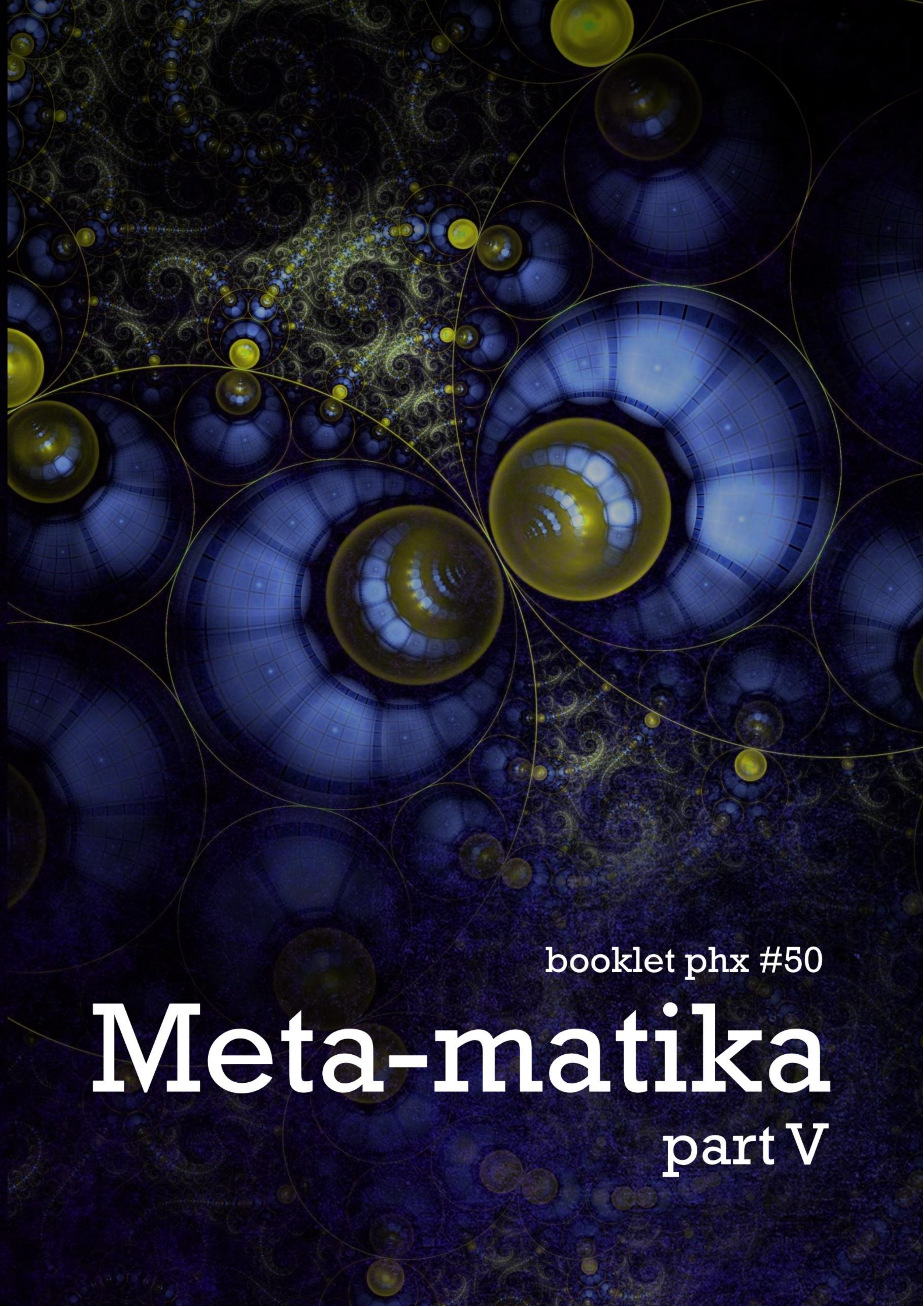


booklet phx #50

Meta-matika

part V

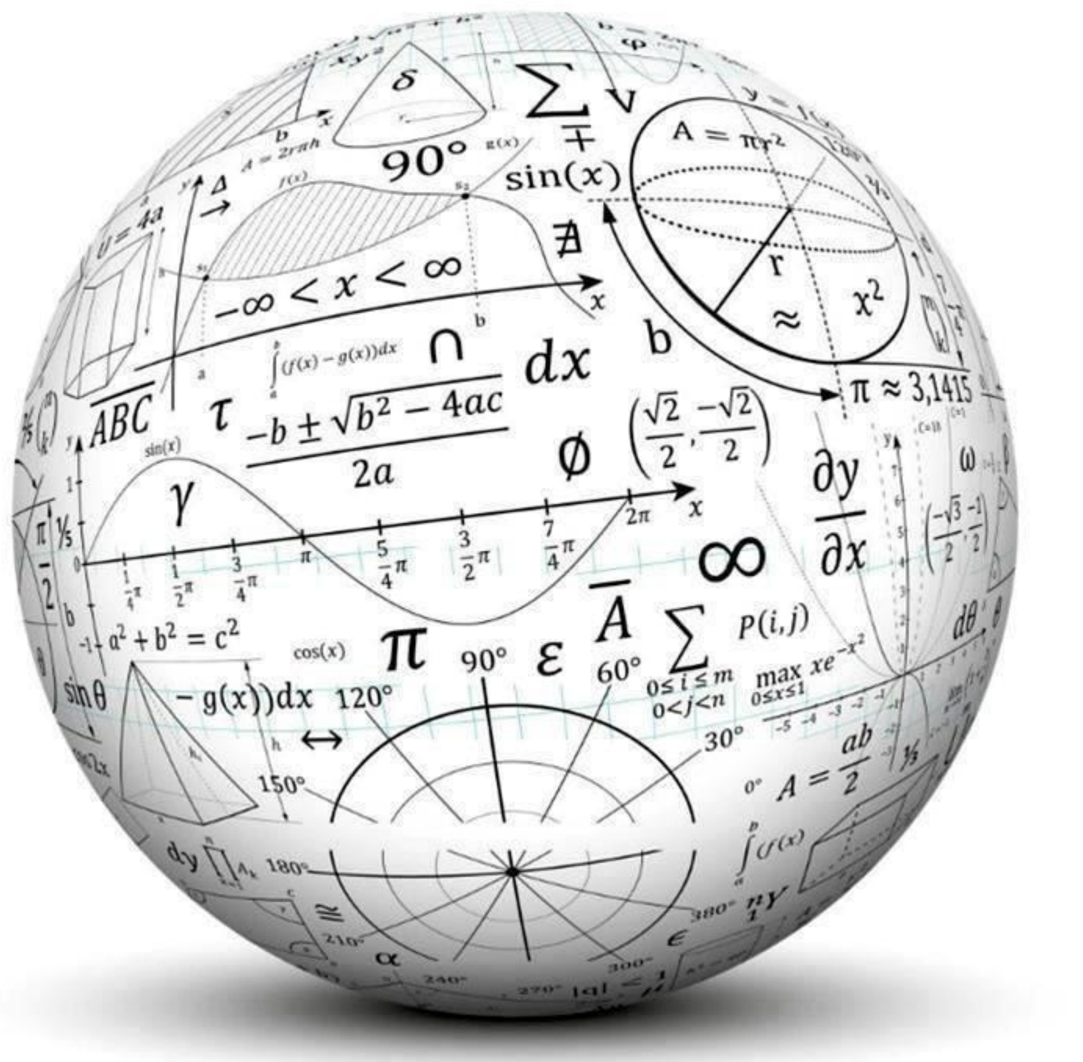
Booklet Seri 50

Metamatika V

Oleh: Phoenix

Kali ini, aku akan sedikit mundur sejenak dan mempertanyakan ulang pertanyaan yang mengawali seluruh perjalananku merenungi matematika. Ya, pertanyaan yang bahkan menjadi tulisan pertamaku terkait matematika, yakni apa itu matematika. Aku pertama kali mencoba menjawabnya ketika masih tahun ke-3 studi sarjana. Kali ini, mengangkat kembali pertanyaan itu setelah sekian tahun belajar lebih dalam sampai mencapai gelar doktor, aku entah kenapa merasa ada jawaban yang lebih lengkap yang bisa ku tawarkan. Selebihnya, aku eksplorasi juga atas apa yang menjadi atribut matematika, yakni objek studinya dan keunikannya.

(PHX)

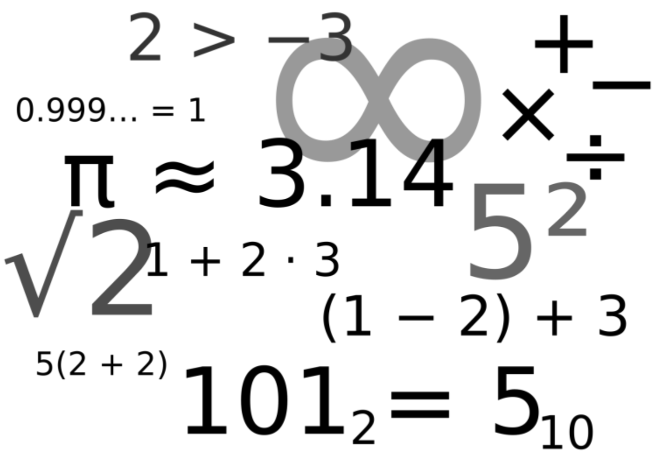

90°
sin(x)
A = πr²
−∞ < x < ∞
dx
b
π ≈ 3,1415
ABC
−b ± √(b² − 4ac) / 2a
∂y/∂x
a² + b² = c²
cos(x)
π
90°
ε
60°
P(i,j)
− g(x))dx
120°
30°
150°
A = ab/2
180°
210°

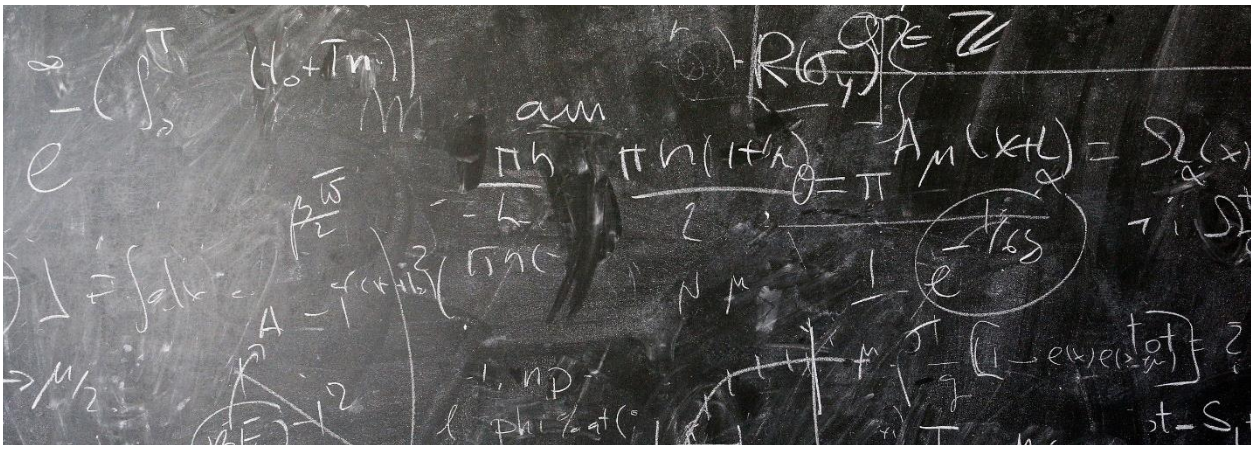
Teruntuk

Semua mahasiswa matematika di seluruh Indonesia,

Dan siapapun yang mengagumi keindahan angka

Daftar Konten





Apa itu matematika

Bertanya apa itu matematika mungkin serupa dengan bertanya apa itu cinta, karena tidak ada definisi tunggal yang diterima secara universal. Setiap orang bisa mendefinisikannya secara berbeda atau punya perspektif tersendiri terhadapnya, namun apa saja yang disebut matematika mungkin semua orang punya gambaran yang serupa. Dapat kita lihat bagaimana beragam matematikawan sendiri bisa memiliki cara berbeda dalam menjelaskan apa itu matematika. Salah satu penyebabnya mungkin adalah bahwa matematika adalah cabang ilmu yang cukup luas cakupannya serta banyak bersinggungan dengan cabang ilmu yang lain, sehingga posisi inti dari matematika itu sendiri, serta batasan-batasannya menjadi hal yang kabur dan ambigu. Meskipun demikian, sebagaimana cinta, paling tidak kita dapat berusaha mendeskripsikannya sebaik mungkin tanpa harus mencapai definisi eksak.

Satu hal yang paling kita tahu terkait matematika adalah bahwa ia merupakan sesuatu yang bisa dipelajari. Minimal sepanjang sekolah, kita selalu menemui mata pelajaran khusus bernama matematika, maka mungkin paling sederhana kita mengenalnya sebagai sebuah bidang pengetahuan. Sebagaimana bidang pengetahuan yang lain, seperti fisika, biologi, kimia, sejarah, dan lainnya, ilmu matematika seharusnya juga memiliki objek kaji, yakni objek yang menjadi perhatian utama untuk diselidiki dan diobservasi dengan beragam metode. Fisika memiliki objek kaji fenomena fisis, biologi memiliki objek kaji makhluk hidup dan yang terkait dengannya, kimia memiliki objek kaji zat dan elemen dari materi. Apa objek kaji dari matematika? Dari sekolah mungkin hal yang paling dapat kita tangkap dari matematika adalah bilangan sebagai objek kaji utamanya. Sayangnya, matematika yang melibatkan bilangan secara eksplisit hanya sebagian kecil dari apa yang sebenarnya dieksplorasi dan dipelajari di matematika. Memang pada akhirnya, yang benar-benar mencicipi lapisan lebih dalam matematika adalah yang studi lebih lanjut secara khusus di matematika atau yang terkait seperti fisika. Kita akan coba eksplorasi jauh ke dalam lubang kelinci dari apa yang ada di dalam matematika untuk memahami apa itu matematika sebenarnya.

Terminologi

Kita bisa mulai dari terminologi matematika itu sendiri, yang sebenarnya jika ditelusuri ternyata memiliki akar makna yang cukup jauh. Istilah matematika dalam bahasa Indonesia merupakan terjemahan langsung dari *mathematics* dalam bahasa inggris dan juga *mathematique* dalam bahasa Perancis yang bermakna sama dengan apa yang kita pahami. Kata *mathematics* dalam bahasa inggris sendiri menggantikan istilah dalam Inggris kuno *rīmcræft* yang secara literal berarti teknik/seni berhitung.

Kata *rīmcræft* digantikan oleh istilah yang sepadan dari bahasa latin, yakni dari *ars mathematica* (*art of mathematics*), yang mengandung kata *mathematica* yang terkadang juga digunakan dalam bentuk lain yakni *mathēmaticus* (maskulin), *mathēmatica* (feminine), atau *mathēmaticum* (netral). Memang akhirnya terkadang digunakan dalam bentuk tunggal menjadi *mathēmatica*. Kata ini merupakan penggunaan modifikasi dari *mathēmatikós (μαθηματικός)* dalam bahasa Yunani kuno, yang berakar dari *mathēma* (μάθημα). Kata *mathēma* tersusun dari *manthánō* (*μανθάνω*) yang berarti tindakan belajar atau "saya belajar", dan diberi akhiran -ma (*-μα*) sebagai bentuk kata bendanya. Sebagai kata benda, *máthēma* pun dapat dipahami sebagai sesuatu yang dipelajari, pelajaran, atau pengetahuan. Tentu ini makna yang sangat umum, sehingga seakan semua ilmu pengetahuan bisa digolongkan sebagai *máthēma*.

Dalam melihat ini, perlu dipahami bahwa ilmu pengetahuan pada era Yunani kuno memang masih belum terbentuk secara sistematis dalam beragam bidang yang berbeda. Konsep pengamatan empiris dalam sains pun belum ada, sehingga sains atau ilmu pengetahuan lebih cenderung pada pemahaman pola alam secara langsung, yang terkadang juga menyinggung filosofis dan metafisis. Pola alam paling sederhana yang dapat dilihat adalah terkait kuantifikasi objek, ukuran materi, bentuk-bentuk berpola, dan harmoni dalam nada. Kuantifikasi objek akan terkait dengan pengembangan awal aritmatika atau ilmu hitung sederhana, ukuran materi menjadi cikal bakal geometri, bentuk-bentuk berpola paling mudah dilihat adalah pola bintang yang kemudian berkembang menjadi astronomi dan astrologi, serta harmoni tertangkap dan berkembang dari adanya musik yang sebenarnya juga lahir dari pola tertentu nada. Di luar hal ini, belum banyak yang benar-benar bisa dipelajari lebih jauh dari alam, sehingga ilmu pengetahuan secara keseluruhan adalah 4 aspek ini, yang kemudian dikenal sebagai *quadrivium* (4 jalan), yakni aritmatika, geometri, astronomi, dan musik. Pembagian 4 cabang pengetahuan ini dirumuskan oleh Plato pertama kali dalam karyanya, Republik. Selain itu, juga disebutkan secara implisit pada beberapa tulisan awal Phytagorean.

Pada masa itu, ketika menyebut ilmu pengethauan secara umum, atau *máthēma*, maka yang dimaksud adalah 4 cabang pengetahuan ini. Kata *máthēma* kemudian diberikan akhiran *-ikós* (*-ικός*) yang mengubahnya menjadi kata sifat, sehingga *mathēmatikós* berarti sesuatu yang berkaitan dengan pengetahuan. Akhiran *-ikós* dalam penggunaan modern di Inggris berubah menjadi hanya *-ic* yang kemudian lebih digunakan untuk menamai suatu cabang keahlian atau pengetahuan, seperti *economic, arithmetic, logic, magic, music, acoustic, aerobic, rethoric, physic*, termasuk juga *mathematic*. Perubahan kata yang lain, yakni *mathēmatikoi* (*μαθηματικοί*), mengubah maknanya menjadi subjek yang melakukan, sehingga berarti pembelajar. Padahal, sebenarnya *mathēmatikoi* dalam padanan modernnya adalah matematikawan (*mathematician*) yang sekarang secara sempit dipahami sebagai ahli matematika.

Ketika bola perkembangan pengetahuan berpindah ke peradaban Islam pada abad 12 pun, istilah yang digunakan tetap sepadan, yakni *ulum al Ta'ālīm* yang berarti "ilmu pengajaran' dan pembagian yang digunakan juga serupa dengan *quadrivium*.

Quadrivium, meskipun pertama kali tercetus oleh Plato, kemudian digunakan pada abad pertengahan Eropa sebagai kurikulum level 2 standar akademia. Kurikulum level 1-nya adalah *trivium*, yakni bahasa (*grammar*), logika, dan retorika. Bersama-sama, *quadrivium* dan *trivium* membentuk 7 keahlian berpikir (*thinking skills*) yang menjadi basis pendidikan tinggi di Eropa pada masa itu (kala itu disebut sebagai *liberal arts*). Dalam konteks sekarang, bisa dikatakan *quadrivium* dan *trivium* seperti "mata kuliah wajib" dalam perguruan tinggi, dimana *trivium* menjadi level pertamanya, kemudian dilanjutkan dengan *quadrivium*.

Istilah *mathematics* yang digunakan di bahasa Latin dan Inggris sebagai serapan dari *mathēmatikós* sayangnya pada abad pertengahan lebih menyempit pada astronomi ketimbang secara utuh sebagai keseluruhan ilmu pengetahuan. Dengan berkembangnya ilmu pengetahuan lebih lanjut ke beragam cabang yang berbeda, juga dengan berkembangnya metode empiris sebagai cara mengeksplorasi lebih lanjut cara kerja alam, bidang-bidang *quadrivium* semakin memisah sebagai sebuah cabang tersendiri. Di antara *quadrivium*, bisa dikatakan astronomi yang kemudian menjadi cikal bakal sains (khususnya fisika) secara umum. Ketika astronomi dulunya murni perhitungan terkait posisi dan pergerakan benda langit, dengan adanya unsur pengamatan yang dikenalkan oleh Galileo Galilei Bersama teleskop temuannya sendiri, astronomi tidak lah lagi ilmu yang hanya memperhitungkan pola-pola, namun juga memformulasikannya dalam sebuah model yang menjelaskan penyebab fenomena itu sendiri.

Berkembangnya metode ilmiah yang diinisiasi di peradaban Islam sejak abad 11 dan kemudian disempurnakan lebih lanjut oleh Francis Bacon dan juga Galileo, membuat pengetahuan empiris menjadi sebuah bidang yang pelan-pelan terpisah. Akan tetapi, kala itu belum ada istilah khusus terkait sains, apalagi fisika, biologi, atau semacamnya. Teori-teori tentang fenomena alam pada kala itu lebih dikenal sebagai filsafat alam (*natural philosophy*) sebagai bagian dari *liberal arts* juga pada abad pertengahan. Bahkan, Newton mempublikasikan karyanya terkait gaya-gaya mekanik itu dalam buku yang ia beri judul "*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*" atau prinsip matematika dalam filsafat alam. Singkat cerita, setelah pertengkaran filosofis yang cukup Panjang, antara kaum idealis (platonian) dengan positivis (Aristotelian), sains terpatenkan menjadi ilmu empiris tersendiri meskipun tetap melibatkan logika rasional. Membahas pertengkaran ini akan panjang karena terkait dengan sejarah filsafat sains sendiri. Yang jelas, matematika pun kemudian berdiri sendiri dengan mengurusi apa yang tidak diurusi oleh sains, yakni pola level abstraknya.

Pada awal perpisahannya dengan sains, matematika yang dikembangkan memang masih terkait banyak dengan hal-hal riil seperti teori bilangan, geometri analitik, teori peluang, atau kalkulus. Seiring waktu, matematika semakin tercerabut dari akar kenyataan, hingga akhirnya pada abad ke-19, matematika mulai berbentuk sangat formal dan abstrak dengan diinisiasinya topik-topik seperti teori grup, manifold, atau teori himpunan. Memang beberapa matematikawan masih menjaga hubungan dengan aspek-aspek riil dengan topik-topik seperti sistem dinamik atau geometri non-Euklides, namun pendekatan yang dilakukan pun mulai sangat formal dan rigid ketimbang metodologikal sebagaimana matematika dulunya. Sekarang, matematika sudah menjadi ilmu abstrak yang objeknya menjadi sangat beragam. Pencarian atas fondasi atau definisi matematika pun menjadi sebuah perdebatan sengit pada awal abad ke-20, mengingat betapa "cair" dan luasnya ilmu ini untuk bisa menemukan kesepakatan tunggal.

Eksplorasi Definisi

Matematika, sepanjang pengetahuan penulis, tidak pernah didefinisikan dalam suatu pernyataan tunggal yang tetap. Hal ini disebabkan tingkat abstraksi dan keluasan topik matematika membuat deskripsi dari matematika itu sendiri dapat menjadi multi-perspektif. Terminologinya sendiri sekarang secara formal didefinisikan dengan cara berbeda oleh institusi yang berbeda. Berikut adalah definisi matematika dari paling tidak 7 rujukan populer:

1. *"A broad-ranging field of study in which the properties and interactions of idealized objects are examined."* (Wolfram MathWorld)
2. *"The study of the measurement, properties, and relationships of quantities and sets, using numbers and symbols."* (American Heritage Dictionary)
3. *"The abstract science which investigates deductively the conclusions implicit in the elementary conceptions of spatial and numerical relations, and which includes as its main divisions geometry, arithmetic, and algebra."* (Oxford English Dictionary)
4. *"The science of structure, order, and relation that has evolved from elemental practices of counting, measuring, and describing the shapes of objects."* (Encyclopaedia Britannica)
5. *"The science of numbers and their operations, interrelations, combinations, generalizations, and abstractions and of space configurations and their structure, measurement, transformations, and generalizations."* (Merriam-Webster Dictionary)
6. *"The study of numbers, shapes, and space using reason and usually a special system of symbols and rules for organizing them."* (Cambridge Advanced Learner's Dictionary)

7. *"An area of knowledge that includes topics as numbers, formulas and related structures, shapes and the spaces in which they are contained, and quantities and their changes."* (Wikipedia)

Ketujuh definisi di atas memiliki perbedaan tersendiri, namun paling tidak ada beberapa aspek yang beririsan dan dapat diekstraksi untuk melihat aspek umum dari matematika. Mula-mula, perlu dilihat bahwa definisi selalu terdiri dari 2 bagian, yakni konsep dasar dan ciri spesifik. Konsep dasar merupakan konsep yang cakupannya lebih umum dan abstrak sedangkan ciri spesifik adalah apa yang membedakan entitas yang kita definisikan itu dengan entitas lain dengan konsep dasar yang sama. Sebagai contoh, ketika kita mendefinisikan palu, maka kita lihat dulu apa sebenarnya konsep umum yang mencakupi palu. Tentu banyak yang bisa kita pakai sebagai konsep dasar, karena palu dapat dilihat dengan banyak cara seperti bahwa palu itu adalah benda, adalah materi, adalah kepemilikan, dan berbagai konsep lainnya yang semuanya benar namun terlalu umum untuk dipakai dalam definisi. Kita cukup memakai konsep dasar paling spesifik yang bisa diambil, seperti perkakas atau alat. Selanjutnya, kita tentukan ciri khas dari palu yang membuat ia berbeda dari perkakas atau alat lain. Ciri paling utama palu adalah bahwa ia dipakai untuk memukul paku. Akan dengan mudah kemudian kita definisikan bahwa palu sebagai alat/perkakas untuk memukul paku. Hal yang sama juga dapat kita terapkan untuk mendefinisikan matematika.

Jika kita lihat kembali 7 definisi di atas, strukturnya pun serupa, maka kita akan coba lihat matematika dari 2 unsur definisi. Pertama, dari segi konsep dasar, matematika bisa dilihat sebagai dua konsep berbeda, yakni sebagai sebuah bidang studi (direpresentasikan dengan istilah *study*, field *of study* atau *area of knowledge*) dan sebagai bagian dari sains. Bidang studi merupakan konsep yang jauh lebih luas dari sains karena pada dasarnya sains memiliki karakteristiknya tersendiri sebagai bidang studi. Karena sains sendiri sebenarnya aspek yang lebih spesifik dari bidang studi, maka konsep yang lebih bisa disepakati adalah bahwa matematika merupakan sebuah bidang studi. Apakah matematika itu sains, mungkin akan menghasilkan perdebatan tersendiri. Selanjutnya, kita perlu melihat ciri khusus matematika yang membedakannya dari bidang studi lain. Sayangnya, di bagian ini lah perbedaan itu lahir. Semua definisi di atas mendeskripsikan ciri matematika secara berbeda-beda.

Aspek yang muncul sebagai ciri spesifik matematika hampir di semua definisi (dalam 7 definisi di atas) adalah bahwa objek matematika mencakup bilangan dan struktur (dan terkadang juga ruang). Beberapa menggunakan istilah lain namun secara esensi sama, seperti ukuran atau kuantitas. Aspek struktur sendiri bisa dideskripsikan secara lebih spesifik sebagai relasi dan interaksi antar objek matematika. Meski dinyatakan dengan frase atau diksi yang berbeda, kita bisa lihat bahwa ciri spesifik yang bisa disepakati adalah bahwa matematika mempelajari bilangan, sifat-sifatnya, dan hubungan antar bilangan secara abstrak. Meskipun matematika modern sudah menjadi sangat abstrak sehingga tidak ada bilangan secara eksplisit terlibat di dalamnya, pada dasarnya konsep abstrak itu tidak pernah lepas sepenuhnya dari konsep bilangan. Memang, bilangan sebagai objek matematika tidak selalu dalam bentuk yang selama ini kita ketahui sebagai 1, 2, 3, dan seterusnya, namun telah diabstraksi sedemikian sehingga cukup sifat-sifat esensial dan strukturnya yang dipelajari. Hasil abstraksi bilangan ini yang kemudian dalam definisi Wolfram disebut sebagai "*idealized object*". Sebagai tambahan, objek lain yang juga dipertimbangkan di matematika adalah ruang atau bentuk, yang meskipun bisa dikaitkan juga dengan bilangan, memiliki karakteristiknya sendiri, sehingga banyak definisi juga secara eksplisit menyebutkan dua objek ini, yakni bilangan dan ruang. Ruang atau bentuk kemudian juga dapat diabstraksi hingga pada akhirnya bertemu dengan bilangan sebagai "*idealized object*". Aspek ketiga, aspek struktur, merupakan deskripsi dari bagaimana objek-objek ini berhubungan atau berelasi, sehingga secara umum, yang menyatukan semua definisi di atas adalah bahwa matematika merupakan bidang studi yang mempelajari bilangan dan ruang, sifat-sifatnya, serta struktur di dalamnya.

Definisi ini mungkin sangat sederhana dan cukup jelas. Sayangnya, definisi ini tidak memberi kejelasan atas apa yang sebenarnya dimaksud dengan bilangan dan ruang. Ranah mendefinisikan bilangan adalah ranah dari studi matematika itu sendiri, sehingga yang terjadi adalah matematika menjadi ilmu yang objek studinya didefinisikan sendiri di dalam ilmu itu. Apa itu bilangan, apa yang termasuk sebagai bilangan, konsep umum dari bilangan, dan aspek bilangan lainnya itu merupakan bagian dari studi matematika. Akibatnya, matematika dalam praktiknya bisa secara bebas menentukan apa yang ia pelajari. Meski hanya berangkat dari bilangan dan ruang, matematika bisa memperumum itu tanpa batas. Tidak adanya batasan dari level abstraksi yang dapat dilakukan ini membuat matematika di era modern ini bisa menjadi murni studi yang dapat mempelajari objek ideal seabstrak apapun. Lingkup studi matematika menjadi sangat lebar. Terlebih lagi, bilangan dan ruang adalah objek yang dapat ditemukan di banyak bidang studi lain, membuat aspek aplikatifnya pun sangat luas. Jadi, meskipun seakan matematika bisa didefinisikan, secara bersamaan definisi itu memperluas lingkupnya, bukannya menspesifikkannya. Hal ini bisa sangat jelas direpresentasikan dari defiinsi Wolfram, yang menurut hemat penulis sebenarnya definisi paling tepat dan elegan dari matematika (mengingat Wolfram juga memang secara khusus terfokus di komputasi dan matematika). Secara jujur Wolfram mengatakan bahwa matematika adalah *broad-ranging field of study*, yang mempelajari sifat-sifat dan interaksi (struktur) dari objek ideal. Masalahnya adalah, objek ideal ini sendiri tidak terdefinisi secara jelas. Alhasil, definisi ini membuat matematika jadi tidak terdefinisi.

Berbagai Deskripsi Matematika

Definisi matematika yang bermasalah pada akhirnya menghasilkan sebuah bidang studi yang sangat luas lingkupnya dibandingkan semua bidang studi yang lain. Bahkan mungkin, hanya filsafat yang dapat menandingi keluasan studi matematika. Wolfram sendiri sebenanrya melanjutkan definisi di atas dengan penjelasan berikut: "*…, it has blossomed into an extremely rich and diverse set of tools, terminologies, and approaches which range from the purely abstract to the utilitarian.*" Matematika sekarang sudah menjadi sangat *diverse*, dari yang sangat abstrak sampai yang sangat praktikal. David Hilbert, salah satu matematikawan jenius, pada 1900 bahkan menyatakan, "*mathematics is the foundation of all exact knowledge of natural phenomena*". Juga, Alfred Whitehead pada tahun 1911 mengatakan bahwa "*all science as it grows toward perfection becomes mathematical in its ideas*". Keduanya mengesankan secara universal bahwa matematika terkait dengan segala sesuatu, saking luasnya studi matematika. Pandangan ekstrim terhadap keluasan studi matematika juga sering dideskripsikan dengan gaya Phytagorean yang menganggap segala sesuatu pada akhirnya adalah bilangan. Dua diantaranya adalah Shakuntala Devi yang menyatakan bahwa *"everything around you is mathematics"* dan juga Dean Schlicter yang mengatakan *"go down deep enough into anything and you will find mathematics."*

Dalam bentuknya yang sekarang, apapun seakan bisa jadi matematika. Bahkan, di Wikipedia, "*definitions of mathematics*" (perhatikan bahwa kata *definition* ditulis jamak) adalah sebuah halaman tersendiri yang berbeda dari halaman "*mathematics*". Beberapa kata lain yang punya halaman khusus di Wikipedia untuk definisi secara jamak (*definitions of …)* adalah *fascism, philosophy, education,* dan juga *science fiction*, yang notabene memang aspek-aspek multi interpretasi. Sebagai sebuah bidang studi yang punya gelar paling eksak dan pasti, matematika tidak punya definisi tetap itu menjadi seperti sebuah ironi. Hingga akhirnya Bertrand Russel, salah satu matematikawan fondasi abad 20, mencoba mendefinisikan matematika dalam bentuk yang enigmatik. Ia menyebutkan bahwa matematika sebagai*: the subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true*.

Beberapa deskripsi lain dari matematika juga banyak bermunculan, dimana masing-masing melihat aspek yang berbeda. Kebanyakan deskripsi terhadap matematika pada akhirnya lebih ke melihat karakteristiknya yang paling konkrit. Salah satu karakteristik yang terlihat adalah bagaimana matematika bagaikan seni untuk bermain pola (*pattern*), seperti beberapa pandangan berikut:

- *"A mathematician, like a painter or poet, is a maker of patterns. If his patterns are more permanent than theirs, it is because they are made with ideas."* - G. H. Hardy
- *"Math is sometimes called the science of patterns"* - Ronald Graham
- *"Mathematics is the music of reason."* - James Joseph Sylvester
- *"Mathematics is the classification and study of all possible patterns."* - Walter Warwick Sawyer

Dalam pandangan James Sylvester, matematika bahkan dianggap seperti musik karena musik pada dasarnya adalah seni mengatur pola nada. Kapabilitas matematis pun sering diuji dengan berbagai soal pemecahan pola. Dalam pandangan lain, yang dilihat dari matematika adalah "keliarannya" dalam bermain sesuatu yang abstrak. Sebagaimana telah dibahas sebelumnya, keterpisahan matematika dari realita dimana matematika hanya berfokus pada objek ideal membuat matematikawan bisa "berbuat sesuka hati". Pandangan ini pun cukup populer seperti berikut:

- *The essence of mathematics lies in its freedom*. – Georg Cantor
- *"Mathematics is a place where you can do things which you can't do in the real world."* - Marcus du Sautoy
- *"Mathematics is a game played according to certain simple rules with meaningless marks on paper."* - David Hilbert
- *"Mathematics is written for mathematicians."* - Nicolaus Copernicus
- *"Mathematics is the science of skilful operations with concepts and rules invented just for this purpose. [this purpose being the skilful operation]"* - Eugene Wigner
- *"Mathematics is the art of giving the same name to different things."* - Henri Poincare

Sebagian dari ini sebenanrya seperti sekaligus sarkasme terhadap matematika sendiri. Hanya Cantor yang menyebutkannya dengan lebih positif. Yang lain memberi kesan bahwa seakan yang dilakukan di matematika adalah hal berlebihan dan eksklusif. Hilbert mengatakan bahwa matematika hanya permainan aturan. Coppernicus dan Wigner sama-sama mengatakan bahwa matematika seperti hanya peduli dengan dirinya sendiri. Adapun konteks dari apa yang dikatakan Poincare adalah bagaimana abstraksi memang sebuah proses yang melihat sebuah konsep umum (nama yang sama) dari beberapa hal yang dalam bentuk spesifiknya terlihat berbeda. Sebagai contoh, ketika melihat kucing dan anjing memiliki beberapa kesamaan sifat, mereka diberi sebuah nama yang sama yakni mamalia. Dalam kasus di matematika, himpunan bilangan asli dan himpunan bilangan kompleks, meskipun berbeda, diberi nama (konsep) yang sama, yakni "lapangan". Pandangan Poincare ini serupa dengan Fourier yang mengatakan *"Mathematics compares the most diverse phenomena and discovers the secret analogies that unite them."*

Perspektif lain yang juga dapat diberikan adalah bagaimana matematika lebih ke merupakan sebuah keterampilan ketimbang bidang studi. Danica McKellar mengatakan bahwa *"Math is like going to the gym for your brain. It sharpens your mind."*. Hal ini senada dengan pernyataan *"Mathematics is the science that draws necessary conclusions"* oleh Benjamin Pierce yang mendeskripsikan bagaimana matematika adalah sebuah keterampilan untuk menyimpulkan dengan logika yang tepat (meskipun ia menggunakan kata *science*). Di sisi yang berbeda, Charles Darwin mendeskripsikan matematika bahkan dengan nada antara memuji dan menyindir. Ia mengatakan bahwa *"A mathematician is a blind man in a dark room looking for a black cat which isn't there."* Ini terkait betapa abstraknya yang dipelajari di matematika sehingga seperti mencari sesuatu dalam kegelapan total. Ini wajar karena Darwin adalah saintis sejati yang memang sangat mengandalkan pengamatan empirik. Dari sisi sains juga ada Auguste Comte yang menyatakan bahwa *"Mathematics is the science of indirect measurement"*. Ketika pengetahuan dalam sains alam selalu terkait dengan pengukuran (*measurement*), maka Comte mengaitkan itu dengan melihat bahwa matematika juga adalah salah satu cara untuk melakukan pengukuran, namun secara tidak langsung, karena banyak hal di sains sendiri yang membutuhkan matematika untuk dapat diketahui.

Terakhir, matematika ujung-ujungnya dapat dianalogikan seperti cinta, yang sukar didefinisikan tapi orang-orang tahu mana yang termasuk dan mana yang tidak. Terlebih lagi, cinta hanya bisa dirasakan dan dirayakan keindahannya. Kebanyakan matematikawan murni akhirnya tidak mengambil pusing dengan definisi matematika dan akhirnya mengambil jalur ini, seperti yang terlihat dalam beberapa kutipan berikut.

- *"Mathematics is the most beautiful and most powerful creation of the human spirit."* - Stefan Banach
- *"Pure mathematics is, in its way, the poetry of logical ideas."* – Albert Einstein
- *"It is impossible to be a mathematician without being a poet in soul."* — Sofia Kovalevskaya, Russian mathematician
- *"The pure mathematician, like the musician, is a free creator of his world of ordered beauty."* - Bertrand Russell
- *A mathematician who is not also something of a poet will never be a complete mathematician*. - Karl Weierstrass

Berbagai pandangan berbeda dari beragam orang terhadap matematika ini tidak ada yang sepenuhnya salah dan tidak ada yang sepenuhnya salah, karena ini semua ibarat meraba gajah dari sisi yang berbeda. Meskipun berbeda, semua deskripsi di atas dapat kita simpulkan dalam sebuah pemahaman yang menyeluruh. Dari definisi formal sebelumnya, kita katakan bahwa matematika adalah studi tentang bilangan (dan ruang), sifat, dan strukturnya. Untuk bisa mengeksplorasi sifat-sifat dan struktur bilangan, pola-pola yang terbentuk di dalamnya harus bisa dibaca dan dimanipulasi dengan baik. Pembacaan pola ini kemudian menggerakkan abstraksi matematika ke objek ideal yang lebih umum, dimana tidak banyak restriksi yang ada sehingga matematika jadi cenderung bebas dan fleksibel. Kebebasan matematika ini secara bersamaan tetap berada dalam keteraturan yang luar biasa dalam bangunan ketat logika, sehingga membentuk keindahan tersendiri, yang secara intuitif dirasakan oleh mereka yang tenggelam di dalamnya.

Tiga Aliran

Keluasan lingkup studi matematika adalah apa yang membuat matematika sendiri secara fondasi pun bermasalah. Pada abad ke-20, problematika definisi matematika menghasilkan apa yang dikenal sampai sekarang sebagai *crisis in the foundation of mathematics*, sebuah krisis yang sebenarnya belum terselesaikan secara tuntas hingga saat ini. Dalam langkah awal mencari definisi matematika ini, beberapa matematikawan mencoba melihat aspek utama yang menjadi ciri paling khas matematika. Aspek utama ini, menariknya, bukan dari segi objek studinya, tapi dari bagaimana pendekatan studi terhadap objek itu dilakukan, yakni dengan logika. Karena objek studi matematika adalah objek ideal dan abstrak, maka logika formal adalah alat utamanya. Dalam pemikiran ini, kita bisa secara langsung menganggap bahwa matematika adalah logika itu sendiri. Ini yang kemudian menghasilkan aliran pertama dari filsafat matematika, yakni logisisme. Aliran ini dimotori oleh Bertrand Russel, yang mengatakan bahwa *"All Mathematics is Symbolic Logic"*. Dalam pandangan ini, Russel bahkan mencoba membangun ulang seluruh matematika murni dari logika, yang akhirnya secara terkenal menghasilkan 379 halaman hanya untuk membuktikan 1+1=2, sebagai bagian dari 3 jilid tebal bukunya *Principia Mathematica*. Pandangan bahwa matematika adalah murni logika ini kemudian ditantang atau dimodifikasi oleh banyak matematikawan lain. Salah satu yang dikiritik dari logisisme adalah bahwa logika deduktif tidak terlalu memedulikan bentuk spesifik objek matematika itu sendiri. Salah satu aturan logika klasik, yakni aturan pengecualian antara (*law of exclusive middle*), memastikan bahwa kalau sesuatu itu mustahil A, maka pasti tidak A (tidak ada pilihan tengah). Aturan ini memungkinkan pembuktian keberadaan suatu objek matematika hanya cukup dengan membuktikan bahwa pernyataan sebaliknya (bahwa objek matematika itu tidak ada) itu kontradiktif. Hal ini yang kemudian menghasilkan pandangan yang dikenal dengan konstruktivisme.

Konstruktivisme secara sederhana melihat setiap objek matematika harus bisa dikonstruksikan atau bisa diberi contohnya, sehingga mencegah juga abstraksi berlebihan dari matematika. Konstruktivisme punya banyak turunan, yang mana salah satunya adalah intuisionisme, yang secara umum melihat bahwa matematika adalah konstruksi mental (intuisi) manusia, ketimbang aspek fundamental atau objektif dari realita. Mungkin ini terasa tidak jauh beda dengan logisisme, namun logisisme pada dasarnya melihat logika itu sebagai cara untuk mendeskripsikan aspek fundamental realita. Lebih jauh lagi, terdapat pandangan yang secara total menihilkan aspek representatif dari matematika. Jika logisisme melihat matematika memiliki makna logis yang mewakili prinsip-prinsip tertentu dan intuisionisme melihat matematika memiliki makna intuitif yang mewakili konstruksi pikiran, maka terdapat pandangan lain yang menganggap matematika murni secara umum sebagai sistem formal, yakni kumpulan simbol dan sintaks dengan beberapa aturan untuk memanipulasinya. Pandangan terakhir ini disebut formalisme. Secara sederhana, formalisme ini melihat matematika seperti bentuk umum dari bahasa tanpa semantik (makna), yang sebenarnya secara murni hanya kumpulan label/simbol dan aturan-aturan sintaksnya.

Pada akhirnya, ketiga pandangan yang lahir dari pencarian definisi matematika secara fondasional ini tidak membuahkan sebuah kesepakatan. Sampai sekarang pun, matematika tetaplah menjadi "bidang studi" yang tak punya definisi atau fondasi. Matematika dideskripsikan cukup dari apa saja yang termasuk di dalamnya.

Apakah matematika itu ilmu?

Pada eksplorasi definisi sebelumnya, sesungguhnya terdapat 2 perspektif yang bisa digunakan sebagai konsep dasar matematika. Sampai sini, yang kita pakai adalah perspektif yang lebih umum, yakni bahwa matematika adalah sebuah bidang studi. Akan tetapi, terdapat perspektif lain yang lebih spesifik, yakni bahwa matematika adalah *science*. Bahasa Indonesia dari *science* sayangnya bisa ambigu, karena ia terkadang diartikan sebagai "ilmu" dan terkadang juga diartikan sebagai "sains", yang masing-masing punya definisi sendiri, paling tidak di bahasa Indonesia. Makna dari sains memang merupakan hal yang bisa menjadi bahasan tersendiri. Mendefinisikan sains sama sukarnya dengan mendefinisikan matematika, namun bukan karena sains itu terlalu abstrak atau semacamnya seperti matematika. Sains sukar terdefinisi karena kriteria yang mendefinisikannya punya banyak versi. Tentu membahas detail terkait hal ini di luar konteks tulisan ini, namun kita akan mencoba melihat problematika ini dari sisi umum.

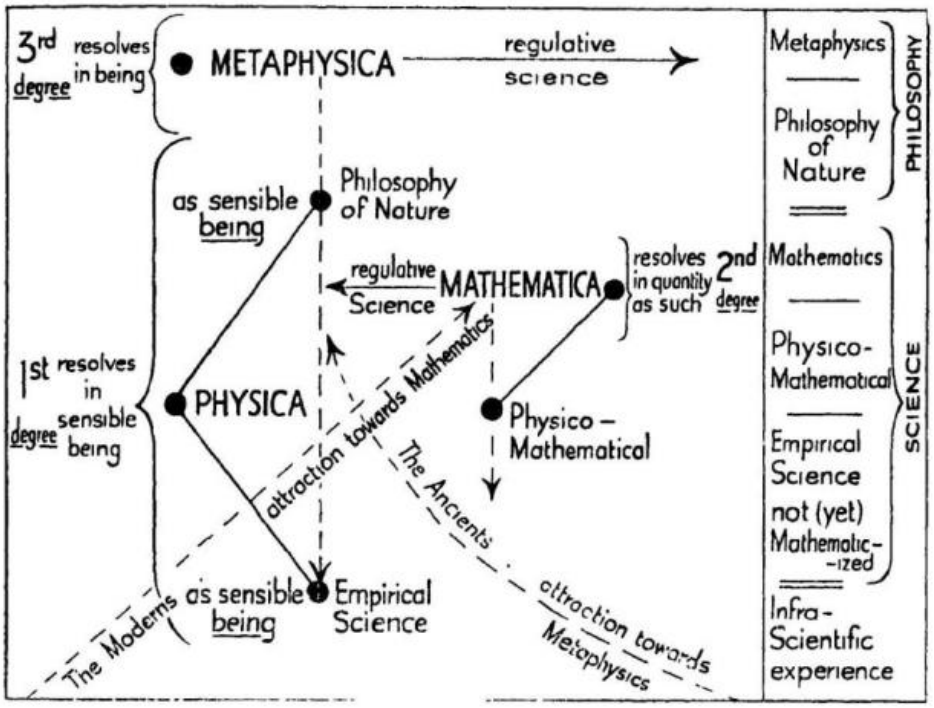
Sains bisa dianggap secara umum sebagai pengetahuan atau studi terkait alam dengan beragam macam bidang dan fokus. Akan tetapi, konsep pengetahuan memiliki isu tersendiri pada awalnya karena menentukan apa yang dapat atau tidak dapat diketahui adalah sesuatu yang problematik di ranah filosofis. Dalam ratusan tahun perdebatan di perkembangan filsafat barat sejak era Enlightment, terdapat perbedaan mendasar terkait apakah sumber pengetahuan itu harus secara konkrit dan riil ada dan termanifestasi dalam alam fisik, ataukah objek pengetahuan itu sebenarnya ada di alam lain yang abstrak. Pandangan pertama dikenal dengan positivisme (empirisisme) sedangkan pandangan kedua dikenal dengan idealisme (rasionalisme). Perlu ditekankan bahwa ini adalah penyederhanaan karena masalah yang terjadi lebih dari sekadar konflik biner dua pandangan. Singkat cerita, akhirnya dari perdebatan ini berakhir dengan integrasi dua pandangan ini dalam apa yang dikenal sebagai *logical positivism*, yang secara sederhana menyatakan bahwa sains adalah apa yang bisa diverifikasi melalui pengalaman empiris dan analisa teoretis dengan logika. Akan tetapi, analisa logika yang diterima adalah apa saja yang dapat direduksi menjadi pernyataan empiris. Dalam level ini, matematika mungkin masih dapat dianggap sains sebagai sistem formal pendukung yang mendampingi verifikasi empiris.

Matematika sebagai sebuah bidang sendiri, terutama matematika modern yang sudah cukup abstrak dan jauh dari representasi realita, menjadi kabur dalam demarkasi sains yang demikian. Matematika, dan juga logika, dalam bentuknya yang murni hanya berurusan dengan sistem formal tanpa harus punya hubungan dengan realita. Dalam kasus ini, matematika sebenarnya tidak dapat disebut sebagai sains. Di sisi lain, terdapat pandangan untuk memperluas konsep sains agar terunifikasi secara lebih umum. Dalam perspektif yang lebih luas, sains dipandang sebagai sebuah "metode" atau "proses" ketimbang sebuah kategori pengetahuan, yang diidentifikasi dengan beberapa kriteria. Sayangnya, bahkan kriteria ini sendiri memiliki banyak versi. Penulis di sini hanya akan menyebutkan kriteria yang paling tidak umum diterima, yakni objektif, sistematis, dan dapat diuji (*testable*). Dari ketiga kriteria ini, sains memiliki definisi umum sebagai usaha sistematik membangun pengetahuan objektif dalam bentuk penjelasan yang dapat diuji.

Dengan definisi di atas, sains bisa dilihat dalam 3 bentuk berdasarkan objeknya, yakni *natural science* (ilmu alam), *social science* (ilmu sosial), dan *formal science*. Baik ilmu alam maupun ilmu sosial sama-sama berhubungan langsung dengan fakta empiris. Cabang ketiga, *formal science,* dikategorikan sebagai ilmu yang objeknya adalah sistem formal, seperti logika dan matematika, yang jelas tidak berhubungan dengan fakta empiris. Akan tetapi, karena *formal science* memenuhi 3 kriteria di atas, maka ia bisa dianggap sains, meskipun kriteria *testability*-nya menggunakan verifikasi rasional ketimbang pengujian empiris. Ini sendiri pun rentan perdebatan, karena sains di awal perkembangannya diidentifikasi dari metode saintifiknya (metode ilmiah), yang secara sederhana berbentuk alur hipotesa-eksperimen-kesimpulan. Jelas bahwa matematika dan logika tidak patuh pada alur metode ilmiah. Pada akhirnya, tidak ada kemutlakan dalam mengatakan apakah matematika itu sains/ilmu atau bukan, karena definisi sains sendiri sama bermasalahnya dengan definisi matematika.

Dari bahasan di sini, kata ilmu dihubungkan erat dengan sains karena memang salah satu terjemahan dari *science* adalah ilmu. Jika dilihat dalam perspektif lain, bila ilmu ini dipandang secara lebih luas, sebagai *knowledge* (yang dalam bahasa Indonesia bisa juga sebagai "pengetahuan") misalnya, maka matematika bisa cukup aman secara langsung dianggap sebagai ilmu. Akan tetapi, perluasan ini mengimplikasikan bahwa hal-hal seperti seni, mistik, filsafat, agama, dan yang lainnya juga dapat tergolongkan sebagai ilmu. Di sisi lain, ilmu dalam perspektif ini setara dengan bidang studi (*area of knowledge*) yang pada akhirnya kembali ke pemaknaan awal.

Yang menariknya dari tarik ulur di atas adalah, jika matematika bukan sains, maka ia termasuk apa? Tentu ini membuka diskursus baru yang lebih panjang. Jika kita bedah secara perlahan, mendefinisikan sains dari keterkaitannya dengan alam fisik, maka mengeluarkan matematika dari sains sama saja mengasumsikan ada "alam" lain selain alam fisik. Beberapa orang saja dapat langsung mengatakan bahwa minimal "alam" lain ini adalah konstruksi mental manusia. Pandangan ini serupa dengan pandangan beberapa intuisionis atau juga formalis. Pertanyaan lebih lanjutnya adalah, apakah ada alternatif selain hal tersebut. Banyak filsuf sejak Plato sudah menduga akan adanya alam ideal abstrak yang berada di luar namun tetap punya hubungan dengan alam fisik. Matematika bisa dianggap berada di alam itu, meski tidak ada cara untuk menunjukkannya karena itu murni filosofikal. Di luar itu, seringkali sesuatu yang berada di luar alam fisik dikategorikan sebagai metafisik. *Logical positivism,* yang disepakati Lingkar Wina, yang kemudian mengukuhkan batas-batas sains, mengeluarkan aspek metafisika dari sains. Terkait hal ini, Jacques Maritain, seorang filsuf perancis menganggap kemudian bahwa matematika berada di antara dua alam ini (fisik dan metafisik). Ia menyebut 3 derajat pengetahuan (*degrees of knowledge*), yang pertama adalah alam fisik dan yang ketiga adalah alam metafisik. Di tengah keduanya ada derajat kedua, yakni matematika, yang punya hubungan dengan alam fisik namun objek di dalamnya sendiri sudah metafisik.



Gambar 1. Diagram Maritain terkait derajat pengetahuan

Salah satu alternatif yang mungkin bisa menjembatani perspektif-perspektif sebelumnya adalah dengan melihat matematika selayaknya bahasa. Kita berkomunikasi dengan kumpulan simbol berupa kata-kata. Setiap simbol ini bisa berelasi dan bergabung dengan simbol lain dalam suatu struktur dan membentuk simbol baru (frase atau kalimat misalnya). Simbol-simbol ini membangun makna tertentu dengan aturan tertentu (*grammar*). Tentu setiap simbol ini pada awalnya merujuk pada aspek-aspek riil di dunia fisik, seperti kata “kursi”, “kucing”, dan lain sebagainya. Akan tetapi, bahasa bisa berkembang secara kompleks sehingga memungkinkan kita berbicara hal yang belum tentu ada representasi riilnya, seperti ketika kita membicarakan negara, masa depan, atau setan. Bahasa punya aturannya sendiri, dan aturan-aturan ini tidak harus berhubungan dengan dunia fisik. Pertanyaaannya kemudian adalah, apa itu bahasa? Secara sederhana, bahasa cukup dipandang sebagai sistem komunikasi. Sains tentang bahasa memang ada, namanya linguistik, tapi itu berbeda dengan bahasa itu sendiri, karena linguistik meneliti khusus tentang aspek kognitif dan sosial dari bahasa secara umum.

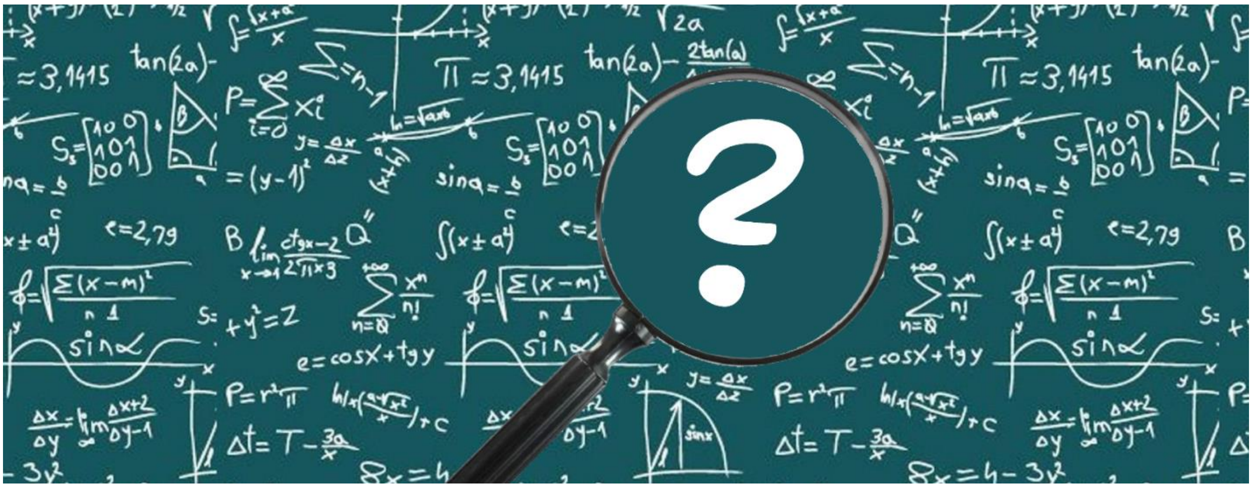
Semua kriteria dari bahasa ini, mengejutkannya, jika dipikirkan secara seksama, serupa dengan matematika. Konsep awal matematika, seperti bilangan, aritmatika, dan geometri, dirumuskan langsung dari alam. Konsep-konsep awal ini kemudian berkembang semakin kompleks dan akhirnya menghasilkan konsep-konsep yang jauh dari realita. Sama dengan bahasa, kita pun bisa memandang matematika sebagai sebuah sistem, atau spesifiknya, sistem formal atau sistem aksiomatik. Dalam perspektif ini, kita keluar dari perdebatan matematika sebagai sebuah ilmu yang memerlukan objek dan metode, namun kita melihat matematika cukup sebagai sistem, yang dipelajari, digunakan, dan juga berkembang.

Jadi, apa itu matematika?

Setelah eksplorasi panjang, sangat sukar menyimpulkan jawaban dari pertanyaan sederhana ini. Matematika sebagai sebuah istilah pada akhirnya bergantung dari yang menggunakan istilah itu sendiri, sehingga maknanya akan sangat bervariasi. Ini merupakan "penyakit" yang juga terjadi pada banyak istilah-istilah abstrak lain juga, seperti cinta, seni, dan bahkan sains sendiri. Untuk hal-hal seperti ini, maka hal termudah adalah cukup mengidentifikasi mana yang termasuk dan mana yang tidak, ketimbang berusaha secara formal menyusun definisinya. Paling tidak, dalam menentukan mana yang merupakan matematika, kita bisa lebih menemui kesepakatan, meski dalam hal ini pun tetap akan ada bagian yang tidak lepas dari perdebatan.

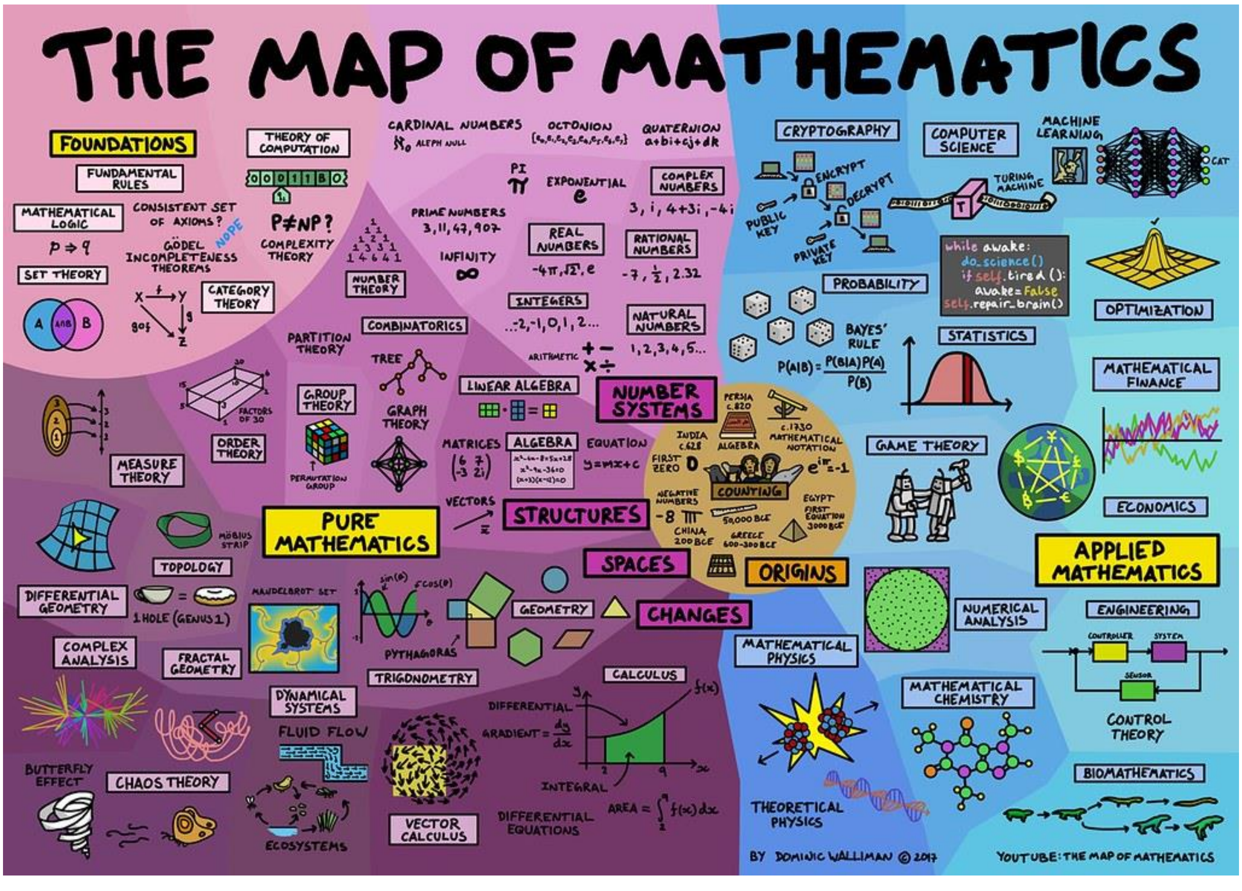
Matematika bila diibaratkan sebuah daerah, maka pusat daerah tersebut bisa cukup mudah diidentifikasi. Akan tetapi, semakin bergerak ke pinggir, maka kita akan semakin sulit menentukan, karena daerah matematika tidak punya perbatasan yang tetap. Persentuhan matematika dengan ilmu lain yang tentunya bersifat terapan, khususnya sains dan teknik, tidak memiliki bentuk demarkasi yang jelas. Sebagai contoh, mekanika fluida sangat padat dengan perhitungan matematis, tapi ia lebih identik dengan keteknikan, terutama teknik mesin. Meskipun begitu, hal seperti itu bukanlah masalah sebenarnya, karena terkadang semua kembali ke problematika definitif, bahwa manusia akan selalu punya keterbatasan mendefinisikan sesuatu. Sebagaimana istilah lain pada umumnya, itu bagaimana ia digunakan saja dalam komunikasi.

Mungkin untuk kali ini, penulis akan menyerahkan saja ke penulis terkait definisi seperti apa yang akan diambil. Minimal, kita semua sudah melihat sisi berbeda dari matematika. Yang paling mengejutkan dari ini semua adalah, problematika ini justru lahir dari sebuah konsep paling absolut yang manusia bisa ketahui. Di tengah keakuratan dan kemutlakannya, matematika justru tidak punya definisi.



Apa yang Dipelajari di Matematika

Matematika adalah sesuatu yang sukar didefinisikan. Di saat yang bersamaan, matematika merupakan faktor utama dalam menggerakkan peradaban manusia dengan kegunaannya yang ada dimana-mana. Meski sulit diformulasikan dalam definisi tetap, salah satu cara paling mudah untuk mendefinisikan sesuatu secara tidak langsung adalah mendeskripsikan apa yang termasuk dan apa yang tidak. Manusia belajar sejak kecil dengan cara seperti ini ketimbang dengan definisi eksak untuk setiap benda atau istilah yang didengar. Sebagai contoh, kita memahami apa itu kucing dengan melihat banyak contoh hewan yang tergolong kucing dan hewan yang tidak tergolong kucing, ketimbang menjelaskan dengan rinci apa itu kucing secara definitif. Oleh karena itu, salah satu langkah baik untuk mendefinisikan matematika secara tidak langsung adalah menyepakati apa yang termasuk dan apa yang tidak.



Gambar 2. Peta domain studi matematika

Sebenarnya sudah cukup banyak yang memetakan atau menggambarkan objek-objek kaji matematika secara utuh. Salah satu yang sangat bagus adalah inforgrafis yang dipublikasikan oleh *Domain of Science* yang memberi peta bergambar atas apa saja yang terlingkup di matematika. Apa yang digambarkan sudah sangat bagus dimana topik-topik dalam matematika dikelompokkan dalam area-area tertentu, namun hubungan antar objeknya masih terpisah juga makna setiap kategori belum tergambar karena memang lebih fokus pada pengelompokan topik-topik yang berdekatan. Dalam tulisan kali ini penulis ingin mengambil pendekatan berbeda agar bisa melihat juga hubungan antar topik-topik dan objek-objek kaji di matematika.

Pada Awalnya

Kita akan coba menelusuri bagaimana matematika berkembang dan dari situ memetakan objek-objeknya. Lingkup studi ilmu matematika berubah dari waktu ke waktu, maka konteks perkembangannya perlu dilihat untuk melihat bagaimana teritori matematika meluas sampai saat ini.

Matematika di era klasik, paling tidak sebelum abad ke-17, masih memiliki tingkat abstraksi yang rendah sehingga lingkupnya masih cukup tegas, meskipun memang batasannya dengan ilmu alam sedikit kabur karena sains sebagai sebuah ilmu empiris yang berbeda dari matematika belum berkembang secara matang. Matematika pada awalnya hanya formulasi langsung dari konsep-konsep sederhana seperti pembilangan dan jarak. Manusia secara natural mengembangkan pembilangan untuk memberi label dalam pengurutan atau banyaknya objek. Konsep jarak juga merupakan hasil natural langsung dari persepsi manusia terhadap ruang. Ketika pembilangan menghasilkan konsep-konsep yang lebih umum seperti aritmatika, konsep jarak berkembang menjadi geometri.

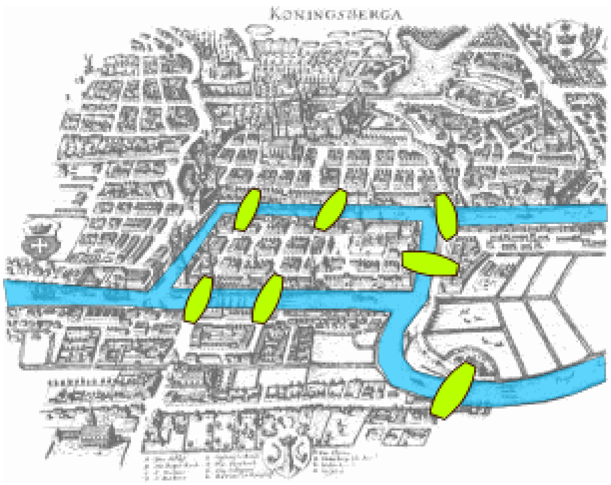
Ingat kembali bahwa di awal perkembangannya, matematika digolongkan dalam quadrivium, 4 cabang, yakni aritmatika, geometri, astronomi, dan musik. Astronomi sering tercampur oleh astrologi yang kemudian membuat bahan kajiannya lebih pada pola bintang dan kaitannya dengan beragam aspek lain. Di sisi lain, astronomi juga pada kala itu banyak berusaha memetakan dan menghitung posisi dan pergerakan benda langit, yang pada dasarnya juga menggunakan konsep-konsep dari geometri. Secara umum, paling tidak dapat matematika klasik fokus pada 2 objek kaji yang berbeda, yakni kuantitas (bilangan dan aritmatika) dan bentuk (geometri). Dua hal ini tidak saling lepas, karena geometri juga harus mengkaji kuantitas dalam bentuk besaran-besaran geometris (sudut, panjang, luas, dll). Dalam hal ini, kuantitas pun dapat dibagi menjadi dua, yakni kuantitas diskrit dan kuantitas kontinu. Kuantitas diskrit terkait dengan jumlah, sedangkan kuantitas kontinu terkait dengan ukuran dan besaran geometris. Kedua kuantitas ini sama-sama direpresentasikan oleh bilangan, yang pada masa lampau tidak terlalu dibedakan, karena konsep fundamental dari kuantitas kontinu baru terbangun di era modern.

Matematika Diskrit & Geometri

Aritmatika yang berkembang di awal masih merupakan eksplorasi terhadap bilangan, sifat-sifatnya, dan operasi-operasi yang dapat dilakukan. Akan tetapi, bilangan yang menjadi objek studi masih merupakan bilangan bulat, dan di kemudian hari berkembang menjadi bilangan rasional. Hal ini karena memang bilangan pada awalnya masih sebatas bilangan asli, yang merupakan representasi langsung dari kuantitas diskrit. Perkembangan operasi lebih lanjut pada bilangan menghasilkan kebutuhan adanya konsep negatif dan juga pecahan, yang memperluas konsep bilangan asli menjadi bilangan bulat, dan juga rasional. Bilangan ini memiliki banyak sifat-sifat dan hubungan yang memang dari awal terus dieksplorasi. Konsep seperti FPB (faktor persekutuan terbesar) atau KPK (kelipatan persekutuan terkecil) juga berkembang dari pengembangan konsep bilangan ini. Penelusuran matematikawan terhadap bilangan kemudian mencirikan banyak kategori bilangan tertentu yang punya sifat unik, seperti bilangan prima, bilangan sempurna (*perfect number*), atau bilangan ramah (*amicable number*). Semua pengembangan ini kemudian menjadi topik khusus di matematika sampai sekarang yang dinamakan **teori bilangan**. Dalam era modern, prinsip-prinsip dalam teori bilangan sendiri kemudian dapat digunakan dan dikembangkan lebih lanjut untuk enkripsi informasi, yang selanjutnya termatangkan dalam **teori koding dan kriptografi**. Teori koding mengurusi bagaimana enkripsi informasi dapat dilakukan agar apabila ada perubahan atau *error* terjadi, informasinya tidak hilang atau dapat diselamatkan ketika didekripsi. Adapun kriptografi mengurusi bagaimana enkripsi informasi dapat dilakukan agar tidak dapat didekripsi dengan mudah.

Di sisi yang lain, ketika konsep bilangan dikembangkan ke berbagai macam teorema, proses membilangnya sendiri menjadi masalah terpisah. Hal ini dikarenakan membilang atau mencacah sesuatu dalam beberapa kasus kompleks bisa menjadi tidak sederhana. Sebagai contoh, apabila ada 20 prajurit dan setiap hari 2 orang prajurit harus digilir untuk bertugas dalam suatu pos, maka pada berapa hari giliran itu akan berulang? Masalah seperti ini bisa saja dijawab dengan membuat daftar panjang (*listing*) semua kemungkinan kombinasi 2 prajurit yang bisa dipilih dari 20 prajurit tersebut dan kemudian menghitung berapa banyak semua kombinasi itu, namun tentu saja ini pekerjaan yang sangat merepotkan, terutama apabila jumlahnya mulai membesar. Maka dari itu, diperlukan cara khusus agar total banyaknya kombinasi bisa didapatkan tanpa harus melakukan *listing* secara manual. Cara ini yang kemudian berkembang menjadi konsep **enumerasi**. Dalam enumerasi, biasanya matematikawan berusaha menghitung banyaknya cara atau banyaknya konfigurasi tertentu dari suatu hal. Sebagai contoh, pertanyaan berapa banyak cara dua orang dapat duduk di barisan 10 kursi adalah masalah enumerasi. Paling tidak, ada dua bentuk umum dari enumerasi, yakni kombinasi dan permutasi. Perbedaan dasar dari keduanya hanya dari ada atau tidaknya urutan pada konfigurasi yang akan dihitung. Cabang matematika terkait ini pun juga dikenal dengan nama **kombinatorik**.

Baik kombinatorik maupun teori bilangan sama-sama mengurusi objek diskrit, yakni bilangan bulat (meskipun dalam beberapa aspek, teori bilangan juga melibatkan bilangan rasional, namun bilangan rasional sendiri adalah diskrit). Keduanya kemudian menjadi topik khusus di matematika yang memiliki nama langsung **matematika diskrit**. Meskipun awalnya konsep diskrit hanya terbatasi di bilangan bulat, pada perkembangannya, perkembangan konsep seperti graf membuat kajian diskrit meluas. Graf secara sederhana dapat dipahami sebagai representasi jaringan hubungan antar objek sembarang. Contoh graf adalah jaring-jaring makanan, peta jalan antar kota, jaringan komputer, dan lain sebagainya. Salah satu permasalahan yang menjadi pemicu perkembangan Graf adalah masalah jembatan Konigsberg, sebagaimana diilustrasikan di bawah. Graf menghasilkan topik tersendiri yang dinamakan **teori graf**, namun masih dianggap bagian dari matematika diskrit.



Gambar 3. Ilustrasi masalah jembatan Konigsberg

Seiring aritmatika berkembang menjadi teori bilangan, cabang kedua dari cabang awal matematika, geometri, juga berkembang, namun secara lebih perlahan. Konsep geometri pertama yang berkembang adalah **geometri Euklides**, yang bersifat deskriptif dan aksiomatik. Garis, titik, dan bentuk-bentuk lain lebih dideskripsikan ketimbang kemudian direpresentasikan dalam bentuk lain. Prinsip-prinsip dasar geometri juga diformulasikan sebagai aksioma ketimbang sebagai teorema yang perlu dibuktikan. Salah satu aksioma dasar geometri Euklides adalah bahwa suatu garis dapat dibentuk dari 2 titik. Prinsip-prinsip geomeri Euklides dapat dikatakan cukup sederhana sehingga perkembangannya lebih banyak ke aspek impelentatif, seperti perhitungan radius bumi atau pengukuran benda langit. Secara spesifik, geometri Euklides juga dikembangkan dengan mengabaikan konsep jarak atau ukuran, menghasilkan apa yang dikenal sebagai **geometri Afin** (*Affine geometry*).

Geometri Afin hanya melihat hubungan antar objek geometri tanpa melihat aspek ukurannya.

Pada abad ke-16, Rene Descartes mulai mengembangkan cara lain melihat objek geometri, yakni dengan sistem koordinat, yang kemudian kita kenal sebagai koordinat (Des)Cartesian. Geometri dengan koordinat memiliki kelebihan tersendiri dan membentuk kajian baru bernama **geometri analitis**. Di sisi lain, geometri Euklides sebenarnya hanya berurusan dengan bentuk-bentuk datar, dan pada awalnya tidak diberi nama khusus "Euklides". Baru kemudian ditemukan bahwa ternyata bentuk-bentuk yang tidak datar ternyata memiliki prinsip yang berbeda dengan bentuk datar. Contohnya adalah sudut-sudut segitiga yang berjumlah tepat 180 derajat pada bidang datar, ternyata bisa lebih dari 180 derajat di permukaan bola. Dibuatlah paradigma baru geometri yang kemudian diberi nama **geometri non-Euklides** untuk membedakan dengan yang geometri bidang datar. Contoh umum geometri non-Euklides adalah geometri sferis (pada bola) dan geometri hiperbolik. Geometri ini kemudian tentu bisa dikembang ke berbagai bentuk umum lainnya. Geometri tiga dimensi biasanya cukup sukar untuk digambarkan, sehingga kemudian berkembang apa yang dikenal sebagai **geometri proyektif**, yakni geometri yang melihat objek geometris dalam bentuk proyeksinya pada bidang dua dimensi.

Analisis & Statistika

Sampai kira-kira abad ke-16, objek kaji matematika tidak berubah banyak, namun hanya bertambah rumit dan spesifik, seperti berkembangnya teori bilangan. Baru ketika Isaac Newton dan Gottfried Leibniz mulai mempelajari gerak benda, dimana konsep dasarnya adalah perubahan kuantitas, pendekatan baru mulai dikembangkan dalam matematika. Menangani "perubahan" bukan hal yang mudah, karena perubahan harus bisa didefinisikan dalam suatu instan atau bingkai waktu tertentu, ketimbang dalam interval. Ibarat ketika melihat foto mobil, kita tidak bisa mengetahui apakah mobil itu diam atau bergerak, dan kalaupun kita tahu ia bergerak kita tidak bisa tahu berapa kecepatannya. Foto merupakan keadaan instan yang terambil pada waktu spesifik, sehingga foto tidak punya informasi terkait perubahan apa yang terjadi. Agar kita dapat mengetahui perubahan apa yang terjadi, maka dibutuhkan foto lain di waktu yang berbeda sebagai pembanding. Jika jarak waktu antar foto terlalu jauh, maka perubahan yang tertangkap bisa tidak representatif karena kita tidak bisa mendeteksi apa yang terjadi di antara pengambilan 2 foto. Bila dianalogikan melalui video, maka video dengan *frame rate* kecil akan lebih terlihat patah-patah seperti pada video CCTV, ketimbang *frame rate* besar seperti pada film.

Dalam konteks fenomena alam, untuk bisa memformulasikan perubahan, kita hanya bisa melihat interval antar keadaan. Jika sebuah mobil pada dalam 2 detik berpindah posisi sejauh 3 meter, maka kita bisa formulasikan kecepatannya sebagai 1.5 meter per detik. Akan tetapi, kita tidak tahu apakan selama 2 detik itu mobilnya sebenarnya mengalami perubahan kecepatan atau tidak, sehingga seperti analogi video tadi, kita butuh interval sekecil mungkin untuk menangkap perubahan yang benar-benar representatif. Masalah ini dikenal dengan konsep perubahan instan, yakni bagaimana mengukur perubahan dalam keadaan instan (bukan dalam interval tertentu). Konsep perubahan instan ini butuh melihat interval yang sangat kecil namun tidak boleh sama dengan 0 (karena interval 0 berarti keadaan tetap di satu waktu). Dari kebutuhan ini, berkembang konsep infinitesimal, yang secara sederhana dapat dipahami sebagai suatu ukuran yang sangat kecil mendekati 0, tapi tidak sama dengan 0. Dari sini, lahir lah kalkulus, yang awalnya sebagai sebuah alat untuk menghitung perubahan, yang sangat dibutuhkan dalam memformulasikan gerak benda.

Kalkulus, meski awalnya hanya terasa seperti sebuah pendekatan lain untuk menghitung gerak, memberi perhatian khsusus tersendiri terkait kontinuitas. Hal ini disebabkan infinitesimal hanya bisa dipahami dalam kerangka kerja kontinu, dimana suatu ukuran dapat mengecil tanpa batas. Sebagai contoh, dalam kerangka kontinu, kita bisa memiliki barisan 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, dan seterusnya tanpa perlu mencapai 0. Hal ini dimungkinkan karena bilangan yang dipandang kontinu, tidak terbagi secara diskrit sehingga ada "partisi terkecil" yang menghentikan barisan di atas. Kuantitas kontinu tidak lagi bisa dipandang remeh karena ternyata melibatkan konsep-konsep di luar intuisi seperti infinitesimal. Bilangan riil, sebagai representasi langsung dari kuantitas kontinu, menjadi objek kajian tersendiri, yang kemudian menjadi cikal bakal cabang khusus bernama **matematika analisis**.

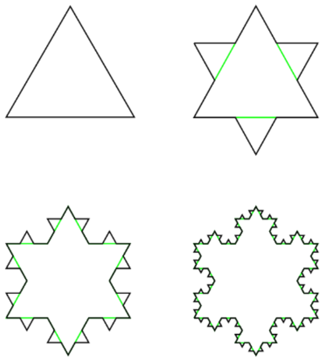
Meskipun bilangan riil menjadi representasi awal kontinuitas, berkembangnya bilangan kompleks yang sebenarnya merupakan ekstensi dari bilangan riil dengan adanya dimensi imajiner, konsep kontinuitas juga meluas ke bilangan kompleks. Ketika studi khusus terkait sifat-sifat himpunan bilangan riil menghasilkan topik **analisis riil**, maka hal serupa juga berlaku untuk himpunan bilangan kompleks yang menghasilkan **analisis kompleks**. Kalkulus menjadi bagian dari keduanya namun diabstraksi lebih lanjut. Bilangan kompleks kemudian dapat diekstensi lebih lanjut lagi menjadi hiperkompleks, yang salah satu contoh terkenalnya adalah ***quaternions*** yang merupakan ekstensi 4 dimensi dari bilangan kompleks dengan tambahan 2 variabel "imajiner". Dari kalkulus sendiri, dalam beberapa aplikasi sering dibutuhkan penerapan konsep-konsep kalkulus bukan pada bilangan, namun pada fungsi sebagai objek tersendiri. Hal ini menghasilkan apa yang dikenal dengan **kalkulus variasi**, yang melihat "perubahan fungsi" ketimbang perubahan nilai, dan kalkulus variasi ini menjadi cikal bakal topik **analisis fungsional** yang lebih umum lagi melihat fungsi sebagai objek selayaknya bilangan. Modifikasi kalkulus lainnya yang dikembangkan adalah derajat turunan (derivatif) dan integral yang tidak harus diskrit, sehingga ketimbang turunan pertama atau turunan kedua, kita bisa melakukan turunan setengah. Kalkulus seperti ini disebut **kalkulus fraksional**.

Dengan berkembangnya konsep kalkulus, kajian geometri non-Euklides dapat bergerak lebih jauh melalui perspektif *infintesimal* menghasilkan pendekatan yang lebih umum bernama **geometri differensial**. Geometri ini menerapkan prinsip-prinsip kalkulus pada kajian geometri, khususnya pada ruang atau bidang yang mulus. Lebih jauh lagi, bentuk-bentuk geometris dapat diabstraksi lagi dengan hanya melihat sifat umumnya saja meski diubah-ubah. Abstraksi ini menghasilkan kajian matematis yang disebut **topologi.** Meskipun mungkin topologi berasal dari konsep geometri, namun pendekatan pengembangannya memanfaatkan transformasi kontinu yang sebenarnya memakai paradigma infintesimal, sehingga terkadang topologi digolongkan juga sebagai bagian dari matematika analisis. Dalam paradima topologi, sebuah cangkir dan sebuah donat itu sama karena kita bisa melakukan perubahan kontinu antar keduanya (ditandai dengan tidak berubahnya jumlah "lubang").

Gambar 4. Ilustrasi bagaimana donat secara topologis sama dengan cangkir.

Beberapa eksplorasi geometri dengan perspektif infinitesimal juga memicu berkembangnya objek geometri aneh yang dikenal sebagai fraktal. Fraktal adalah suatu bentuk geometri yang memiliki struktur serupa pada skala yang berbeda (dan tak terhingga). Beberapa fraktal awal yang ditemukan adalah kepingan salju Koch dan segitiga Serpinski. Pengembangan analisis kompleks juga menghasilkan banyak fraktal yang lebih elegan seperti himpunan Mandelbrot dan himpunan Julia.

Ingat kembali bahwa kuantitas kontinu pada awalnya digunakan sebagai ukuran terutama dalam kajian geometri. Seperti halnya semua hal di matematika, konsep ukuran pun juga diperumum menjadi apa yang dikenal sebagai **teori ukuran**. Teori ini melihat bagaimana suatu himpunan dapat diukur dengan pengukur seperti apa. Geometri fraktal juga bisa dianggap sebagai salah satu kajian dari teori ukuran karena fraktal memiliki atribut ukuran yang tidak wajar. Selain itu, fraktal juga memiliki "dimensi" yang fraksional (tidak bulat). Sebagai contoh, kepingan salju Koch memiliki luas terhingga namun kelilingnya tak terhingga, dan juga ia memiliki dimensi 1.2618.



Gambar 5. Bagaimana fraktal keping salju Koch dibentuk secara rekursif

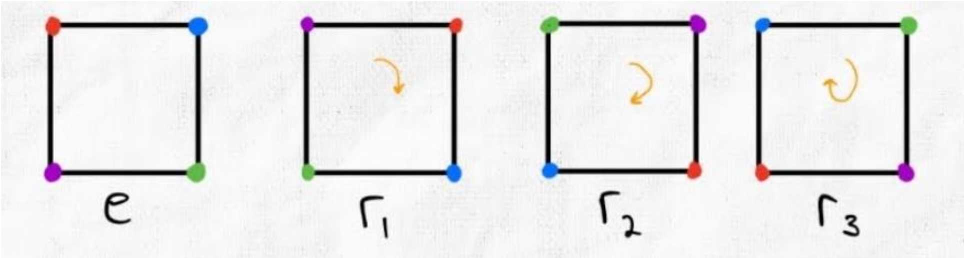
Konsep ukuran dalam matematika analisis ternyata kemudian juga bisa memberi basis matematis pada **teori peluang**, yang pada awal berkembangnya cenderung bersifat konseptual dan perhitungan praktis. Teori peluang sendiri adalah ilmu yang mengurusi ketidakpastian atau probabilitas. Dalam perspektif matematis, probabilitas ini perlu dikuantifikasi dan kemudian direpresentasikan dalam struktur matematika tertentu, sehingga bisa dikembangkan lebih jauh. Terkadang, ketidakpastian ini terwujud dalam rangkaian yang saling mempengaruhi, sehingga membentuk sebuah proses. Dalam hal ini, dikenal istilah **proses stokastik** yang secara khusus melihat gabungan ketidakpastian yang membentuk rangkaian proses. Contoh aplikatif dari proses stokastik adalah lemparan uang koin berturut-turut, keadaan cuaca hari ke hari, fluktuasi saham, pergerakan molekul, dan lain sebagainya. Proses stokastik maupun teori peluang secara utuh juga membentuk cabang ilmu **statistika matematis**.

Teknik di teori peluang dapat dimanfaatkan untuk beragam keperluan, terutama untuk menganalisis data dan menguji ketidakpastian, sehingga sering diaplikasikan pada banyak bidang lain. Dengan berkembangnya teknik-teknik implementatif dari teori peluang, statistika perlahan memisah dari matematika sebagai sebuah disiplin sendiri yang masih tetap memanfaatkan basis statistika matematis yang diaplikasikan. Memang, banyak juga yang menganggap statistika masih termasuk dalam matematika, namun konsep statistik sudah meluas sampai mencakup hal-hal yang cukup jauh dari prinsip matematika seperti teknik sampling, desain eksperimen, dan uji hipotesis, sehingga paradigma umum yang lebih aman digunakan adalah bahwa statistika merupakan ilmu sendiri yang menggunakan teori-teori di matematika.

Aljabar dan Fondasi

Kita telah lihat bagaimana beberapa aspek dalam matematika melangkah terus digeneralisasi. Pada dasarnya, generalisasi adalah proses natural yang sering dilakukan dalam memahami sesuatu. Manusia melakukannya setiap saat seiring kapabilitas kognitifnya berkembang. Ketika manusia melihat kucing dan anjing memiliki beberapa persamaan, maka manusia akan menciptakan label atau konsep khusus yang lebih umum dan bisa mengakomodasi persamaan-persamaan tersebut. Ketika tercipta distingsi yang jelas antara konsep yang umum dengan konsep yang khusus, penelusuran atau penyelidikan sifat-sifat yang lebih detail bisa dilakukan. Dari proses dasar ini pengetahuan dapat berkembang dan terpetakan dengan baik. Hal yang sama juga dilakukan dalam matematika. Hanya saja, proses generalisasi yang dilakukan lebih bebas karena berurusan dengan objek yang lebih abstrak.

Ketika satu per satu konsep-konsep dan teorema-teorema partikluer dalam matematika terus dikembangkan, maka perlahan kesamaan-kesamaan dari beberapa konsep ini mulai diamati juga untuk kemudian dilakukan generalisasi. Dari sini, matematikawan mulai melihat lebih jauh bahwa sebagian objek matematika memiliki sifat-sifat atau hubungan yang mirip sehingga ketimbang melihat objek-objek ini sebagai topik yang terpisah, lebih baik menelitinya sebagai sebuah konsep yang sama karena memiliki struktur yang sama. Sebagai contoh, ketika kita melakukan rotasi (memutar) suatu persegi dalam kelipatan 90 derajat misalnya, proses rotasi ini ternyata serupa seperti proses penjumlahan bilangan bulat modulus 4 (himpunan bilangan yang hanya terdiri dari 0, 1, 2, dan 3, dimana setelah 3 balik ke 0 lagi). Memutar persegi 90 derajat sekali itu seperti menambah suatu bilangan dengan 1, memutar 2 kali (atau memutar 180 derajat) seperti menambah dengan 2, ketika memutar 4 kali, maka persegi akan kembali ke konfigurasi awal karena seperti menambah dengan 4 pada bilangan modulus 4. Dua konsep ini kemudian dikatakan strukturnya sama, karena hubungan dan perilaku antar objeknya serupa. Daripada secara spesifik mempelajari objek yang berbeda-beda, matematikawan lebih melihat strukturnya secara umum sehingga apa yang berlaku pada struktur yang sama, meski objeknya berbeda, akan berlaku juga. Matematikawan kemudian mengeneralisasi dengan mengembangkan **teori grup**, yang hanya fokus ke struktur ketimbang objek partikular.



Gambar 6. Rotasi pada persegi membentuk grup berisi 4 elemen.

Dari teori grup, berkembang suatu objek kaji baru di matematika yakni struktur antar objek matematika itu sendiri. Struktur sebenarnya ada juga di geometri, ada juga di kombinatorik, ada di bilangan, ada di statistik, tapi secara umum struktur itu sendiri kemudian menjadi objek yang dikaji secara khusus. Dari sini berkembang cabang matematika yang secara spesifik mempelajari struktur, yakni **aljabar**. Mungkin istilah ini agak sedikit membingungkan karena yang umumnya diketahui orang adalah bahwa aljabar terkait dengan penyelesaian suatu persamaan. Akan tetapi, dalam level yang lebih abstrak, penyelesaian persamaan bisa lebih "efektif" dilakukan jika kita memahami strukturnya. Secara spesifik, aljabar yang meneliti struktur umum disebut **aljabar abstrak**.

Struktur yang diteliti dalam aljabar abstrak ada banyak, dan semua merupakan generalisasi dari objek-objek yang lebih spesifik. Kita sudah lihat bagaimana struktur transformasi di geometri menjadi teori grup. Struktur dalam beberapa konsep bilangan merupakan **lapangan** dan **gelanggang**. Penyelesaian sistem persamaan linier, yang merupakan versi primitif dari aljabar (sekarang disebut spesifik sebagai aljabar linier), memanfaatkan struktur yang disebut **ruang vektor**. Ruang vektor sendiri dapat digeneralisasi menjadi struktur yang lebih umum, yakni **modul**. Struktur-struktur ini ibarat *blueprint* dasar dalam membangun suatu bangunan matematis. Sebagai analogi, struktur bangunan hotel bertingkat memiliki standar tersendiri, yang berbeda dari struktur bangunan rumah biasa, atau dari struktur menara pencakar langit. Ketika membangun suatu rumah spesifik, kita tinggal mengikuti standar struktur bangunan rumah. Analogi lain dari struktur adalah konsep organisasi. Struktur organisasi sosial dengan struktur perusahaan bisnis tentu akan berbeda, namun masing-masing punya standar yang mana sehingga organisasi sosial yang berbeda akan cenderung memiliki struktur yang sama.

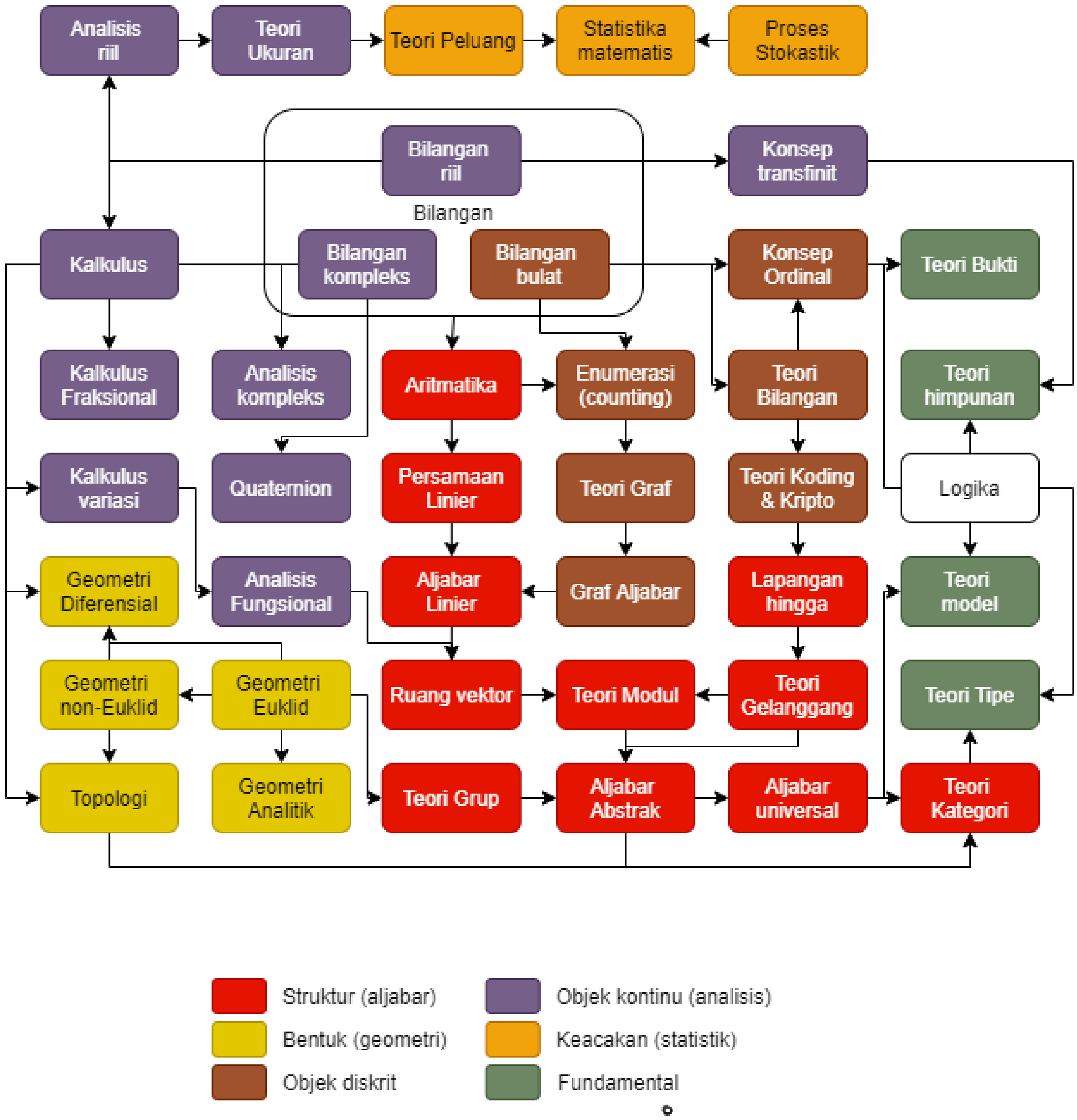
Dalam generalisasi lebih lanjut, setiap struktur dalam aljabar kemudian diteliti secara general, menghasilkan kajian dalam matematika yang disebut **aljabar universal** atau aljabar umum. Lebih jauh lagi (memang tidak ada habisnya generalisasi matematika), berkembang **teori kategori** yang tidak lagi melihat struktur yang berbeda secara spesifik, namun melihat semuanya hanya hubungan antar objek. Dalam analogi stuktur organisasi tadi, aljabar universal melihat standarisasi umum struktur dari semua lembaga/organisasi, sedangkan teori kategori melihat semuanya murni sebagai interaksi atau hubungan antar manusia atau antar kelompok manusia.

Dalam sisi paling dalam matematika, semua ini bermuara pada paling tidak 4 cabang/teori. Dari sisi aljabar, teori kategori memiliki konsep yang lebih umum yang dikenal sebagai **teori tipe**, sedangkan aljabar universal merupakan bentuk spesifik dari **teori model**. Apa sebenarnya dua teori ini terlalu panjang dan rumit untuk dibahas di sini. Dari konsep bilangan riil yang kontinu, berkembang konsep transfinit (ketakterhinggaan bertingkat) oleh Georg Cantor yang akhirnya memicu beberapa paradoks dalam memahami himpunan sebagai konsep paling sederhana di matematika. Hal ini berujung pada aksiomatisasi yang sangat hati-hati dari himpunan sebagai fondasi matematika dan jadilah **teori himpunan**. Terakhir, bilangan asli yang diperumum menghasilkan konsep ordinal, yang kemudian menjadi salah satu pendekatan dalam apa yang disebut sebagai **teori bukti**. Kesemua teori dasar matematika ini berdiri di atas aturan rigid **logika**.

Secara Keseluruhan

Secara umum, apa yang dipaparkan sebelumnya dapat digambarkan dalam peta ringkas di bawah, yang mana panah menunjukkan arah pengembangan atau historis, dalam arti ujung panah dimotivasi, dipicu, mencakup, berkembang dari, atau hasil generalisasi dari pangkal panah. Peta ini menggambarkan bagaimana matematika berkembang, dimana dapat dilihat bahwa sumber dari semua panah berawal dari 3 kotak, yakni bilangan, geometri Euklid, dan logika. Tiga kotak ini merupakan aspek primitif yang sudah ada sejak era klasik, meskipun penggunaan logika secara formal baru dilakukan pada era modern. Tentu saja dalam kotak bilangan sendiri, bilangan kompleks baru ditemukan belakangan dan bilangan riil sendiri baru secara formal didefinisikan di era modern.

Peta ini bukan representasi lengkap, karena banyak topik-topik partikular matematika yang tidak tercakup di sini. Selain itu, banyak juga topik-topik dalam peta ini yang sebenarnya saling berhubungan namun tidak dapat disambungkan dengan anak panah karena akan menambah kompleksitas bagan ini sendiri. Mungkin juga akan banyak matematikawan yang kurang setuju pengelompokan dan pengaitan antar topik di sini karena terkadang ada beberapa perspektif berbeda di kalangan matematikawan terkait bagaimana melihat topik di dalam matematika. Akan tetapi, penulis sudah mencoba seobjektif dan selengkap mungkin menggambarkan ini dengan cara yang paling padat dan kompak, sehingga sebagian besar narasi pengembangan matematika bisa cukup terangkum dalam gambar yang terbatas.



Gambar 7. Peta matematika secara keseluruhan.

Matematika Terapan

Apa yang terpaparkan di atas merupakan topik-topik dalam matematika murni, yang tidak melibatkan aspek implementatif ataupun aplikatif. Teorema-teorema dalam matematika murni berlaku di dalam dirinya sendiri dengan memegang prinsip konsistensi. Akan tetapi, tentu saja matematika akan bersentuhan dengan ilmu lain, karena proses pengembangannya pun tidak bisa dilepaskan dari kebutuhan-kebutuhan riil manusia. Dari awal mula perkembangan matematika sendiri pun jelas yang diformulasikan adalah aspek-aspek langsung dari realita.

Banyak topik aplikatif seperti sistem dinamik, analisis numerik, teori kontrol, metode optimisasi, dan lainnya, yang belum digambarkan di atas, namun pada dasarnya topik-topik aplikatif adalah utilisasi atau implementasi lebih lanjut dari apa yang ada di murni. Juga sebenarnya, hampir semua topik di peta ini, termasuk teori kategori sekalipun, punya aspek aplikatifnya sendiri-sendiri dalam level tertentu. Matematika terapan agak sukar untuk dipetakan atau dikategorikan karena ia lebih kepada campuran beragam topik yang disesuaikan pada kebutuhan masalah yang akan diselesaikan. Sebagai contoh, teori graf dan konsep diferensial bisa membentuk topik tersendiri dalam hal dinamika jaringan. Aljabar linier dengan statistika juga bisa berkembang menjadi teknik-teknik sains data dan pembelajaran mesin.

Apabila melihat aplikasinya satu-satu mungkin akan rumit karena pada dasarnya setiap apa yang dikembangkan di matematika merupakan aspek abstrak dari realita sehingga selalu bisa dipandang sebagai alat untuk membongkar realita lebih jauh. Maka dari itu juga, tidak ada konsensus terkait apa yang dimaksud atau apa yang tercakup dalam matematika terapan. Beberapa matematikawan kemudian membedakan konsep "matematika terapan (*applied matehmatics*)" dengan "terapan dari matematika" (*application of mathematics*) yang mana matematika terapan lebih terfokus pada metode matematis yang lebih umum ketimbang dibatasi secara spesifik pada suatu masalah tertentu. Bahkan, ada juga yang menolak adanya "matematika terapan" dan menganggap semua persentuhan matematika pada bidang lain sebagai "terapan dari matematika".

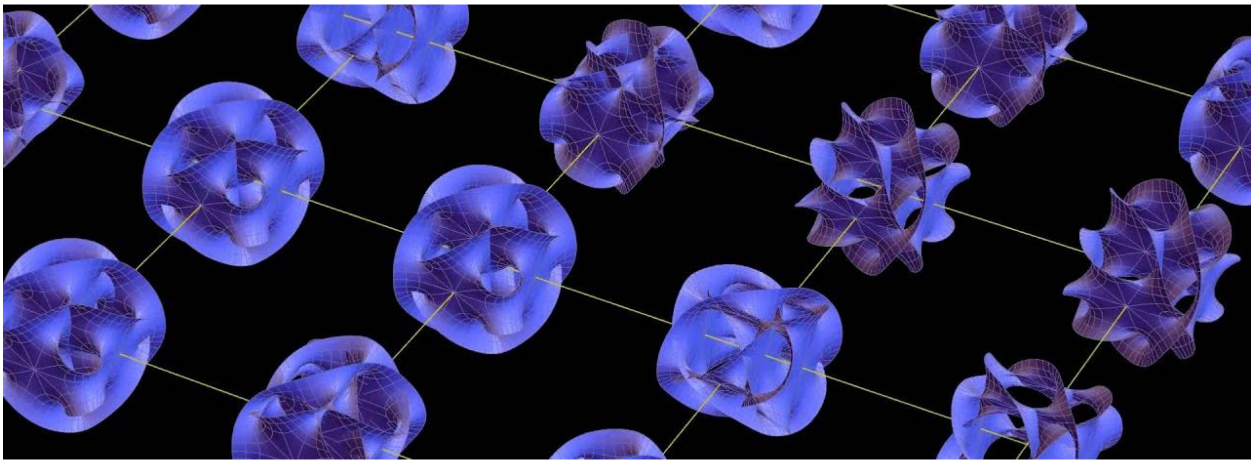
Terlepas dari itu, apabila kita melihat matematika sebagai sebuah metode yang dapat diaplikasikan, maka matematika terapan lebih identik kepada pemodelan dan komputasi, yakni bagaimana masalah riil dimodelkan secara matematis dan kemudian bagaimana alat-alat di matematika bisa digunakan untuk menganalisis dan mengolah model tersebut yang seringkali berupa simulasi. Konsep matematika terapan pun lebih sering terkait dengan metode numerik dan simulasi. Beberapa masalah di sains dan teknik terkadang sukar untuk diselesaikan secara analitik murni (penurunan langsung dengan perhitungan matematis), sehingga aproksimasi melalui komputasi numerik sangat bermanfaat dan berkembang mendominasi bidang matematika terapan. Akan tetapi, tentu karena sekarang aplikasi matematika sudah sangat meluas, perspektif ini mungkin sudah tidak terlalu relevan meski masih banyak digunakan di perguruan tinggi.

Salah satu alternatif yang juga dapat diambil adalah penggunaan istilah *applicable mathematics*, yang dikenalkan untuk membedakan matematika terapan dalam perspektif tradisional (pemodelan, simulasi, atau komputasi) dengan semua bentuk terapan dari matematika yang memungkinkan saat ini. Akan tetapi, tentu saja ini semua hanya masalah istilah dan problematika pengelompokan saja. Semua dapat disesuaikan berdasarkan kebutuhan. Matematika terapan masih identik dengan pemodelan dan komputasi karena memang itu menjadi perspektif yang berlaku cukup umum pada beragam variasi masalah. Semua selalu dimulai dari memodelkan masalah riil ke dalam formulasi matematis pada cabang matematika tertentu. Alat-alat atau teorema yang ada di cabang tersebut kemudian dimanfaatkan untuk menyelesaikan masalah yang ada. Aspek komputasi seringkali tetap ada karena masalah riil biasanya melibatkan angka dalam jumlah besar.

Pengelompokkan matematika terapan dapat dilakukan dengan 2 pendekatan, yakni pendekatan metode dan pendekatan bidang. Pengelompokan berdasarkan metode menghasilkan cabang-cabang seperti sistem dinamik, analisis numerik, optimisasi, teori kontrol, atau kriptografi, sedangkan pengelompokan berdasarkan bidang dapat menghasilkan cabang seperti biomatematika, fisika matematika, sains komputasi, matematika keuangan, atau komputasi fluida. Selain itu, kita dapat menggabungkan kedua perspektif ini sebagaimana yang tergambarkan dalam peta matematika oleh *Domain of Science* pada awal tulisan ini.

Pada akhirnya, matematika menjadi ilmu yang sangat luas. Hampir tidak ada bidang ilmu eksak modern yang tidak bersentuhan langsung dengan matematika. Apabila matematika terapan didefinisikan dengan sangat longgar, maka lingkup studinya bisa sangat luas. Namun tentu, yang menjadi fokus matematika sebagai disiplin ilmu sendiri adalah lebih ke prinsip-prinsip umum saja, sehingga batas dari matematika hanya lebih ke permasalahan metodologi ketimbang implementasi langsung pada setiap topik spesifik. Tentu juga dengan terus berkembangnya peradaban manusia, matematika juga akan terus berkembang dari keadaannya saat ini, baik berkembang ke dalam secara murni ataupun berkembang ke luar dari sisi aplikasi.

(PHX)



Apakah Matematika itu Unik

Seseorang pernah bertanya, “apakah mungkin ada suatu semesta dimana 1+1=3?” Pertanyaan yang mungkin terkesan konyol atau lucu, namun sebenarnya mengarah pada hal yang cukup fundamental. Ini mempertanyakan “ketunggalan” dari matematika. Apakah matematika itu unik atau tunggal sehingga tidak ada alternatif daripadanya? Kebenaran yang diberikan matematika terlalu eksak membuat kita hanya bisa menerima tanpa bisa mempertanyakan. Dengan semua aritmatika, teori bilangan, aljabar, dan konsep serta teori matematika lainnya, kita hanya bisa mendeskripsikan ketimbang mengetahui alasannya. Seperti halnya ilmu sains, seperti fisika, yang pada dasarnya hanya bisa mendeskripsikan fenomena, atau bagaimana sesuatu itu terjadi, ketimbang mengapa sesuatu itu demikian. Fisika kemudian hanya bisa mengajukan atau menetapkan suatu model yang paling bisa mendeskripsikan terjadinya beragam fenomena, namun ketika ditanya kenapa modelnya harus demikian, fisika tidak punya cara untuk menjawabnya selain dengan menyerahkan pertanyaan itu kepada filsuf. Di sisi lain, ketunggalan matematika adalah hal yang cukup wajar dan tidak aneh sehingga mempertanyakannya adalah hal yang sangat tidak natural. Kenaturalan ini pun bukan karena sekadar kita terbiasa, seperti kita yang mungkin tidak terlalu mempertanyakan kenapa jantung berdetak karena itu terjadi hampir setiap saat sejak kita terlahir, namun lebih karena kita seperti tidak punya cara untuk memikirkan alternatifnya.

Asal mula munculnya pertanyaan ini bisa ditebak sebenarnya, apalagi dengan maraknya film-film fiksi-sains yang mulai mengenalkan banyak konsep liar terkait dunia ini. Ya, ide bahwa adanya “semesta lain” tentu saja berasal dari gagasan *multiverse* atau semesta jamak. Konsep *multiverse* secara sederhana mengajukan adanya semesta lain selain semesta yang kita tinggali ini. Tentu saja adanya konsep ini membuat definisi terkait semesta (*universe*) perlu lebih diperketat, karena kata semesta itu sendiri seharusnya sudah mencakup keseluruhan apapun, baik itu ruang, waktu, materi, atau energi. Ketika harus mendefinisikan ulang “semesta” itu pun, kita perlu memperjelas juga apa yang dimaksud dengan *multiverse*. Setiap film punya cara sendiri untuk mendefinisikannya, namun dalam konteks ini, kita perlu adil dan mencoba melihat semua bentuknya.

Semesta Jamak

Ide bahwa terdapat semesta lain selain dari yang kita tinggali bukanlah sebuah ide yang baru atau modern. Ide ini bahkan mungkin bisa disebut natural ketika kita mencoba berpikir luas atas dunia yang kita tinggali. Beragam mitologi pun sebenarnya secara tidak langsung menggunakan gagasan semesta jamak dalam cerita-cerita di dalamnya. Sebagai contoh, dalam mitologi viking (*norse*), dunia yang manusia tinggali, disebut *midgard*, hanyalah salah satu dari 9 semesta yang ada. Semesta atau dunia lainnya antara lain *Asgard*, tempat tinggal para Dewa. Kesembilan semesta ini berada dalam suatu pohon kosmos besar yang bernama *Yggdrassil*. Kita bisa secara alami membayangkan bahwa memang di luar sana ada dunia lain dengan lanskap yang berbeda dan juga berisi makhluk hidup yang berbeda. Selain itu, ide tentang semesta jamak juga bisa dilihat dalam konteks daur hidup dunia, yang mana semeseta yang kita tinggali sekarang ini merupakan semesta kesekian yang terbentuk dari proses siklis. Semesta ini pun kelak akan hancur dan kemudian terlahir kembali. Gagasan seperti ini ada dalam kosmologi Hindu.

Dalam era klasik, konsep dunia atau semesta memang bisa sangat ambigu dan tidak jelas, karena pemahaman atau wawasan manusia atas dunia yang ditinggali juga masih sangat terbatas. Konsep planet, sistem bintang, atau bahkan galaksi, belum terbentuk, sehingga semesta yang dimaksud bisa sangat terbatas pada bumi. Baru ketika ilmu pengetahuan perlahan terbangun, konsep semesta perlahan meluas pelan-pelan. Dengan diketahuinya adanya planet lain selain Bumi, maka setiap planet itu pun bisa menjadi "dunia lain" dari perspektif kita yang tinggal di Bumi. Lalu, dengan juga diketahuinya keberadaan bintang-bintang lain di luar sistem tata surya yang juga dikelilingi planet, itu pun bisa menjadi "dunia lain". Konsep ini terus berkembang hingga akhirnya sains berhasil mengungkap eksitensi milyaran galaksi yang bisa dianggap juga sebagai "dunia lain". Akan tetapi, pada akhirnya, semua itu tetap dimasukkan ke dalam konsep semesta, sehingga satu semesta atau dunia kita ini adalah semua galaksi-galaksi itu.

Sains terus mengembangkan konsep semesta ini sampai kemudian akhirnya mencapai tembok buntu yang "mustahil" ditembus, yakni batas terjauh kita bisa melihat. Cahaya butuh waktu untuk mencapai bumi karena memiliki suatu kecepatan konstan tertentu. Di sisi lain, semesta kita punya umur, selain juga berekspansi dengan kecepatan yang terus bertambah. Kita hanya bisa melihat semesta yang cahayanya berhasil mencapai kita sekarang. Titik terjauh yang cahayanya bisa kita lihat disebut sebagai cakrawala kosmik (*cosmological horizon*) Para saintis tidak menyerah, dan akhirnya menyebut seluruh semesta yang bisa kita lihat saat ini sebagai "*observable universe*" ketimbang menganggapnya *whole universe*. Meskipun begitu, ketika kita berbicara tentang semesta saat ini, kemungkinan besar maknanya merujuk ke *observable universe*, dengan seluruh linimasa yang terjadi dari *Big Bang* sampai saat ini.

Untuk memikirkan yang lebih jauh dari itu, sains belum bisa menyediakan teorinya, maka kemudian lebih banyak spekulasi yang muncul. Konsep semesta jamak (*multiverse*) kemudian datang sebagai istilah untuk menyebut kemungkinan adanya "sesuatu" di luar semesta ini, yang karena tidak ada landasan sains yang kokoh, memiliki banyak versi. Sebagai contoh Brian Greene, salah satu fisikawan teoretis yang fokus di bidang teori String, mengajukan bahkan 9 versi atau tipe dari *multiverse*, yang salah satu di antaranya adalah *cyclic multiverse*. Meskipun terasa banyak, yang diajukan Greene hanyalah gagasan terpisah terkait *multiverse* yang bisa diajukan, yang bahkan *simulated universe*, yakni konsep dimana semesta kita hanyalah simulasi dari makhluk di semesta lain, juga termasuk di dalamnya.

Konsep yang lebih utuh dan integratif terkait *multiverse* adalah apa yang diajukan oleh seorang fisikawan-kosmolog bernama Max Tegmark. Ia mengajukan sebuah kerangka *multiverse* besar dalam suatu hirarki atau tingkatan, dimana terdapat 4 tingkat *multiverse*. Setiap tingkat yang lebih tinggi mencakup tingkat yang lebih rendah. Tingkat pertama adalah area di luar cakrawala kosmik, dengan hukum fisika yang serupa dengan yang kita tinggali, sehingga dapat dikatakan ekstensi dari *observable universe*.

Untuk memahami tingkat kedua, perlu diketahui bahwa setelah *big bang,* terjadi proses inflasi yang membentuk gelembung awal semesta. Tegmark membayangkan bahwa gelembung ini bisa terjadi terpisah, atau adanya banyak gelembung berbeda dari hasil inflasi yang berbeda. Gelembung ini, karena berisi embrio dari semesta, menentukan seluruh hukum dan konstanta fisika yang ada di semesta itu. Multiverse tingkat kedua adalah gelembung lain, yakni semesta dimana hukum dan konstanta fisikanya berbeda dengan yang kita tinggali.

Multiverse tingkat ketiga adalah yang paling terkenal dan paling sering digunakan dalam kisah-kisah fiksi-saintifik, yakni kemungkinan linimasa lain dari semesta. Mekanika kuantum mendeskripsikan semesta yang bersifat probabilistik dalam level atom, yang berarti ada semua keadaan bersifat tidak pasti dengan peluang tertentu. Konsep ini punya banyak interpretasi, yang salah satunya dikenal dengan *Everett's Many Worlds Interpretation*, yang berarti semua peluang dari keadaan itu sebenarnya terjadi seluruhnya, namun pada cabang-cabang semesta yang berbeda. Kita hanya bisa hidup di salah satu cabang.

Jika merasa tulisan ini berubah dari bertemakan matematika menjadi sebuah artikel populer sains, kita baru akan membahas aspek matematika di *multiverse* tingkat yang selanjutnya, yakni tingkat 4 sekaligus terakhir. Akan tetapi, sebelum masuk ke sana, kita perlu membahas khusus latar belakang kenapa Tegmark mengajukan *multiverse* tingkat 4 ini, yakni sebuah gagasan yang dikenal dengan *Mathematical Universe Hypothesis* (MUH).

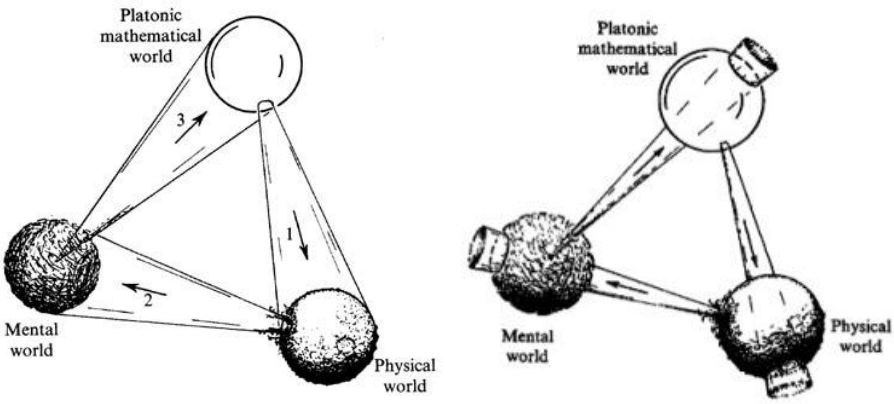
Esensi Realitas

Pembahasan ini sebenarnya menyangkut erat terkait esensi realitas yang kita pandang, sekaligus esensi dari matematika itu sendiri. Sejak era klasik, para filsuf sering, atau bahkan selalu, mempertanyakan terkait kebenaran dari keberadaan realita itu sendiri. Hal ini dipicu oleh banyak hal, yang salah satunya adalah bahwa kita melihat segala sesuatu melalui pikiran kita. Bagaimana kita tahu apakah realita yang kita lihat itu sungguh-sungguh ada atau hanya konstruksi atau tipuan dalam pikiran belaka? Pada kenyataannya, pikiran kita memang bisa menciptakan persepsi atau realita yang bisa terasa sangat "nyata". Kita melihat, mendengar, dan meraba selalu melalui proses konstruksi dalam pikiran, sehingga tidak ada cara mencerap apapun di luar tubuh kita, tanpa melalui pikiran. Keraguan keras atas apapun keberadaan realita objektif di luar diri ini dikenal dengan istilah skeptisisme, dan salah satu bentuk ekstrimnya, yakni menganggap satu-satunya yang ada hanyalah pikiran dan semua hal lain hanyalah hasil dari pikiran saja, disebut solipsisme. Terlepas dari keraguan radikal atas realita itu, yang populer berkembang dan dipegang adalah realisme, yakni bahwa semesta yang kita lihat itu sepenuhnya nyata ada terlepas dari bagaimana interpretasinya. Pandangan realisme ini juga dikenal dengan *External Reality Hypothesis* (ERH), yakni bahwa terdapat realitas fisis di luar dan independen dari diri setiap manusia.

Di tempat lain, matematika juga dipertanyakan realitasnya dengan pertanyaan yang sama, yang kemudian lebi sering terejawantahkan dalam pertanyaan populer: "apakah matematika diciptakan atau ditemukan". Jika matematika diciptakan, maka matematika sepenuhnya konstruksi pikiran manusia. Sebaliknya, jika matematika ditemukan, maka matematika, dengan semua entitas dan teorema yang ada di dalamnya, sudah ada di luar diri manusia, yang kemudian "ditemukan" melalui proses eksplorasi dan penelitian matematis. Akan tetapi, makna keberadaan matematika ini pun tidak punya landasan yang kuat. Apa yang dimaksud sebagai matematika "ada"? Apakah ia ada sebagai entitas tersendiri yang independen ataukah ia ada dalam bentuk manifestasi entitas lain?

Dalam konsep-konsep matematika yang sederhana seperti pembilangan ataupun ukuran, matematika bisa dianggap sebagai salah satu atribut dari realita fisis. Atribut-atribut ini jelas diciptakan oleh manusia sendiri, namun pada akhirnya konsep yang tercipta untuk bisa mendeskripsikan atribut tersebut menjadi memiliki aturannya sendiri. Aturan-aturan ini yang kemudian secara independen berkembang menjadi matematika. Meskipun independen, tidak bisa dipungkiri bahwa matematika tetaplah pada awalnya merupakan deskripsi dari realita. Yang populer dipegang adalah paradigma Platonik dimana memang ada suatu dunia ide/forma yang berisi entitas abstrak seperti matematika. Dunia ide ini sendiri merupakan representasi ideal dari realita fisik. Apa yang manusia kembangkan melalui simbol dan konsep hanyalah cara pikiran agar bisa mengolah atau melihat apa yang ada di dunia ideal tersebut. Hal ini sebagaimana dideskripsikan oleh Roger Penrose melalui diagram di bawah.

Secara sederhana, dalam diagram yang kiri, relasi ketiganya bisa dideskripsikan secara sederhana sebagai berikut: (i) seluruh dunia fisik merupakan manifestasi atau pengejawantahan dari sebagian ide di Dunia Ideal Platonik; (ii) seluruh mental pikiran manusia sangat bergantung pada pengalaman atau pengamatan di dunia fisik; (iii) seluruh ide di dunia Platonik dapat dipikirkan dan diolah melalui pikiran. Diagram ini memiliki versi "lemah"-nya, yakni gambar yang sebelah kanan. Dalam versi lemah ini, semua kata "seluruh" dalam deskripsi di atas diganti menjadi sebagian, sehingga memungkinkan adanya realita yang tidak punya representasi ideal di dunia Platonic, adanya kondisi mental yang tidak berasal dari realita, dan adanya ide yang tidak bisa terakses pikiran.



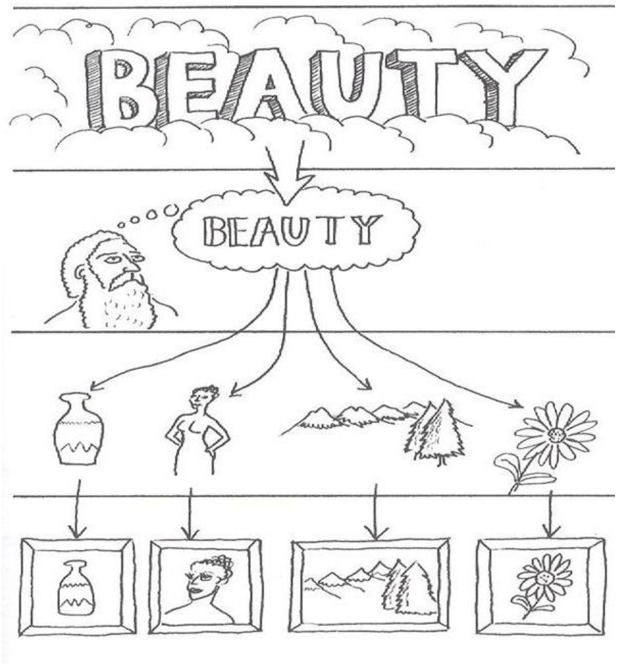
Gambar 8. Hubungan antara 3 dunia yang diajukan oleh Penrose.

Diagram ini, meskipun secara komprehensif menjelaskan hubungan tiga konsep "dunia", kita masih tidak punya gambaran yang jelas akan "Dunia Platonik", yang sepenuhnya spekulasi dan tidak bisa dibuktikan. Apa artinya suatu teorema matematika "ada" di dunia itu? Apa lantas yang kemudian dimaksud sebagai "ada"? Karena konsep "ada" menjadi ambigu di ketiga dunia ini, maka satu-satunya cara menghindari ambiguitas ini adalah dengan cukup melihat adanya 1 dunia. Dalam hal ini, secara langsung tersedia 3 alternatif, yakni menganggap semuanya ini adalah dunia mental, menganggap semuanya ini adalah dunia fisik, atau menganggap semuanya ini adalah dunia matematis. Opsi pertama merupakan paradigma solipsisme yang terbahas sebelumnya di awal bagian ini. Meskipun keragu-raguan akut atas realitas eksternal di luar pikiran ini cukup rasional, secara praktis pandangan ini kurang menghasilkan apa-apa karena tidak punya pegangan lain atas apa yang bisa dianggap benar. Opsi kedua, yang sering juga dikenal dengan nama materialisme, merupakan yang paling umum dipegang, karena hal yang paling mudah diterima adalah mempercayakan sepenuhnya seluruh indra dan persepsi kita sebagai bahwa apa yang kita cerap dan alami merupakan realitas yang benar adanya. Sains berkembang pun dari pandangan dasar ini, bahwa hanya apa yang dapat diamati yang bisa dianggap benar, dan yang diamati tentu saja adalah realitas fisik. Opsi ketiga yang mungkin kurang populer dan terasa kurang masuk akal. Pandangan ini sudah ada sejak era Yunani klasik, dimana Phytagoras, beserta pengikutnya, menganggap bahwa semua hal di dunia ini hanyalah "bilangan". Plato, meskipun sebagai pelopor gagasan tentang adanya dunia ideal/formal, masih menganggap kebenaran eksistensi realitas fisik sebagai manifestasi dari ide di dunia ideal.

Semesta Matematis

Masalahnya, memang status ketiga dunia ini masih misteri sampai sekarang, dengan beragam alternatif jawaban dari berbagai perspektif. Dalam konteks tulisan ini, salah satu yang mungkin bisa dilihat lebih dalam adalah apa yang Max Tegmark sebut sebagai *Mathematical Universe Hypothesis* (MUH). Dari ketiga dunia di atas, kita bisa reduksi lagi dengan melihat bahwa dunia pikiran hanyalah perantara atau jembatan antar dunia fisik dan dunia ide. Pikiran mengolah pengalaman, pengamatan, impresi, dan persepsi dari dunia fisik untuk kemudian diabstraksi dalam suatu gagasan ideal. Sebagaimana yang ajukan oleh Plato sendiri, bahwa objek fisik adalah instantiasi dari gagasan abstraknya. Ketika kita melihat sesuatu yang indah, maka pikiran kita tengah mengaitkan objek fisik itu dengan suatu konsep indah ideal yang ada di dunia ide. Pikiran menjadi seperti alat yang menghubungkan dua dunia tersebut.

Dua dunia yang tersisa, yakni dunai ide dan dunia fisik, tetap menjadi perdebatan panjang filsuf Eropa sejak Renaissance. Tentu perdebatan ini sangat luas karena konsep "ide" itu pun sesuatu yang sangat abstrak dan mencakup banyak hal. Dalam paradigma sains, terutama sains modern, konsep "ide" ini kemudian lebih mengarah pada teorema-teorema matematis sebagai aspek abstrak ideal yang secara akurat mendeskripsikan realita. Ide atau forma yang lain seperti konsep keindahan, konsep kebaikan, dan lain sebagainya, lebih ke merupakan atribut yang diberikan dari persepsi subyektif terhadap realita, ketimbang suatu gagasan ideal objektif yang ada di dunia ide.

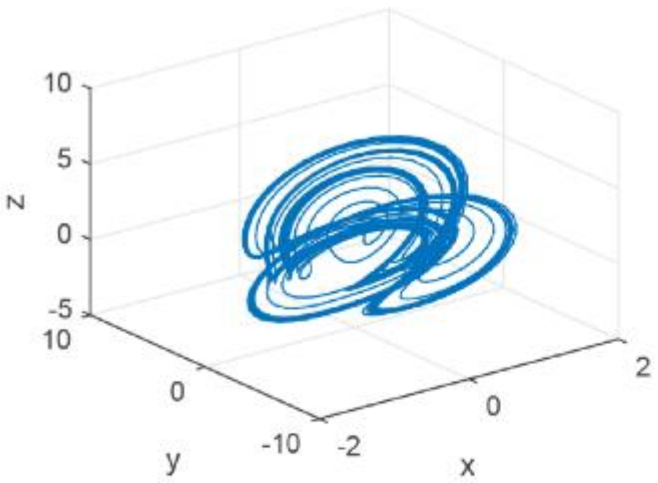


Gambar 9. Gagasan abstrak ideal tentang keindahan berada di dunia ide yang kemudian diejawantahkan dalam bentuk konsep di pikiran sebelum akhirnya diwujudkan ke realitas fisik.

Apa yang kemudian Tegmark ajukan dalam MUH adalah, ketimbang melihat dua dunia ini, dunia fisik dan dunia ide (matematis) secara terpisah sebagai dua hal yang berbeda, kita bisa melihat bahwa dua dunia itu pada dasarnya adalah hal yang sama. Secara sederhana, apa yang dinyatakan dalam MUH adalah bahwa realitas eksternal kita itu sendiri *adalah* struktur matematika. Untuk melihat ini, kita perlu melihat bagaimana posisi teori-teori fisika ketika tertuang dalam bentuk bentuk hirarki. Semakin umum dan fundamental suatu teori, ia semakin tersederhanakan dalam bentuk persamaan-persamaan matematis ketimbang sebuah deskripsi rinci atas suatu hal. Dalam teori-teori yang lebih spesifik dan aplikatif, konteks dan penjelasan detail diperlukan untuk menerapkan teori tersebut. Teori-teori fisika yang fundamental, seperti teori relativitas umum atau teori medan kuantum, tertuang dalam bentuk struktur atau sistem matematis yang sangat abstrak hingga bahkan makna fisisnya secara rinci butuh diinterpretasi lebih lanjut. Apabila ditarik mundur lagi, teori fisika yang paling fundamental, atau lebih populer dengan sebutan *Theory of Everything* (ToE), dipastikan akan sangat abstrak dan murni matematis. Berhubung konsep yang lebih spesifik, seperti mekanika klasik, dapat diturunkan langsung dari konsep yang lebih umum, bila ToE sendiri hanyalah sebuah struktur matematis, maka semua turunannya pun hanya bagian kecil dari struktur itu.

Apa yang dimaksud dari struktur matematika di sini adalah sekumpulan entitas abstrak dengan relasi yang terdefinisikan antara mereka. Sebagai contoh, himpunan bilangan bulat adalah sebuah struktur matematika. Dalam level yang abstrak, matematika, khususnya bidang aljabar, memang menjadi ilmu yang hanya fokus pada struktur, yang mana struktur ini menjadi semacam *blueprint* atau rancangan yang bisa diimplementasikan pada apapun selama punya sifat serupa. Untuk ilustrasi, misalkan ada sebuah struktur yang berisi 0 dan 1 suatu operasi penjumlahan. Kita definisikan hubungan antara keduanya dengan 0+0=1+1=0 dan 0+1=1+0=1. Struktur ini disebut grup modulo 2 (dinotasikan $\mathbb{Z}_2$). Ketimbang secara rinci fokus pada bilangan 0 dan 1, kita bisa generalisasi ini menjadi suatu struktur yang punya sifat serupa. Misal disjungsi eksklusif pada logika (penghubung "atau" yang hanya memilih salah satu) pada atribut "benar" dan "salah". Hubungan antar mereka adalah "salah atau salah adalah salah", "benar atau benar adalah salah", "salah atau benar adalah benar", dan "benar atau benar adalah benar". Jika "benar" itu diasosiasikan dengan 1, dan "salah" itu diasosiasikan dengan 0, maka struktur yang dibentuk menjadi sama dengan $\mathbb{Z}_2$. Contoh lainnya yang punya struktur sama dengan $\mathbb{Z}_2$ adalah hubungan antara ganjil dan genap dengan operasi perkalian, yang relasinya adalah ganjil kali genap maupun genap kali ganjil menghasilkan ganjil dan genap kali genap maupun ganjil kali ganjil menghasilkan genap.

Teori-teori fisika dalam bentuk yang fundamental pada dasarnya adalah struktur matematika yang mendefinisikan bagaimana sesuatu terjadi. Bagaimana suatu fenomena atau kejadian fisis terjadi hanya masalah bagaimana struktur itu "dilihat". Ketika suatu benda bergerak, bulan mengelilingi bumi misalkan, kita bisa melihat posisi bulan itu memang berpindah seiring berevolusinya waktu sehingga menghasilkan persepsi "gerak" dalam 3 dimensi, atau melihat sepenuhnya posisi bulan sebagai "spageti" dalam di ruang 4 dimensi, yang mana setiap posisinya sepanjang waktu sudah "ada" terdefinisikan oleh struktur matematika yang mendefinisikannya (hukum gravitasi). Hal ini bisa diibarat suatu video digital, yang mungkin terlihat seperti gambar yang bergerak bila diputar, namun pada dasarnya video itu sendiri merupakan satu objek data utuh 3 dimensi yang mengisi suatu memori komputer. Dalam konsep ini, kita tidak melihat struktur matematika itu sebagai yang mendeskripsikan dinamika dunia fisis, namun dunia fisis itu sendiri adalah struktur matematika dengan seluruh kejadian yang ada di dalamnya. Adanya waktu dengan demikian hanyalah "ilusi" yang terbangun oleh kita sebagai makhluk 3 dimensi.



Gambar 10. Gerak suatu benda dapat dilihat sebagai "spageti" dalam perspektif di luar sistem.

Secara ideal, struktur matematika yang mungkin ada bisa sangat banyak. Matematika secara spesifik meneliti dan mengeksplorasi struktur-struktur tersebut secara abstrak. Ketika seluruh semesta ini adalah suatu struktur matematika yang spesifik (yang harapannya kelak terdefinisikan secara lengkap melalui ToE), maka ada kemungkinan bahwa struktur matematika yang berbeda juga membentuk semesta yang lain juga. Inilah yang kemudian menjadi *multiverse* tingkat 4, bahwa adanya semesta lain dengan seluruh struktur yang berbeda, yang mengimplikasikan semua materi, relasi, hukum, dan lain sebagainya bisa sangat berbeda dibanding semesta yang kita tinggali.

Jadi Bisakah 1+1=3?

Jika kita kembali pada pertanyaan pertama dari tulisan ini, apakah lantas kemudian struktur yang berbeda itu memungkinkan adanya semesta dimana 1+1=3? Menjawabnya sebenarnya sederhana, dengan cukup melihat apakah memang 1+1=3 dapat diimplikasikan dari suatu struktur yang berbeda. Ada dua kemungkinan melihat ini. Kemungkinan pertama, kita mempertahankan definsi penjumlahan yang digunakan. Jika kita menggunakan definisi 1+1 yang tetap sebagaimana kita gunakan selama ini, maka kita harus menelaah apakah ada implikasi lain dari definisi ini. Operasi penjumlahan (dengan simbol +) secara sederhana dapat didefinisikan sebagai proses rekursif suksesi bilangan. Proses suksesi ini sebenarnya tidak harus terpaku pada bilangan, namun dapat diaplikasikan pada himpunan terurut. Suksesi ini sebenarnya seperti bagaimana kita menghitung ketika kecil. Objek kedua dalam operasi penjumlahan merupakan banyaknya langkah suksesi yang akan dilakukan. Satu langkah suksesi merupakan proses bergerak ke elemen berikutnya dalam himpunan terurut yang tengah diamati. Sebagai contoh, 2+3 berarti melakukan suksesi bilangan dari 2 secara berulang sebanyak tiga kali, dari 2 ke 3, dari 3 ke 4, dan terakhir dari 4 ke 5. Sebagai catatan, proses suksesi ini merupakan penyederhanaan, karena banyak yang definisinya perlu diperjelas lebih jauh lagi. Perlu diingat kembali bahwa proses suksesi ini dapat diaplikasikan ke himpunan terurut apapun, karena angka 1, 2, dan seterusnya itu hanyalah label atau simbol yang kita gunakan tanpa ada keharusan tertentu. Kita bisa menggantinya dengan simbol atau label lainnya. Kita bisa saja punya urutan dalam bentuk alfabet, a, b, dan seterusnya sehingga kita bisa katakan b+c=e. Dengan ini, kita bisa saja membuat label dimana urutannya adalah 1, 3, 4, 2, dan seterusnya sehingga 1+1=3 atau 1+3=2.

Kemungkinan yang kedua dalam melihat 1+1=3 adalah dengan mendefinisikan ulang operasi '+' yang digunakan. Dalam hal ini, banyak sekali cara untuk membuat suatu operasi '+' sedemikian sehingga 1+1=3. Salah satu contoh sederhana dari ini adalah dengan cukup mendefinisikannya seperti penjumlahan biasa, yakni dengan suksesi, namun suksesinya selalu lebih satu langkah. Dengan ini, kita bisa punya sistem dimana 1+0=2, 2+1=4, atau 1+1=3. Akan tetapi, agar bisa membentuk suatu struktur, harus ada sifat atau atribut tertentu yang dihasilkan dari definisi yang diberikan. Beberapa sifat yang umum digunakan adalah komutativitas dan asosiativitas. Kita belum punya kesimpulan apapun dalam hal ini karena menunjukkan apakah struktur tertentu dengan 1+1=3 itu bisa dihasilkan dan apa implikasinya butuh telaah lebih lanjut.

Di sisi lain, diskursus tentang struktur sebenarnya tidak terlalu memedulikan elemen ataupun operasi spesifik yang mungkin dihasilkan darinya. Apalagi, dalam konteks MUH yang diangkat sebelumnya, suatu struktur matematika mendefinisikan bagaimana semesta itu bekerja, dan struktur ini bisa sangat kompleks dan independen dari struktur-struktur sederhana seperti sistem bilangan bulat. Dengan kata yang lebih sederhana, sistem bilangan tidak menentukan semesta pada *multiverse* tingkat 4 tadi, namun itu adalah hal yang selalu mungkin dikonstruksi di semesta manapun, meski tidak termanifestasi langsung secara fisik dalam semesta tersebut. Terkait ini, kita memang perlu mengkritik hal fundamental dari MUH, yakni bagaimana entitas abstrak dalam suatu struktur matematika bisa mewujud dalam suatu entitas fisik yang bisa dipersepsikan apabila memang keduanya adalah hal yang sama.

Terlepas dari itu, bila MUH benar, semesta lain mungkin mewujud melalui suatu struktur matematika tertentu, tapi itu dalam level abstrak matematis sendiri, keseluruhan konsep matematika tidaklah ada yang berubah. Terlebih lagi, banyak konsep di matematika muncul secara natural sehingga sangat independen dengan realitas fisik spesiifk apapun. Sebagai contoh, sistem bilangan bulat pada prinspnya adalah sistem diskrit, yang sebenarnya konsep yang melampaui semesta fisik itu sendiri. Dimanapun itu, objek diskrit pasti ada. Sebagai contoh lain, bilangan asli lahir dari kebutuhan membilang secara terurut, maka selama ada himpunan terurut, konsep ini selalu bisa diterapkan. Kita bisa saja kemudian menduga bahwa mungkin saja ada semesta dimana bahkan konsep abstrak natural seperti keberurutan ataupun diskrit tidak bisa dibentuk, namun pada akhirnya spekulasi kita terbatas, karena sebagai manusia, kita tidak bisa membayangkan di luar dari apa yang pernah alami dan pikirkan.

Kalaupun multiverse tingkat 4 memang ada, kita sebenarnya tetap bisa yakin bahwa matematika di sana pun tidak banyak berubah karena konsep-konsep primitf di matematika memang terlalu natural untuk bisa dibayangkan alternatif atau lawannya. Semesta berbeda yang dibentuk dalam tingkat 4 bukan berarti matematikanya yang berbeda namun struktur matematika yang mendefinisikan semesta itu yang berbeda. Matematika itu sendiri terbangun dari definisi dan aksioma sedemikian sehingga turunan dari aksioma atau definisi itu konsisten pada dirinya sendiri. Definisi dan aksioma ini pun, meskipun diformulasikan oleh manusia, berasal dari gagasan natural yang lebih abstrak, yang pada akhirnya akan selalu menghasilkan matematika yang sama dan tunggal. Bahwa 1+1=2 bukanlah keinginan manusia, namun memang sistem yang terbangun dalam matematika memungkinkan itu. Simbol 1, +, dan 2 hanyalah cara manusia untuk mengartikulasikan gagasan-gagasan abstrak terkait suksesi, urutan, dan lain sebagainya dalam bentuk formal. Hal inilah yang membuat matematika itu begitu akurat dalam mendeskripsikan banyak hal dalam realita dan juga begitu eksak dan konsisten dalam setiap teoremanya. Mengajukan 1+1=3 sebenarnya hanya membutuhkan definisi yang berbeda saja, namun definisi yang berbeda itu ketika tidak natural dan terlalu memaksakan, meskipun valid, pada akhirnya tidak akan bermanfaat banyak. Jadi, ketika suatu saat mungkin kita akan ketemu alien dari planet lain, galaksi lain, atau bahkan semesta lain, baik dari multiverse tingat 1, 2, 3, atau 4 sekalipun, mereka kemungkinan besar berbicara matematika yang sama, meski dengan simbol atau bahasa yang berbeda.

(PHX)

Ku tak tahu kemana perjalanan ini menuju. Aku hanya bisa terus melangkah dalam penasaran dan kekaguman. *Wondering wandering* kata kawanku. Memang itu yang paling bisa dilakukan untuk entitas semisterius matematika. Sejauh apapun aku belajar ilmu lain dengan semua kegelisahan lain terkait realitas yang ada di masyarakat, aku tak akan bisa melepaskan diri dari tarikan kuat enigma matematika yang meski mungkin tidak akan membuat dunia jadi lebih baik, menyelesaikan masalah masyarakat yang ada, atau bisa berkontribusi pada perkembangan peradaban, tetaplah indah, elegan, dan esoterik untuk dipelajari.

(PHX)