatasan kita untuk mengakses seluruh data yang ada. Pertanyaan intinya adalah dapatkan kita mendapatkan informasi yang cukup lengkap hanya dengan sebagian porsi data dari data keseluruhan yang ada? Untuk itu, sekarang kita tidak akan menggunakan satu istilah "data", namun kita perlu bagi menjadi dua, yakni data populasi dan data sampel. Data populasi adalah data keseluruhan yang utuh, sedangkan data sampel adalah data yang merupakan porsi dari data populasi. Kenapa perlu dibedakan? Karena apa yang bisa kita dapatkan selalu adalah data sampel, sedangkan apa yang ingin kita ketahui adalah deskripsi dari data populasi. Di sinilah kekuatan sesungguhnya statistika muncul.

Karena kita hanya melihat sebagian dari data yang seharusnya, maka pada dasarnya kita tidak akan pernah bisa 100 persen yakin atas apapun yang kita simpulkan dari data sampel. Oleh sebab itulah, ketimbang mengurusi data dengan nilai mentahnya, kita lebih baik bermain dengan frekuesi relatifnya, karena ia bisa menjadi ukuran seberapa yakin kita bahwa data populasi lainnya, yang tidak masuk dalam sampel, akan bernilai seperti apa. Secara historis sendiri, statistika berkembang justru dari meja judi, yang kemudian lahir dalam bntuk teori peluang. Berhubung analisis data dengan teori peluang berurusan dengan hal yang sama, yakni ketidakpastian, lahirlah ilmu statistika yang terintegrasi.

Kita kemudian bisa memperluas konsep data, bukan hanya sebagai suatu ukuran dari suatu objek diam, tapi juga bisa merepresentasikan peristiwa (*event*). Pengambilan data tidak selalu berarti mengukur suatu nilai dari objek sampel baru, tapi juga bisa berarti pengamatan terjadinya peristiwa baru. Ketika pengambilan data dilakukan, maka kita menyebutnya dengan eksperimen. Ketika berbicara tentang data sebagai peristiwa, maka data populasinya tak terbatas. Meskipun pada beberapa data metrik biasa ada Batasan populasi (misal data suatu negara), kita asumsikan bahwa data populasi tidak akan pernah bisa terakses sepenuhnya, sehingga anggap bahwa kita hanya selalu berurusan dengan sampel.

Ekspresimen yang paling ideal tentu adalah yang tidak ada manipulasi atau bias apapun, sehingga ketika data sampel terambil, ia bisa jadi representasi yang baik data populasi. Bagaimana menjaminnya? Untuk itu kita harus punya karakteristik utama setiap eksperimen: acak! Jika kita punya bola merah dan biru dengan jumlah yang sama pada suatu wadah, maka hanya dengan sebuah eksperimen acak lah kita bisa mendapatkan peluang mendapatkan bola merah sama dengan peluang mendapatkan bola biru. Jika kita kehilangan keacakannya, misal dengan mengambil sambal mengintip isinya, maka peluangnya akan berubah. Jika peluangnya berubah, maka kita akan gagal mendapatkan gambaran proporsi bola merah dan biru yang sesungguhnya di wadah itu. Dengan kata lain, kita gagal mendapatkan data populasi.

Keacakan di sini bukan hal yang patut diremehkan. Acak adalah apa yang membuat statistika punya kekuatan kebenaran. Tanpa pola yang acak, tidak akan ada analisa statistika yang dapat dipegang, secanggih apapun modifikasinya. Keacakan eksperimen adalah "jaminan statistik" terhadap akurasi dan ketegasan kesimpulan yang dihasilkan. Secara sederhana bahkan dapat dikatakan, acak berarti benar.

Data yang didapat dari eksperimen sayangnya tidak selalu berbentuk kuantitatif, terutama bila datanyanya berupa peristiwa. Hal ini beda dengan variabel kualitatif yang bisa kita akali dengan metrik untuk membuatnya menjadi kuantitatif. Memang suatu set peristiwa tertentu bisa menjadi variabel, namun satu peristiwa tunggal itu sendiri adalah data, bukan variabel. Misal, kita miliki pelemparan koin sebagai suatu variabel yang akan diamati. Variabel ini memiliki dua kemungkinan data, yakni sisi angka atau sisi gambar. Data seperti ini perlu diubah bentuknya menjadi numerik. Untuk itu, kita cukup petakan setiap data tersebut dalam suatu representasi angka. Misal, sisi angka berarti 0 dan sisi gambar berarti 1. Representasi numerik dari hasil eksperimen acak ini disebut sebagai variabel acak.

Variabel acak merupakan objek sentral dalam statistika, seperti manusia yang merupakan objek utama sosiologi, molekul yang merupakan objek utama kimia, atau benda langit yang merupakan objek utama astronomi. Variabel acak juga yang menjadi pintu masuk statistika dari dunia nyata ke dunia matematika. Perhitungan statistika, baik deskriptif ataupun inferensial, semua berpusat pada variabel acak.

Variabel acak pada dasarnya bersumber dari ruang sampel, atau himpunan yang berisi semua kemungkinan hasil elementer dari suatu eksperimen acak. Banyaknya nilai yang bisa mengisi suatu variabel acak selalu bergantung dari banyaknya isi ruang sampel. Misal, pelemparan 1 dadu memiliki ruang sampel berukuran 6, sehingga nilai variabel acaknya cuma ada 6 kemungkinan. Berhubung isi ruang sampel adalah semua kemungkinan hasil eksperimen, maka setiap nilai variabel acak pun memiliki nilai peluang kemungkinan hasil eksperimen itu dicapai. Ketika peluang-peluang setiap kemungkinan nilai variabel acak ini dikumpulkan, dihasilkan lah suatu distribusi peluang. Variabel acak bersama distribusi peluangnya disebut sebagai model statistik.

Melihat yang Besar dari yang Kecil

Sebelum berlanjut, mari kita coba tinjau kembali istilah acak. Tidakkah acak merupakan suatu hal yang sangat ideal, jika tidak bisa disebut utopis? Untuk bisa mendapatkan hasil eksperimen yang benar-benar acak bukanlah hal yang mudah, namun di sinilah gerbang awal ilmu statistik. Jika eksperimen yang dimaksud berupa pengamatan peristiwa, maka menjamin ia acak cukup dengan memastikan peristiwa itu berlangsung tanpa perlakuan apapun yang disengaja. Permasalahannya adalah ketika eksperimen itu berupa pengumpulan data kuantitatif suatu metrik, seperti survey pemilihan umum. Terlebih lagi ketika pemilik datanya adalah manusia, yang tidak tersebar secara merata, maka memilih manusia seacak mungkin bukan hal yang mudah. Padahal, gagal mendapatkan data acak akan menghasilkan kesimpulan yang kurang tepat di akhir.

Banyaknya kemungkinan bias dalam pengambilan data ini membuat statistika sangat bergantung pada teknik *sampling* yang tepat. Sampel yang baik bergantung pada jumlah data yang disampel dan keacakan sampelnya, Mengenai jumlah, Statistika sudah berkembang sedemikian rupa sehingga penentuan jumlah sampel dari suatu populasi dengan jumalh tertentu dapat dihitung. Yang cukup sulit di sini adalah menjaga kualitas keacakan sampelnya. Sampel paling ideal, atau sering disebut dengan istilah sampel acak sederhana, adalah sampel dengan paling tidak dua kriteria, yakni tanpa bias dan independent. Tanpa bias berarti setiap unit dari populasi terkait memiliki peluang yang sama untuk terambil. Independen berarti pemilihan sebuah unit tidak mempengaruhi pemilihan unit lainnya. Sayangnya, di dunia nyata, sampel acak sederhana sulit, bahkan mustahil didapatkan. Apapun yang kita jadikan standar untuk keacakan, akan selaku berpotensi menimbulkan bias baru. Sebagai contoh, mengambil sampel mahasiswa melalui media sosial, meskipun dilakukan seacak mungkin, menimbulkan bias karena mengabaikan mereka yang tidak punya akun media sosial.

Secara teoretis, mungkin saja kita dapat melakukan selayaknya menarik undian lotre, yakni menuliskan nama seluruh populasi pada secarik kertas kecil, memasukkannya ke sebuah wadah tertutup kemudian berusaha mengambil dari sekian banyak kertas dari dalamnya. Tetapi tentu saja, ketika jumlah populasinya ratusan ribu, atau bahkan ratusan juta, maka car*a brutal seperti itu akan sangat tidak efektif dan efisien.

Meskipun mustahil, kita tetap bisa mengusahakan agar suatu sampel bisa seacak yang mungkin bisa terambil. Untuk itu, terdapat beberapa macam teknik yang dilakukan. Misal, kita dapat mengambil sampel bertingkat dengan memilah populasi ke kelompok-kelompok yang homogen (relative terhadap variabel yang tengah diamati) dan mengambil sampel acak dari setiap kelompok tersebut. Homogen di sini berarti berdasarkan variabel terkait, data di dalam kelompok tidak akan banyak bervariasi. Dengan didapatkan kelompok yang lebih kecil, pengambilan sampel acak akan lebih mudah dilakukan.

Mengambil sampel dengan kelompok ini punya bentuk lain. Kita tetap dapat mengelompokkan populasi menjadi kelompok-kelompok kecil, namun pembagian kelompoknya tidak harus homogen. Yang kita lakukan bukan melakukan pemilihan acak pada data, tapi melakukan pemilihan acak pada kelompok. Baru kemudian kita amati seluruh unit yang ada di dalam kelompok yang terpilih secara acak tersebut. Cara lainnya lagi adalah dengan pengambilan sampel secara sistematis, dengan mengambil secara acak setiap kelipatan suatu unit berikutnya. Misal, mengambil sampel dari suatu hasil panen wortel suatu perkebunan dapat dilakukan dengan mengambil sampel setiap wortel ke dua puluh yang ditemui secara acak.

Setiap metode ini pada dasarnya tidak universal dan sangat bergantung pada populasi yang diamati. Masing-masing memiliki kelemahan dan kelebihannya masing-masing. Terlebih lagi, masih banyak sumber bias yang sukar untuk diatasi, terutama apabila sumber datanya adalah manusia. Dalam survey misal, tidak ada jaminan setiap responden menjawab jujur atau benar-benar paham apa yang ditanyakan. Jawaban responden juga akan sangat dipengaruhi oleh kondisi emosional responden terkait. Yang pasti, mengambil sampel adalah suatu tindakan awal yang harus dilakukan dengan sangat hati-hati. Karena dalam statistik, acak berarti benar, sehingga gagal mendapatkan sampel yang acak, berarti gagal mengekstrak kebenaran.

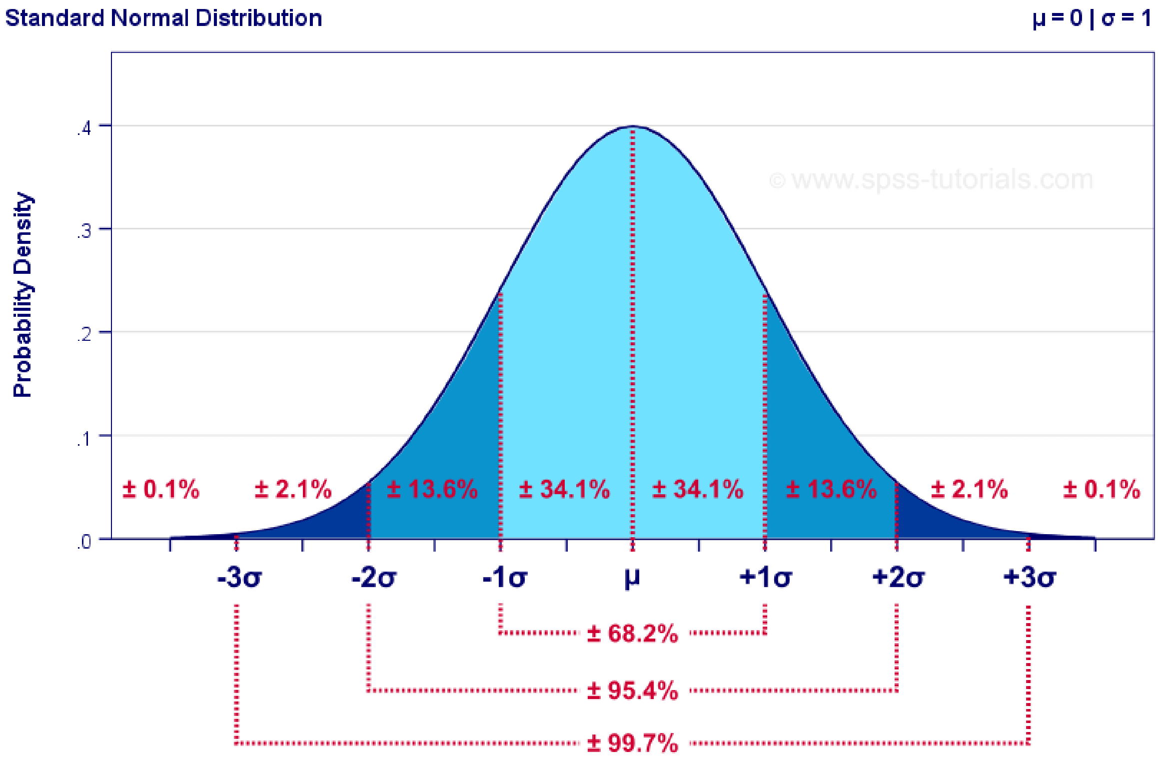
Seberapa yakin anda?

Setelah mempertimbangkan keacakan dan keterbatasan sampel, kita mungkin perlu meninjau kembali statistika yang kita bahas di awal. Statistika deskriptif versi sampel sedikit lebih rumit karena kita tidak bisa serta merta menjadikan hasil perhitungan metrik statistik data sampel sebagai kebenaran final.

Dalam setiap pengukuran atau pengamatan, keterbatasan kita sebagai pengamat akan selalu menghasilkan unsur ketidakpastian. Dalam sains, hal ini merupakan hal dasar sehingga galat pengukuran adalah hal yang selalu dipertimbangkan. Demikian halnya juga dalam menarik sampel. Ketika kita menarik sampel dengan ukuran tertentu dan menghitung beberapa metriknya seperti rata-rata dan simpangan baku, maka tentu akan selalu ada galat dari nilai metrik sesungguhnya untuk data populasi. Sehingga hasil statistika deskripsi murni dari data sampel harus dlengkapi dengan catatan ketidakpastian.

Bagaimana kita tahu seberapa yakin kita dengan statisitika deskripsi dari sampel? Untuk mengetahuinya, kita dapat berpikir lebih jauh dengan memandang bahwa satu set data sampel sebagai satu unit data tunggal, dengan rata-rata dan simpangan baku sebagai nilai numeriknya. Jadi, yang menjadi variabel acak seakrang bukanlah variabel awal yang kita pandang, tapi justru rata-rata dan simpangan baku dari data sampel adalah variabel acak kita. Sehingga, kita bisa mengambil beberapa koleksi data tunggal untuk membangun set data sampel baru.

Agar tidak bingung, ambil contoh kita ingin mengukur lebar rata-rata daun pohon jeruk. Kita ingin tahu apabila kita memiliki sampel dengan ukuran n, seberapa dekat hasil rata-rata sampel dengan nilai rata-rata populasi yang sesungguhnya. Untuk itu, kita tidak bisa ambil hanya satu set sampel saja, tapi kita ambil beberapa set sampel n daun untuk mendapatkan nilai rata-rata setiap set sampelnya.



Sebelum berlanjut, perlu diktahui bahwa dalam statistik ada suatu teorema dasar yang dinamakan teorema limit pusat, yang secara sederhana mengatakan bahwa distribusi suatu data sampel dapat diubah menjadi suatu bentuk normal (distribusi berbentuk lonceng dengan pusat 0 dan simpangan baku bernilai 1). Distribusi normal punya perhitungan baku yang dapat dijadikan standar menyimpulkan, seperti bahwa 68.2 persen nilai dari distribusi normal akan berada pada rentang simpangan bakunya. Transformasi variabel acak ke bentuk distribusi normal hanya butuh nilai rata-rata dan simpangan baku dari variabel acak terkait.

Kembali ke contoh data daun pohon jeruk. Ketika mengumpulkan beberapa set sampel n daun, kita dapatkan satu koleksi data baru. Hal ini seakan setiap n sampel daun kita taruh dalam suatu kotak. Kumpulan kotak-kotak ini menjadi suatu set data baru yang masing-masing memiliki nilai rata-rata lebar n daun yang ada di dalamnya. Nilai rata-rata lebar daun dari setiap kotak dapat menjadi suatu variabel acak baru, yang dapat kita hitung rata-rata dan simpangan bakunya untuk membangun distribusi normalnya. Nilai rata-rata ini merupakan estimasi dari nilai rata-rata populasi yang sesungguhnya, dan standar baku ini merupakan galatnya. Jika simpangan bakunya kita notasikan σ, maka berdasarkan sifat distribusi normal, kita bisa simpulkan bahwa 68.2 persen data sampel dengan ukuran n akan memiliki nilai rata-rata lebar daun dengan galat sebesar σ. Tentu dengan memperbesar lebar galat, persentase data sampel yang masuk lebih besar lagi. Misalkan, apabila kita tetapkan galatnya adalah dua kali simpangan baku atau 2σ, maka didapatkan 95.4 persen sampel akan berada di dalam galat itu. Juga, semua bergantung n, memperbesar n

akan memperkecil simpangan baku σ, sehingga semakin besar sampel memang akan semakin memperkecil ketidakpastian.

Ilustrasi di atas adalah contoh bagaimana statistika bisa memberikan pernyataan yang tegas lengkap dengan ketidakpastiannya sehingga kita bisa tahu harus seberapa yakin kita akan kebenaran pernyataan yang diberikan.

Apa yang dilakukan sebelumnya, meski berawal dari statistika deskriptif, pada dasarnya merupakan salah satu proses statistika inferensial. Berdasarkan suatu model statistik (variabel acak dan distribusinya), kita menyimpulkan informasi. Suatu kesimpulan statistik paling tidak harus mengandung tiga informasi: nilai estimasi, besar galat, dan tingkat keyakinan. Nilai estimasi adalah target kita, sehingga memang akan selalu jadi luaran utama. Akan tetapi besar galat dan tingkat keyakinan bisa saling menentukan satu sama lain. Artinya apa, kita bisa tetapkan besar galat pada suatu nilai dan dengan itu kita peroleh tingkat keyakinan kita pada estimasi terkait. Atau sebaliknya, kita bisa tetapkan suatu tingkat keyakinan dan dengan itu kita peroleh galat dari estimasi terakit.

Jika kita kembali pada contoh data daun di atas, maka μ, rata-rata lebar daun populasi, adalah target estimasi utama kita. Bila kita tetapkan bahwa galat yang kita toleransi adalah sebesar σ, maka kita hanya bisa yakin 68 persen bahwa sampel kita akan bernilai dalam rentang galat tersebut. Sebaliknya, jika kita tetapkan bahwa kita ingin dapatkan hasil dengan tingkat keyakinan sampai 95 persen, maka kita dapatkan galat yang bisa ditoleransi adalah sekitar 1.96σ.

Meskipun galat dan tingkat keyakinan itu saling mempengaruhi, pada dasarnya kita bisa membuat keduanya tetap dengan memainkan parameter lain, yakni besar sampel. Meningkatkan banyaknya sampel akan memperkecil galat dan meningkatkan tingkat keyakinan. Namun karena besar sampel itu bagian dari masukan, parameter yang memang harus selalu kita yang tentukan, ia bukan bagian dari informasi yang tercakup dalam kesimpulan statistik.

Hal ini menunjukkan bahwa pada dasarnya data statistik tidak boleh disajikan setengah-setengah. Yang sering terjadi adalah dari suatu hasil perhitungan statistik, yang disajikan hanyalah hasil nilai estimasinya, tanpa mencantumkan galat dan tingkat keyakinan yang didapatkan. Padahal, statistik itu selalu berurusan dengan ketidakpastian, sehingga ketika yang disodorkan hanya nilai estimasi maka kita harus bertanya, seberapa yakin kita dengan estimasi itu. Statistik hanya dapat membuat kita "cukup yakin", tentu dengan galat toleransi tertentu.

Epilog

Statistika sampai detik ini masih merupakan ilmu yang berkembang pesat. Apalagi, kemampuan statistika untuk melakukan prediksi terhadap data baru dapat diterapkan pada algoritma komputer sehingga bisa menghasilkan mesin yang bisa belajar (*machine learning*). Apa yang kita lihat dari gawai kita seperti peta yang bisa memprediksi jalur tercepat, kamera yang bisa membaca wajah, atau asisten virtual yang bisa kita ajak komunikasi selayaknya manusia, hanya mungkin berkembang dari statistika. Ketika kita ingat kembali bahwa statistika hanya ilmu meramal, ilmu yang berurusan dengan ketidakpastian, sangat mengagumkan bila melihat ternyata justru banyak yang dapat dimanfaatkan darinya. Mungkin memang manusia adalah makhluk yang selalu bisa menerima kekurangan dirinya, dan memanfaatkan balik kekurangan itu. Sungguh naif bila masih banyak manusia yang berharap adanya ilmu yang bisa mengungkap kebenaran absolut yang lengkap, sedangkan justru dari ketidaklengkapan, kita selalu bisa berusaha untuk mengisi ruang-ruang kosong tersebut melalui berbagai prediksi dengan ketidakpastian yang diakui sepenuh hati.

Statistika seperti menjadi duta besar, diplomat, yang dapat berkomunikasi dengan berbagai ilmu karena kemampuannya untuk memaklumi. Semua ilmu pun merasa nyaman karena statistika tidak pernah menuntut, ia justru memahami dan menerima setiap kekurangan dan ketidakpastian. Sayangnya, universalnya aplikasi statistika membuat orang-orang perlahan jadi cenderung melakukan mistifikasi berlebihan, sehingga memandang seakan statistika adalah segalanya. Dan lahirlah dari pemujaan berlebihan itu kalimat yang mengawali tulisan ini: “Berbicaralah dengan data”. Menganggap absolut kebenaran berdasarkan data seakan menyalahi esensi dari statistik itu sendiri, bahwa statistika menolak yang mutlak.

Memahami Keacakan

Masa depan itu tidak pasti, kata orang-orang. Ya, kata paling bijak yang kita semua akan mengafirmasi. Tidak pastinya masa depan pun paling tidak menjadi hal yang kita yakin pasti. Loh? Jika pakai kutipan yang lebih cantik, maka bisa dikatakan bahwa "satu-satunya yang pasti adalah ketidakpastian". Loh? Tentu saja itu hanya permainan kata yang sebenarnya bila dimaknai secara harfiah mengandung paradoks, tapi tidakkah memang benar-benar ketidakpastian itu begitu hal yang begitu natural sehingga tidak bisa kita nafikan? Mungkin saja, tapi yang jelas, kita perlu mundur sedikit dan memperjelas, apa itu ketidakpastian?

Ketidakpastian merupakan kata yang cukup erat dalam kehidupan, karena kata ini menjadi kata ultima sebagai penjelas akhir atas setiap hal yang terjadi, terutama yang tidak sesuai dengan ekspektasi. Kata ini menjadi sumber beragam *anxiety*, ketidaktenangan, kegelisahan, dan macam emosi lainnya. Kata ini begitu sakral sehingga menjadi kartu pamungkas atas semua yang tidak mampu dijelaskan, atas semua keraguan, dan atas semua kekeliruan. Yang menjadi ironi adalah, dengan naturalnya ketidakpastian, manusia terus berusaha mencari kepastian, seakan tidak bisa menerima kenaturalan yang ada. Akan tetapi, mungkin kita perlu lihat lagi lebih seksama, apakah ketidakpastian memang senatural itu?

Memastikan Ketidakpastian

Lawan dari ketidakpastian, kepastian, bisa dimaknai sebagai suatu keadaan yang bisa diketahui secara pasti. Yang dimaksud pasti di sini adalah lengkap tanpa mengabaikan atau membuang detail tertentu. Karena dalam pemahaman ini melibatkan konsep "diketahui", maka kepastian sangat terkait dengan manusia sebagai subjek yang mampu mengetahui. Ketidakpastian atau kepastian kemudian menjadi konsep yang sangat berpusat atau berdasar pada manusia sebagai makhluk yang dapat "mengetahui" secara sadar. Ketidakpastian atau kepastian mungkin tidak akan punya makna bagi makhluk hidup lain. Dengan itu, ketidakpastian dapat dipahami sebagai situasi yang terkait dengan informasi yang tak lengkap atau sempurna. Informasi ini melibatkan beragam dimensi, termasuk ruang, waktu, seperti masa depan, ataupun variabel tertentu.

Suatu keadaan terkadang bisa dideskripsikan dengan mudah melalui kumpulan informasi yang sederhana, apalagi bila terkait dengan kejadian yang telah terjadi. Bila kemarin kita basah kuyup karena kehujanan, maka kita bisa tahu secara pasti bahwa hujan memang telah turun kemarin. Tentu ini akan sangat bergantung dari seberapa rinci keadaan itu perlu dideskripsikan. Dalam konteks hujan, mengetahui lebih lanjut bagaimana hujan itu terjadi seperti curah hujannya akan membutuhkan pengukuran lebih rinci dengan instrumen tertentu. Hal ini masih memungkinkan untuk dilakukan. Dalam contoh lain, bila kita memiliki sebuah apel dan sebuah kotak dimana apel itu dapat termuat secara pas di dalamnya, maka kita bisa katakan secara pasti apel dan kotak itu memiliki lebar yang sama. Akan tetapi, keadaan "lebar yang sama" ini dalam perspektif yang lebih rinci membutuhkan pengukuran eksak atas lebar dari apel maupun kotaknya. Setiap pengukuran akan membutuhkan instrumen tertentu, yang sayangnya akan menghasilkan tingkat informasi yang berbeda, karena setiap instrumen memiliki cara berbeda dalam menunjukkan hasil pengukurannya, yang secara tidak langsung akan cenderung mengabaikan informasi tingkat skala tertentu. Sebagai contoh, mengukur lebar dengan penggaris sangat bergantung pada garis-garis penanda ukuran yang ada. Informasi ukuran antar garis penanda terabaikan oleh penggaris. Ini yang kemudian menghasilkan apa yang para fisikawan sering sebut sebagai ketidakpastian pengukuran, karena setiap pengukuran punya keterbatasan dalam mendeskripsikan informasi dalam skala tertentu, membuat informasi yang dihasilkan tidak lengkap. Terlebih lagi, karena bilangan riil itu kontinu, ketika suatu ukuran apapun berhasil dideskripsikan dengan suatu bilangan dengan n angka di belakang koma, maka akan selalu ada kemungkinan terdapat informasi yang tak tertangkap pada desimal ke $n + 1$. Deskripsi paling lengkap bilangan riil tentu saja dengan menuliskan seluruh desimalnya sampai tak terhingga, namun jelas itu tak mungkin, maka ketidakpastian pengukuran itu tidak bisa dihindari. Tidakpastinya pengukuran merupakan salah satu ketidakpastian yang "pasti" ada, karena informasi terkait kenapa ketidakpastian ini ada telah terdeskripsikan secara lengkap, yakni keterbatasan instrumen dan juga kontinuitas bilangan riil.

Bila kita bergerak ke ranah mikroskopis, uniknya, ada bentuk ketidakpastian lain yang muncul. Dalam skala mikro, mekanika kuantum menunjukkan bahwa setiap materi itu selalu memiliki 2 aspek, yakni partikel dan gelombang, meskipun 2 aspek ini pada dasarnya berlawanan. Ketika materi itu bersifat seperti partikel, maka ia terlokalisasi (menempati lokasi tertentu). Sebaliknya, ketika materi itu bersifat seperti gelombang, maka ia menyebar dan hanya dapat dideteksi dari pergerakannya, yang terukur dari momentumnya. Setiap materi hanya bisa memperlihatkan salah satu aspek pada satu waktu, sehingga ketika ia diukur sebagai partikel, ia akan kehilangan aspek gelombangnya, dan sebaliknya. Dualitas aspek ini, secara fundamental mengindikasikan kita tidak pernah punya informasi lengkap dari materi tersebut. Kita hanya bisa mendapatkan informasi parsial, apakah sebagai partikel atau sebagai gelombang. Ketidaklengkapan informasi memicu prinsip dasar dalam fisika kuantum yang dikenal dengan ketidakpastian Heisenberg, bahwa kita tidak akan pernah bisa secara tepat menentukan lokasi dan momentum materi sekaligus. Jika kita tahu lokasinya, maka momentumnya jadi tidak pasti, dan sebaliknya. Ketidakpastian Heisenberg adalah prinsip dasar mekanika kuantum, sehingga menjadi salah satu contoh ketidakpastian yang pasti.

Selain pengukuran ataupun dualisme partikel-gelombang, ada ketidakpastian lain yang mungkin lebih dekat dengan keseharian. Karena ketidakpastian terkait erat dengan kelengkapan informasi, maka apapun yang informasinya tidak akan pernah bisa kita ketahui akan menjadi ketidakpastian yang fundamental. Dalam contoh ketidakpastian pengukuran, informasi terkait sisa desimal yang tertinggal tidak akan bisa dicapai secara lengkap, dan dalam contoh ketidakpastian Heisenberg, informasi terkait kedua aspek materi tidak akan bisa terlihat secara bersamaan. Informasi lain yang secara pasti kita tidak bisa dapatkan adalah informasi terkait apa yang belum terjadi. Kita menerima informasi pasti atas apa yang telah terjadi, karena informasi butuh medium juga untuk mencapai kita. Dengan itu, masa depan menjadi ketidakpastian fundamental berikutnya, karena tidak ada cara informasi atas apa yang belum terjadi bisa sampai ke kita. Dengan mempertimbangkan beragam implikasi dari teori relativitas, sebenarnya itu menjadi sebuah kemungkinan, namun karena itu semua masih spekulasi, akan lebih aman menganggap bahwa informasi hanya bisa merambat maju dalam garis waktu, sehingga masa depan akan selalu berada dalam ketidakpastian.

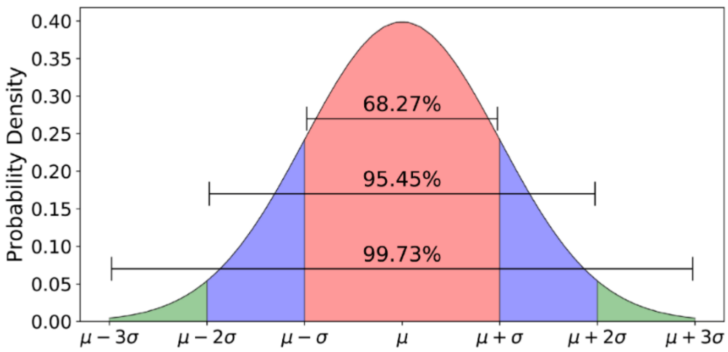
Ketidakpastian adalah Kemungkinan

Hal yang tidak pasti hanya berarti tidak lengkapnya informasi yang kita dapat ketahui terkait hal tersebut. Bagian yang tidak lengkap selalu punya beragam pilihan yang mungkin. Sebagai contoh, kita tidak tahu pasti apakah besok akan hujan atau cerah. Namun, kedua pilihan itu, apakah akan hujan atau cerah, masing-masing masih mungkin terjadi. Tidak pasti tidak berarti tidak mungkin. Ibarat puzzle, ketika ada kepingan yang kosong atau tidak lengkap, maka bukan berarti bagian tersebut benar-benar kosong atau tidak ada gambar sama sekali, namun ada banyak kemungkinan gambar yang bisa mengisi bagian tersebut sehingga sesuai dengan gambar keseluruhan.

Dalam konteks ketidakpastian pengukuran, maka ketika suatu proses pengukuran menghasilkan angka hingga 3 angka di belakang koma, maka angka desimal keempat tetap mungkin jatuh pada salah satu dari 10 bilangan (antara 0 sampai 9). Akan tetapi, tentu lantas itu tidak berarti kesepuluh bilangan sama-sama mungkin untuk menjadi desimal keempat. Dalam ketidakpastian, ada pilihan-pilihan yang mungkin, tapi tetap ada juga pilihan-pilihan yang tidak mungkin. Sebagai contoh, jika kita lempar suatu bola ke atas, lokasi jatuhnya bola tersebut mungkin terjadi di sekitar tempat kita melempar, dan tidak mungkin terjadi (misalnya) 1-kilometer dari kita. Kemungkinan-kemungkinan ini tentu perlu dikuantifikasi atau diukur juga, agar kita bisa paling tidak dapat menerka rentang informasi yang bisa mengisi ketidaklengkapan dari ketidakpastian terkait.

Kuantifikasi ketidakpastian tidak lain dan tidak bukan adalah statistika. Dalam statistika, ketidakpastian itu menjadi bagian dari informasi. Ketimbang menerima dan pasrah begitu saja bahwa ada informasi yang tidak lengkap, statistika mengolah ketidaklengkapan itu menjadi informasi baru yang lebih bermanfaat. Hal ini dengan menetapkan semua kemungkinan informasi sebagai suatu variabel yang acak. Semua kemungkinan informasi ini disebut sebagai ruang sampel, karena merupakan tempat kita mengambil sampel ketika informasi itu berusaha ditebak. Variabel acak sendiri merupakan representasi peluang dari ruang sampel yang mungkin, yang hanya bisa bernilai antara 0 dan 1 (0 berarti sampel itu tidak mungkin keluar, dan 1 berarti sampel itu pasti keluar). Sebagai contoh, ketika kita melempar koin, maka ruang sampelnya berisi 2 kemungkinan, yakni sisi gambar atau sisi angka. Setiap sampel ini dikuantifikasi dengan nilai peluang, yang dalam kasus ini adalah masing-masing 50%, karena kemungkinan jatuhnya sisi gambar dan sisi angka itu sama. Bagaimana nilai peluang tiap anggota ruang sampel terpetakan itu disebut sebagai distribusi.

Semua ketidakpastian dapat dikuantifikasi dengan cara ini, yakni dengan melihat semua kemungkinannya sebagai sebuah ruang sampel yang punya distribusi tertentu. Dalam kasus ketidakpastian pengukuran, hasil yang didapatkan dituliskan dalam bentuk angka yang berhasil diukur ditambah dengan rentang ketidakpastian yang mungkin. Kecil kemungkinan ukuran yang sesungguhnya berada di luar rentang tersebut. Sebagai contoh, ketika mengukur panjang sebuah apel dengan suatu instrumen, kita bisa dapatkan hasilnya 9.52 ± 0.003 cm. Simbol plus minus di situ menunjukkan ketidakpastian, yang mengimplikasikan nilai sesungguhnya ada pada rentang 9.517 sampai dengan 9.523. Nilai yang berada dalam rentang itu paling tidak punya peluang lebih dari 0, sedangkan nilai yang berada di luar rentang itu dapat dianggap tidak mungkin. Jika dilakukan analisis lebih lanjut, nilai dalam rentang itu dapat dipetakan ke suatu distribusi. Dalam hal ini, distribusi yang dapat dipakai adalah distribusi normal, yang kurvanya berbentuk seperti lonceng. Distribusi ini menentukan lebih sepsifik peluang nilai-nilai tertentu.



Deterministik tapi Acak

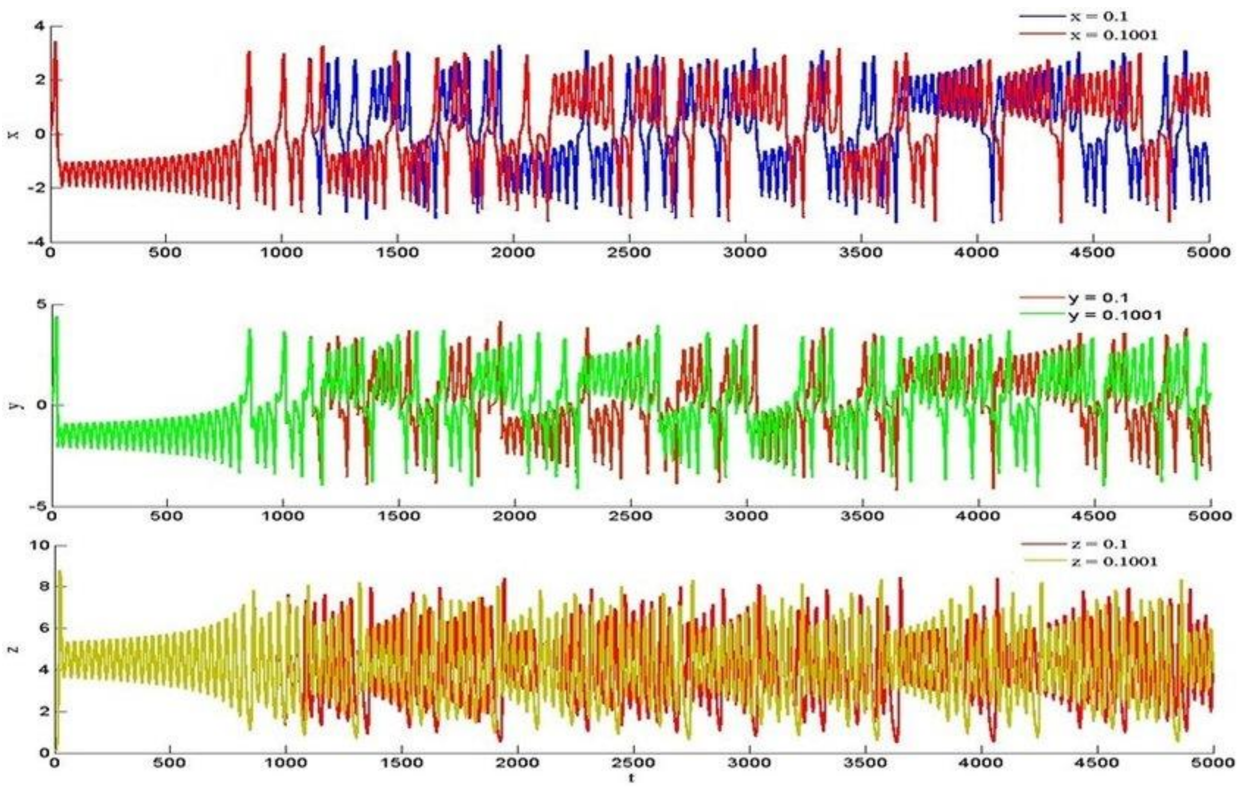
Ketika menerapkan model statistika pada ketidakpastian, maka ada asumsi dasar yang harus dipakai, yakni bahwa ruang sampel yang terkait dapat direpresentasikan sebagai variabel acak. Perhatikan bahwa kata acak digunakan di sini. Secara sederhana kita dapat maknai acak sebagai sesuatu yang tidak punya pola tertentu sehingga sukar diprediksi. Keacakan dalam konteks ini mirip dengan ketidakpastian. Bedanya, ketidakpastian adalah sifat yang terkait dengan situasi epistemik, yakni bergantung pada pengetahuan subyektif, sebagaimana dijelaskan di awal bahwa ketidakpastian itu lebih karena kekurangan informasi yang diketahui. Sedangkan, keacakan merupakan sifat yang terlepas dari subyek, yang memang ketiadaan pola tertentu. Karena ketiadaan pola itu, suatu kejadian yang acak hanya bisa diperkirakan peluangnya. Akan tetapi, keacakan juga bisa dihasilkan oleh ketidakpastian. Ketika suatu kejadian itu kekurangan informasi sehingga sukar diprediksi, maka ia menjadi sama saja seperti tidak punya pola, dan dengan itu berarti bersifat acak.

Dalam kasus pengukuran, alat ukur yang kita miliki mengandung keterbatasan sehingga menimbulkan ketidaklengkapan informasi, yang akhirnya membuat semua rentang nilai yang mungkin menjadi variabel acak. Uniknya, konsep ini agak berubah ketika terkait dengan ketidakpastian masa depan. Misalkan suatu bola dilempar ke arah kita oleh kawan yang berjarak tak jauh dari kita. Jika kita memperhatikan dengan baik prosesnya, maka kita akan bisa dengan mudah menangkap bola tersebut. Apakah kita sebenarnya mengetahui sebelumnya kemana bola itu akan mendarat? Tentu tidak. Kita tidak punya informasi apapun terkait masa depan. Kita hanya bisa mengetahui apa yang sudah terjadi. Mengapa kemudian kita bisa memprediksi kemana bola tersebut bergerak sehingga bisa menangkapnya? Di sini, masuk konsep deterministime. Sistem fisis sederhana, mematuhi hukum-hukum dasar mekanika, yang secara umum sebenarnya terangkum dalam hukum Newton. Hukum ini mengatur bagaimana sistem tersebut bergerak sampai waktu yang tak terbatas, selama kita mengetahui kondisi awalnya. Kondisi awal dari sistem, yakni posisi dan kecepatan pada suatu waktu tertentu, akan menentukan "nasib" dari sistem tersebut sepanjang waktu. Sistem seperti ini disebut deterministik, karena kita bisa menentukan (*determine*) secara pasti keadaan sistem sepanjang waktu. Pandangan seperti ini menjadi paradigma umum fisikawan klasik, karena memang prinsip-prinsip mekanika kala itu sudah dianggap cukup lengkap untuk mendeskripsikan seluruh dinamika sistem.

Sistem yang deterministik berarti mengandung kepastian. Semua sistem fisis, paling tidak yang berskala makro, bersifat deterministik, bahkan sistem lemparan dadu atau sistem lemparan koin sekalipun. Ketika sekeping koin dilempar, selama seluruh informasi kondisi awal yang terkandung dalam sistem tersebut diketahui secara lengkap, maka luaran sisi koin tersebut akan bisa diprediksi secara pasti. Informasi kondisi awal ini antara lain sudut lemparan, kekuatan lemparan, kelembapan udara, tekstur koin, massa koin, dan banyak kondisi-kondisi lainnya yang mempengaruhi. Terkait ini, sudah ada mesin yang dibangun secara khusus untuk melempar koin dengan semua kondisi yang terkontrol, sehingga luaranny selalu pasti sesuai dengan yang diinginkan. Hal ini menunjukkan bagaimana melengkapi informasi bisa menghapus ketidakpastian, sebagaimana definisi dari ketidakpastian. Perbedaan mendasar di sini adalah, bagaimana ketidakpastian di waktu yang berbeda, bisa dihapus dengan kepastian di waktu tertentu melalui sistem yang deterministik.

Ingat sebelumnya bahwa ketidakpastian masa depan muncul dari kemustahilan informasi dari waktu yang akan datang untuk diketahui duluan. Akan tetapi, ciri khas sistem deterministik, yang memungkinkan deskripsi keadaan sistem sepanjang waktu, memungkinkan informasi terkait sistem di masa depan bisa dihitung atau ditentukan terlebih dahulu. Pandangan deterministik ini sebenarnya dalam versi besarnya bisa mengimplikasikan hal yang mungkin sukar diterima. Seandainya kita dapat mengetahui seluruh informasi terkait keadaan di semesta ini pada suatu waktu, maka seluruh takdir semesta di masa depan dan masa lalu bisa ditentukan sepenuhnya. Dalam konteks manusia, tentu hal ini terasa mustahil, namun Simon Pierre Laplace, yang pertama kali mengajukan gagasan ini, mengaitkannya dengan suatu sosok "iblis cerdas" di luar sana. Terlepas dari itu, sistem deterministik yang menghapus ketidakpastian masa depan juga menghapus peranan kehendak dan intensi manusia dalam penentuan masa depan. Apakah lantas kemudian semua yang kita lakukan dan pilih tidak punya arti signifikan karena semua luaran di masa depan sudah ditentukan secara pasti?

Dari sini, kita perlu melihat suatu sistem spesifik, namanya sistem Lorentz. Sistem ini hanya melibatkan 3 variabel, dan merupakan versi sederhana dari sistem atmosfer. Sistem ini deterministik. Ia bisa dituliskan dalam persamaan diferensial yang bisa diselesaikan secara matematis. Selama mengetahui kondisi awalnya, semua keadaan sistem di waktu-waktu selanjutnya bisa dihitung secara pasti. Akan tetapi, betapa terkejutnya Edward Lorentz, penemu sistem ini, ketika melihat bahwa kondisi awal yang hampir sama, bisa menghasilkan luaran yang jauh berbeda. Selain itu, dinamika pergerakan variabel dari sistem ini, meskipun sebenarnya hanya berosilasi dalam rentang nilai tertentu, tidak membentuk pola yang bisa diprediksi. Ketiadaan pola ini mengimplikasikan sifat keacakan dari sistem tersebut.



Sistem Lorentz membongkar konsep determinisme sehingga perlu dimaknai ulang. Sistem Lorentz merupakan salah satu dari keluarga besar sistem serupa yang dnamai dengan sistem *Chaos*. Ciri khas dari sistem yang *chaotic* adalah memiliki sensitivitas terhadap kondisi awal. Selain itu, sistem *chaos* cenderung memiliki ketidakteraturan yang mengimplikasikan keacakan tertentu. Uniknya, meskipun sukar diprediksi, sistem-sistem yang *chaotic* membentuk struktur tertentu yang hanya bisa dilihat secara kualitatif. Selain itu, setiap pergerakan variabel dalam sistem *chaos* memenuhi suatu distribusi peluang tertentu, mengimplikasikan adanya atribut probabilistik dalam sistem itu. Secara sederhana, sistem deterministik yang *chaotic* tidak bisa terprediksi dalam jangka waktu pendek, namun terprediksi secara probabilistik dalam jangka waktu yang panjang. Keanehan ini memperlihatkan bagaimana determinisme dan keacakan tidaklah berlawanan, namun atribut yang berbeda dari aspek yang juga berbeda. Determinisme merujuk pada mekanisme dari sistem, sedangkan keacakan merujuk pada luaran. Suatu sistem dengan mekanisme deterministik bisa punya luaran yang teratur atau acak, namun sistem yang mekanismenya sudah probabilistik pasti punya luaran yang acak.

Entropi Informasi

Kata acak disebut berkali-kali sebelumnya, tapi kita tidak benar-benar memahami makna sesungguhnya kata ini. Apa maksudnya acak? Pemaknaan lebih dalam terkait ini bisa masuk ke ranah filosofis. Sesuatu yang acak bahkan sukar masuk di akal. Atas dasar apa suatu luaran tertentu keluar dari distribusi yang acak? Pada kenyataannya, tidak ada sesuatu yang benar-benar acak. Jika kita berusaha memikirkan suatu angka bebas secara acak sekalipun, pemikiran itu ditentukan oleh banyak impuls tak sadar dalam pikiran kita. Bahkan, pembangkit bilangan acak yang bisa kita temukan dalam banyak program pun sebenarnya tidak sepenuhnya acak, karena ia memenuhi pola tertentu yang iterasinya cukup panjang sehingga hampir seperti acak.

Sesuatu bisa secara fundamental acak atau terasa acak karena ketidaklengkapan informasi. Akan tetapi, apakah ada acak yang fundamental? Jika yang dimaksud adalah lemparan koin, kita tahu bahwa ia sebenarnya acak karena ketidaklengkapan informasi. Bagaimana dengan pergerakan partikel dalam suatu cairan, seperti air misalnya? Bukankah partikel air pada dasarnya bergerak kesana kemari secara "acak"? Hal seperti itu pun bergantung dari informasi keadaan partikel air secara keseluruhan. Bila kita memiliki informasi kondisi awal setiap partikel air dalam suatu wadah pada suatu waktu, maka kita bisa simulasikan secara persis bagaimana partikel air itu bergerak seterusnya. Jadi, apakah keacakan juga seperti ketidakpastian, yakni bergantung kelengkapan informasi?

Mungkin kita perlu mundur lagi dan bertanya lebih dalam, apa sebenarnya informasi? Dengan pemahaman sederhana, kita bisa lihat bahwa informasi sepertinya terkait dengan suatu keteraturan. Sesuatu yang teratur dan akhirnya membentuk pola tertentu akan memiliki informasi lebih ketimbang yang tidak. Ketika kombinasi dari 26 huruf membentuk suatu rangkaian tertentu yang spesifik, seperti a dengan k dengan u menjadi 'aku', maka kata 'aku' mengandung informasi. Akan tetapi, apakah setiap kata mengandung informasi yang sama? Ada beberapa pola tertentu di bahasa sedemikian sehingga ada huruf-huruf berlebih dalam kata-kata yang kita gunakan. Sebagai contoh, bagi pengguna bahasa Indonesia, kalimat "mrka gk snng mkn nsi" tetap bisa dimaknai secara baik. Pola-pola ini justru memungkinkan kita untuk mengompres kalimat agar menjadi lebih singkat dengan tetap mengandung porsi informasi yang sama. Pada contoh lain, kalau kita punya rangkaian bilangan berpola seperti 0101010101, maka rangkaian ini bisa kita peringkas dengan semacam mekanisme atau simbol tertentu seperti 01x4 atau semacamnya. Akan tetapi, ketika kita punya rangkaian bilangan 00101101, maka ketiadaan pola dalam rangkaian itu membuatnya tidak bisa diperingkas, sehingga datanya diperkecil tanpa mengurangi informasi yang dikandungnya. Hal ini menunjukkan bahwa informasi justru lebih sedikit ketika ada pola. Rangkaian 01 berulang 4 kali bisa dikompres lagi karena yang murni informasi hanya 01-nya saja dan pengulangannya, sedangkan rangkaian yang acak tidak bisa dikompres lagi karna sudah murni informasi. Konsep ini sebenarnya juga yang memungkinkan teknik kompresi data, dimana pola tertentu pada data, baik gambar, video, atau teks, menunjukkan adanya *redundancy* dan informasi yang lebih sedikit, sehingga bisa dikompres agar murni mengandung informasi yang efektif.

Jika dipikirkan lagi dengan seksama, justru pola-pola tertentu tidak menunjukkan adanya informasi lebih. Sebagai contoh, bahwa besok matahari akan terbit dari sebelah timur tidak mengandung banyak informasi karena kita sudah tahu bahwa itu akan terjadi. Itu bukan hal yang "informatif". Di sisi lain, pengumuman lotere sangatlah informatif karena sangat tidak terprediksi dan acak. Berlawanan dengan intuisi umum kita, informasi justru ditentukan dari tingkat keacakannya. Semakin acak, semakin informatif. Bahkan, informasi maksimum ada pada sistem yang murni acak. Di sisi lain, keacakan itu menunjukkan ketidakteraturan. Itulah kenapa kemudian ketidakteraturan dan informasi disatukan dalam sebuah konsep besar yang sama, yakni entropi. Secara matematis, entropi ini dihitung dengan distribusi peluang dari informasi yang diberikan. Dalam konteks termodinamika, entropi tinggi merepresentasikan sistem dengan kalor yang terdistribusi secara merata. Sistem seperti ini, secara mikroskopik berarti setiap partikelnya bergerak bebas namun acak ke segala arah secara merata, yang mengimplikasikan ketidakteraturan. Entropi rendah, sebaliknya diwakili oleh sistem yang tidak terdistribusi, seperti misal terasa panas hanya pada satu bagian sedangkan yang lain dingin, karena sistem seperti ini memiliki pola yang membuat pergerakan partikel pada titik-titik tertentu bisa terprediksi.

Memang ini sukar diterima, karena jelas bahwa apapun yang murni acak, itu tidak memberi makna apapun bagi kita sebagai manusia. Video yang murni *noise* tidak menarik untuk ditonton, rangkaian acak DNA tidak juga dapat menghasilkan makhluk hidup. Ini berarti ada aspek lain yang bersandar pada keteraturan dan mengimplikasikan makna namun bukan informasi. Dalam konteks ini, seakan makna itu lahir dari suatu titik dimana infomasi itu minimum, tapi cukup untuk bisa menghasilkan pola atau struktur kompleks. Terlepas dari itu, keanehan yang muncul dari sini adalah bahwa hukum termodinamika ke-2 mengharuskan entropi itu selalu meningkat. Artinya, semesta selalu mengarah pada ketidakteraturan, menuju suatu kondisi murni acak ketika entropi maksimum. Dalam konteks informasi, ini berarti ketika entropi semakin meningkat, maka semakin besar informasi total dari semesta. Padahal, jika kita melihat paradigma determinisme, yang mana dengan hukum-hukum fisika kita selalu bisa menentukan kondisi lengkap semesta sepanjang waktu dari kondisi awalnya, maka seharusnya seluruh informasi di semesta ini konstan sepanjang waktu, karna tidak ada informasi baru ataupun informasi yang hilang. Lantas, darimana informasi baru datang ketika entropi harus terus meningkat?

Ada banyak spekulasi. Salah satunya adalah dengan meninjau kembali dunia mikroskopik. Dalam skala mikroskopik, hukum fisika ditentukan oleh mekanika kuantum, yang sebagaimana telah tersinggung sedikit sebelumnya, mengandung ketidakpastian. Dualisme partikel-gelombang dari materi yang ada pada level mikroskopik sebenarnya secara fundamental berdiri di atas prinsip bahwa dinamika setiap partikel bisa dijelaskan dengan suatu gelombang. Apa sebenarnya hakikat dari gelombang ini menjadi puzzle tersendiri di dunia fisika, namun salah satu interpretasi terbaik yang disepakati adalah bahwa gelombang ini menunjukkan distribusi probabilitas atau peluang kondisi partikel terkait. Dengan itu, secara esensial, setiap partikel dalam level mikroskopik bergerak secara probabilistik, bukan deterministik. Kita tidak bisa tahu secara pasti posisi partikel, tapi kita hanya bisa tahu peluang kemungkinan ditemukannya saja. Anehnya, ketika dilakukan pengamatan pada partikel tersebut, aspek gelombangnya *collapse* atau runtuh sehingga ia kembali menjadi partikel yang terlokalisasi, dengan lokasi yang spesifik. Meski ini menjadi misteri tersendiri sampai sekarang, runtuhnya fungsi gelombang setiap kali sistem kuantum diamati mengubah yang tadinya acak menjadi pasti. Efeknya, informasi sistem tersebut berkurang, yang akhirnya memberi informasi baru ke diri kita tentang lokasi spesifik dari partikel yang diamati. Secara umum, kita katakan bahwa semesta mendapat informasi baru setiap kali ada peristiwa kuantum seperti itu. Tentu saja, ini semua masih spekulasi. Ada banyak yang masih perlu dipahami dari hakikat sejati informasi dan apa hikmah dibalik meingkatknya entropi. Terlebih lagi, seharusnya kompleksitas yang dihasilkan secara lokal, dengan adanya manusia, menunjukkan adanya kemungkinan bahwa entropi bisa berkurang secara terbatas. Belum lagi misteri hubungan antara makna dan informasi, karena definisi informasi secara entropik, bahwa informasi tak lain adalah tingkat keacakan, terasa tidak cocok dengan bagaimana manusia membangun makna dalam hidupnya.

Di awal, pemaknaan informasi sebagai keacakan ini juga didasari atas kebutuhan kompresi dan enkripsi pesan yang dibutuhkan dalam teknologi informasi. Claude Shanon, sebagai pencetus teori informasi tersebut, secara matematis kemudian merumuskan bagaimana menghitung banyaknya informasi yang terkandung di suatu pesan, juga mekanisme enkripsi yang dapat diterapkan sehingga informasi terjaga secara efektif. Keacakan mau tidak mau tidak lepas dari konsep informasi, karena konsep keacakan itu sendiri ada karena keterbatasan kita untuk memiliki informasi secara lengkap. Mungkin memang ada yang perlu dimaknai lebih jauh lagi, tentang bagaimana keacakan bisa memberi makna tertentu dalam semesta.

Apakah setiap topik dalam matematika memiliki hikmah tersendiri? Entah lah. Melihat peta besarnya ternyata tidak cukup untuk mengungkap detail setiap topiknya, yang ternyata membuka khazanah lain lagi. Memang, seperti ada narasi tertentu yang tercipta dari setiap keterhubungan topik, yang akhirnya menuntun ke pemahaman lebih utuh atas semua. Apakah ada pembelajaran tertentu yang bisa di bawa ke keseharian, itu adalah tujuan utamanya, karena pada ujungnya, semua pencarian ini adalah untuk menemukan mutiara hakikat dalam ilmu mendasar dan abstrak seperti matematika.

(PHX)