bookletphx #49

?
Quest(ion)

Bag. 3: Matematika

Booklet Seri 49

Quest(ion)

Bag. 3: Matematika

Oleh: Phoenix

Sebagai seorang matematikawan, sudah pasti pertanyaan yang paling bisa dijawab adalah pertanyaan tentang matematika. Well, meski ya terkadang aneh-aneh juga pertanyaannya, beberapa di antara pertanyaan itu justru memiliki aspek filosofis yang sangat dalam, entah disengaja oleh penanya atau tidak. Beberapa pertanyaan yang ku temukan di Quora pada akhirnya menjadi inspirasi untuk bahan pikiran dan renungan terkait makna matematika yang kemudian ku tuliskan menjadi artikel terpisah.

Matematika sendiri memang masih entitas yang misteri, maka wajar banyak kemungkinan pertanyaan-pertanyaan semi filosofis yang turut muncul. Tentu tetap banyak pertanyaan-pertanyaan teknis dan konsep yang juga akhirnya ku jawab, namun itu juga dalam rangka menguji pemahamanku terkait yang ditanyakan. And here we are, booklet terakhir dari kumpulan jawaban Quora. Semoga bermanfaat!

(PHX)

Daftar Pertanyaan

Berapakah nilai 0^0 (nol pangkat nol)?

28 Mei 2019

Tergantung.

Jangan salah kaprah. Sesuatu "tidak terdefinisi" di matematika, bila setiap definisi yang diberikan akan menghasilkan kontradiksi dengan keseluruhan sistem matematika.

Itu bisa terdefinisi, tapi tergantung anda ingin mendefinisikannya bagaimana.

Definisi pangkat pada dasarnya bermula dari pangkat bilangan asli, yang didefinisikan secara formal dengan fungsi P_a dimana $P_a(n) = an$ untuk n bilangan asli dan sembarang bilangan a selain 0, yang memiliki sifat rekursif, yakni

$$P_a(0) = 1$$

$$P_a(n^+) = a \times P_a(n)$$

dengan n^+ disebut sebagai penerus (*successor*) dari n (bilangan asli berikut setelah n). Sebagai contoh, misalkan kita ingin menghitung 2^3 atau $P_2(3)$, maka perhatikan bahwa

$$P_2(0) = 1$$

$$P_2(1) = P_2(0^+) = 2 \times P_2(0) = 2$$

$$P_2(2) = P_2(1^+) = 2 \times P_2(1) = 2 \times 2$$

$$P_2(3) = P_2(2^+) = 2 \times P_2(2) = 2 \times 2 \times 2$$

Mengapa perlu serumit itu hanya untuk sebuah pangkat? Karena matematika sangat bergantung pada definisi, sehingga setiap definisi harus sejelas dan seformal mungkin. Baik, itu baru pangkat bilangan asli. Kita ekstensi sedikit ke bilangan bulat negatif dengan mendefinisikan $a^{-n} = (a^n)^{-1}$, dan kita tahu bahwa untuk setiap bilangan bulat z, $z^{-1} = \frac{1}{z}$.

Dengan menggunakan definisi awal ini, kita sebenarnya bisa bangun definisi untuk pangkat bilangan lainnya (rasional, riil, bahkan kompleks), tapi penjelasannya akan panjang dan di luar konteks pertanyaan.

Oke, itu definisi pangkat dari suatu bilangan aa yang tak nol. Lantas, bagaimana dengan 0^n? Para matematikawan minimal sepakat bahwa untuk $n > 0$, cukup definisikan $0^n = 0$. Bagaimana dengan $n < 0$? Ya dari definisi pangkat negatif, karena $0^{-a} = \frac{1}{0^a} = \frac{1}{0}$, dan pembagian terhadap 0 tidak terdefinsi , maka 0^{-1} pun tidak terdefinisi.

Yang tersisa adalah jika $n = 0$. Di sini muncul **ketidaksepakatan**.

Pada awalnya, definisi pangkat (berdasarkan fungsi P_a) adalah sama untuk semua bilangan termasuk 0. Yang berarti, karena selalu didefinisikan $P_a(0) = 1$, maka juga $0^0 = P_0(0) = 1$.

Lagipula, dalam kalkulus, turunan dari pangkat $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ tidak akan terdefinisikan dengan baik di $x = 0$, kecuali jika $0^0 = 1$.

Tetapi, muncul pendapat yang mengatakan, bahwa 0^0 adalah **bentuk tak tentu** (berbeda dengan tak terdefinisi). Bentuk ini, seperti halnya $\frac{0}{0}$ atau $\infty - \infty$ atau 1^∞ atau $0 \cdot \infty$, memperlihatkan inkonsistensi dari pergerakan dua komponen. Kenapa disebut tak tentu? Karena jika kita perhatikan perilakunya, untuk $a \neq 0$, nilai a^x selalu menuju 1 ketika nilai x menuju 0, padahal nilai x^a menuju 0 ketika x menuju 0.

Namun, perlu ditekankan bahwa kalkulus selalu bermain dengan limit. Sehingga, bentuk tak tentu sekalipun sebenarnya bisa dihitung dengan pemanfaatan aturan L'hopital pada konsep limit. Akan tetapi, penyelesaian dengan limit **bukan berarti** lantas membuat bentuk tak tentu menjadi terdefinisi, sehingga beberapa matematikawan menganggap 0^0 dibiarkan tak terdefinisi.

Kesimpulannya? Nilai 0^0 **bergantung konteks.**

Mungkinkah ada alam semesta paralel di mana 1 + 1 = 3?

22 Mei 2019

Menarik. Pertanyaan ini secara tidak langsung berlapis seperti bawang. Saya akan coba kupas satu per satu. Kenapa? Karena kalau dijawab setengah-setengah, khawatir disalahpahami. Tapi **spolier alert**, ini akan panjang, jadi carilah waktu luang untuk duduk-duduk menikmati sore dengan secangkir kopi hangat dan sepiring gorengan untuk membaca ini.

I.

Harus dipahami dulu, **sebenarnya apa itu penjumlahan?**

Saya rangkum dan tambahkan sedikit di sini, Penjumlahan sebenarnya secara fundamental didasarkan pada **keterurutan** dari himpunan bilangan asli. Tapi, apa sebenarnya juga "bilangan" itu?

Bilangan paling dasar, paling "alami", paling fundamental, adalah bilangan asli. Jadi kita tidak perlu jauh-jauh melihat bilangan lain, cukup sekarang kita pahami konsep bilangan asli. Lupakan ia dalam simbol 1,2,3, dan seterusnya. **Lupakan itu semua**.

Anggap sekarang, bilangan asli apapun itu belum ada, belum kita ketahui. Kita hanya perlu memastikan adanya suatu entitas fundamental yang tidak perlu dibangun oleh apapun. Apakah ada entitas seperti itu? Ada, namanya **himpunan kosong (∅)**. Matematikawan di semesta kita merepresentasikan himpunan kosong ini sebagai bilangan nol (0). Tentu **ia bisa berupa simbol apapun**. Sekarang, jika memang dunia abstrak matematis berisi sesuatu (bilangan, matriks, fungsi, dan semacamnya), tentu harus dibangun dan didefinisikan oleh sesuatu kan? Caranya bagaimana? Alatnya namanya **operasi himpunan**, seperti gabungan (*union*), bahannya ya cukup entitas fundamental tadi.

Lalu?

Jelas kita butuh entitas lainnya, bila ingin membangun sebuah dunia abstrak matematika. Entitas lainnya yang paling dasar adalah suatu prinsip **membilang**, artinya bagaimana **sesuatu yang terurut** itu bisa dienumerasi dengan baik. Maksudnya apa? Misal anda punya *to-do-list* hari ini, karena *to-do-list* itu terurut (artinya jelas mana yang harus dikerjakan duluan), maka anda ingin mengenumerasinya dengan sesuatu kan? Ya, anda bisa menomornya dengan 1,2,3, dst, atau a,b,c,dst, atau i,ii,iii, dst. Banyak simbol bisa anda pakai. Tapi konsepnya serupa kan? Ini, secara umum namanya bilangan asli.

Oke, kita definisikan ia dengan murni memakai bahan yang kita punya, yakni $\emptyset$. Caranya? Definisikan **penerus** dari suatu entitas aa, sebagai $a^+ = a \cup \{a\}$, Dengan itu, kita bisa punya enumerasi

$$\emptyset$$

$$\emptyset^+ = \{\emptyset\}$$

$$\emptyset^{++} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$\emptyset^{+++} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

Namun, tentu sangat tidak menarik sekali mengenumerasi sesuatu dengan banyak **plus-plus**, maka diberikanlah ia simbol 1,2,3, dan seterusnya.

Singkat cerita, bukankah merepotkan sekali kalau setiap saat haru smengenumerasi satu per satu. Misal dalam *to-do-list* anda, anda ingin tahu pekerjaan setelah pekerjaan yang setelah pekerjaan yang kedua (kalau pusing, maksudnya pekerjaan ke-empat, tapi asumsinya kita belum tahu cara menambahkan sekarang). Akhirnya, dibangun konsep **penjumlahan**. Caranya?

Definisikan saja suatu fungsi A_m sehingga $m + n = A_m(n)$. Fungsi ini memenuhi

$A_m(0) = m$ atau $m + 0 = m$; dan

$A_m(n^+) = \left(A_m(n)\right)^+$ atau $m + n^+ = (m + n)^+$.

Silakan direnungi dulu, konsep penjumlahan terlalu *common* buat kita sehingga sebenarnya mendefinisikannya secara formal tidaklah mudah. Fungsi ini sebenarnya dibangun dengan ide penerusan rekursif. Artinya, $3 + 2$, berarti 3^{++}, atau penerus dari penerus dari 3. Formalnya

$$3 + 2 = 3 + 1 += (3 + 1) += (3 + 0 +) += ((3 + 0) +) +) = (3 +) += 4 += 5$$

Got it?

II.

Sebenarnya apa itu **semesta pararel**?

Teori akan semesta pararel pertama kali timbul sebagai konsekuensi dari mekanika kuantum yang menyatakan bahwa properti-properti fisika, seperti lokasi elektron, bersifat **probabilstik**. Artinya, sebelum diamati, suatu elektron bisa berada **dimanapun**, dengan probabilitas tertentu. Ilustrasi sederhana dari hal ini adalah eksperimen khayal kucing Schrodinger, dimana kucing itu bisa dalam dua keadaan sekaligus (hidup dan mati), sebelum di amati.

Hal ini tentu membingungkan, akhirnya muncullah beragam interpretasi. Dua yang terkenal adalah **interpretasi Copenhagen**, dan **interpretasi Many-Worlds** (dunia jamak).

Interpretasi Copenhagen cuma bilang bahwa semesta memang demikian adanya, bahwa segala sesuatu **memang** hanya berupa distribusi statistik sampai dilakukan pengukuran/pengamatan. Pengamatan mengganggu sistem, sehingga distribusi statistik itu menjadi hanya punya 1 nilai tunggal.

Di sisi lain, interpretasi dunia jamak mengatakan bahwa semesta ini memang bercabang untuk semua kemungkinan statistik itu. Jadi, untuk kucing Schrodinger, ketika di semesta ini kita amati ia mati, maka ada semesta lain dimana ia hidup. Sehingga, untuk semua kemungkinan *timeline*, selalu ada semesta lain yang merepresentasikannya. Ada semesta lain dimana anda jadi biliuner, atau ada semesta lain dimana anda sudah mati sekarang. Inilah yang menjadi cikal bakal teori semesta pararel.

Sampai titik ini, tentu semua aman-aman saja bukan? Semesta pararel hanyalah percabangan *timeline*, tidak ada yang membingungkan dari situ. Namun, semua berubah ketika **teori string** menyerang.

Teori string yang mensyaratkan semesta untuk memiliki dimensi lebih dari 4 (bahkan 11)!. Pertanyaannya kemudian adalah, apa interpretasi fisis dari dimensi 5 ke atas? Banyak yang bilang dimensi 5 dan 6 merupakan "percabangan waktu", sebagaimana interpretasi dunia-jamak. Tapi hey, ini ada **11 dimensi**! Bagaimana dimensi ke 7, 8, 9, 10, dan 11?

Salah satu spekulasinya tentu, teori semesta pararel versi kedua, yakni bahwa selain percabangan *timeline*, ada lagi semesta di luar sana **dengan konstanta fundamental fisika (seperti kecepatan cahaya, konstanta Planck, atau konstanta gravitasi) yang berbeda** dibanding semesta ini. Kenapa hanya konstanta? Ya, tentu kita tidak ingin secara kontradiktif bilang bahwa di semesta lain ada teori gravitasi yang berbeda, karena itu berarti teori string yang berbeda, atau *theory of everything* yang berbeda, sehingga *theory of everything* tidak lagi *everything*. Lagipula, jika misal di semesta lain punya teori lain, maka disana mengatakan semesta punya 20 dimensi, maka tentu kontradiksi dengan semesta kita.

Jangan kecewa dulu. Karena bayangkan saja bila ternyata kecepatan cahaya di semesta lain mungkin hanya 100 km/jam. Entah semesta seperti apa yang terbentuk. Konstanta fisika begitu fundamental menentuka bagaimana semesta ini bekerja.

III.

Oke, *final part.* Lantas, bagaimana hukum matematika di semesta pararel?

Renungi kembali bagian pertama. Seberapa universal, konsep **keterurutan**? Semesta pararel mungkin saja mengenumerasi sesuatu dengan cara berbeda, tapi perhatikan bahwa yang saya jelaskan di bagian pertama terlepas dari simbol dan cara, karena itu sangat terkait konsep. Semesta lain boleh menyimbolkan keterurutan dengan cara yang berbeda, tapi keterurutan itu sendiri adalah konsep yang begitu abstrak sehingga seakan tidak ada alternatif lain! Terurut adalah siapapun bisa membedakan bahwa a,b tidak sama dengan b,a. Keterurutan menentukan **arah**, menentukan **orientasi**, menentukan **perspektif**. Bayangkan semesta tanpa keterurutan!

Mungkin saja sih semesta seperti itu, tapi hanya bagai ruang hampa gelap tanpa ada sesuatu apapun (boleh ada objek tapi cuma 1 entitas, dan itu pun harus bulat). Karena begitu ada paling tidak 2 objek di sana, maka kamu bisa langsung membuat keterurutan dengan melihat posisi objek yang satu relatif terhadap objek yang kedua. Atau cukup lah 1 objek, tapi bentuknya kubus, maka kita bisa membuat keterurutan dengan melihat salah satu sudut relatif terhadap yang lain. Dari hal sederhana itu, enumerasi bisa dibangun, dan jadilah bilangan asli, dan jadilah penjumlahan.

Tidak puas dengan keterurutan? Lihat konsep yang lebih fundamental lagi. Dengan bahan apa kita membangun keterurutan secara abstrak tadi? **Himpunan kosong!** Kurang universal apa himpunan kosong?

Matematika telah dibangun sedemikian rupa dengan **melepaskan diri dari realita**, dan murni bermain di dunia abstrak. Hal ini membuat, semesta apapun, akan selalu bisa diterapkan abstraksi yang sama. Di semesta pararel, apapun keterurutan bilangannya, $a + a = a^{++\cdots sebanyak\ a\ kali}$, Jadi, di semesta pararel apapun, $1+1=3$ **hanya jika** makhluk disana menyimbolkan keterurutan dengan 0,1,3, dan seterusnya.

Inilah kenapa, apapun teori semesta pararel yang dicetuskan, semuanya sepakat bahwa **semesta paling ultima adalah matematika**. Artinya, sebanyak apapun semesta lain di luar sana, kita hanya disatukan satu hal: **matematika!**

Max Tegrett mencetuskan bahwa *the true theory of everything* adalah apa yang ia sebut sebagai **Ultimate Ensemble Theory** . Teori ini mengatakan semesta paling tidak punya 4 lapis. Lapis paling kecil adalah semesta kita ini beserta ekstensinya (melampaui *cosmic horizon*). Lapis kedua adalah kumpulan semesta dengan konstanta fisika yang berbeda. Lapis ketiga adalah kumpulan dunia-jamak yang berisi seluruh kemungkinan *time-line* dari lapis kedua. Lapis terakhir, adalah **semesta ultima,** semesta paling besar yang mengejawantahkan struktur-struktur matematika menjadi semesta-semesta yang berbeda.

Apa maksud kalimat terakhir? Seperti halnya semesta ini dibangun dengan hukum dan konstanta dasar fisika, maka dunia abstrak matematika juga dibangun dengan aturan-aturan dasar. Akan tetapi, kalau di dunia abstrak, banyak sekali variasi yang bisa dilakukan untuk membangun struktur baru dengan aturan-aturan yang sama. Misal, dengan sedikit topologi, saya bisa bangun ruang dua dimensi terbatas dimana setiap ujung ruang itu selalu tembus ke ujung yang lain, atau saya bisa bangun ruang 2 dimensi, namun hanya punya dua arah seperti 1 dimensi. Bingung? Itulah menariknya matematika. Akan panjang untuk dijelaskan di sini, jadi saya sarankan buat pertanyaan baru untuk penjelasan lebih lanjut. Intinya, Tegrett mengatakan bahwa

Our external physical reality is a mathematical structure

Banyak sekali kemungkinan struktur matematis yang bisa dibangun, dan dengan itu bisa saja ada semesta lain yang beneran menjadi representasi struktur itu secara riil. *Well*, tentu ini semua masih belum bisa dibuktikan secara fisis, *but I can assure you, mathematics is **really** a multiversal truth*.

Semoga bermanfaaat!

Apa Konjektur/Hipotesis matematika yang belum dapat di buktikan?

17 Mei 2019

Banyak.

Anda bisa membaca satu-satu di List of conjectures - Wikipedia atau List of unsolved problems in mathematics - Wikipedia untuk lebih umumnya. Semua menanti untuk dibuktikan atau diselesaikan sehingga bisa diputuskan kebenarannya. Tentu bisa saja saya paparkan satu per satu di sini, namun tentu bukan pada tempatnya.

Yang saya ingin bahas justru hipotesis yang **tidak dapat dibuktikan** paling tidak dengan “fondasi” matematika yang dipegang saat ini. Bedakan **belum dapat** dibuktikan dengan memang **tidak dapat dibuktikan**, karena yang unik dalam diskursus fondasi matematika adalah selalu ada pernyataan-pernyataan yang disebut ***undecidable***, atau pernyataan yang tidak akan bisa diputuskan itu benar atau salah dengan cara apapun.

Kenapa bisa ada yang demikian? Karena sistem logika sendiri, termasuk matematika, punya keterbatasan. Untuk itu, saya perlu membahas sedikit tentang fondasi matematika.

Krisis pada fondasi matematika

Tidakkah kita pernah bertanya, ketika sains secara umum mendasarkan kebenarannya pada realita, apa sebenarnya dasar kebenaran matematis? Logika? Siapa yang bisa memastikan logika itu sendiri benar? Bukankah logika itu hasil formulasi manusia sendiri? Selain itu, kalaupun kita mengasumsikan aturan-aturan logika itu sendiri sudah valid, logika hanyalah alat untuk menyimpulkan kebenaran suatu pernyataan **dari kebenaran pernyataan lainnya**.

Jika demikian, tentu dibutuhkan suatu kumpulan pernyataan di awal yang dianggap benar tanpa perlu dibuktikan (karena jika tidak, maka proses logika tidak bisa dimulai dari apapun). Matematikawan menyebut ini **aksioma**.

Tapi *hey*, darimana kita tahu kumpulan aksioma yang dipilih itu memang tepat?

Aksioma dasar matematika menentukan sistem matematika yang dibangun. Itulah mengapa ia disebut fondasi, landasan tempat suatu bangunan didirikan. Agar seluruh sistem matematika bisa terbangun dengan baik, maka aksioma dasar ini butuh 2 syarat: **konsisten** dan **lengkap**. Kenapa konsisten? Tentu kita tidak ingin menghasilkan 2 pernyataan yang saling kontradiksi bukan? Kenapa lengkap? Tentu karena kita ingin aksioma dasar itu cukup untuk membangun seluruh kebenaran matematika (tanpa harus ditambahkan lagi dengan aksioma lain).

Sayangnya, singkat cerita, Einsteinnya matematika, Kurt Godel, telah membuktikan bahwa harapan idealis para matematikawan itu hanyalah utopia, melalui apa yang dikenal sebagai **teorema ketidaklengkapan Godel**. Lengkapnya, baca Jawaban Aditya Firman Ihsan untuk Apa yang dimaksud dengan Teorema Kelengkapan Godel (Godel's Completeness Theorem)?.

Hingga akhirnya, selalu ada pernyataan-pernyataan yang ***undecidable*** berdasarkan aksioma yang digunakan.

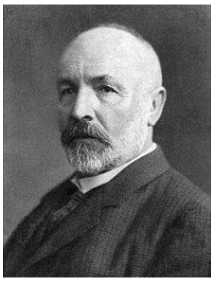
ZFC dan Hipotesis Kontinum

Meskipun sebenarnya matematika memiliki lubang besar di fondasinya, para matematikawan tidak pupus harapan. *Life must move on*. Mereka akhirnya meneliti model matematika apa yang bisa dibangun dengan aksioma tertentu. *So, in the end*, matematika semakin banyak diciptakan, melalui cabang ilmu fondasi matematika yang dikenal sebagai **teori model**.

Model yang *common* dipegang adalah 9 aksioma dasar yang disebut sebagai **Zermelo-Frankel Set Theory with Axiom of Choice (ZFC)**. Isi ZFC ini seperti apa, tidak akan saya bahas di sini. Yang jelas, dengan ZFC, seluruh matematika yang secara umum kita ketahui saat ini (kalkulus, geometri, aljabar, dsb), bisa dibangun denan baik…

…kecuali beberapa hal.

Salah satunya adalah **hipotesis kontinuum (Continuum Hypothesis / CH)**. Hipotesis ini cukup terkenal, diajukan oleh seorang genius bernama **George Cantor**, bapak dari ketakterhingaan.



Hipotesis ini terkait dengan masalah ketakterhinggan. Tak terhingga merupakan konsep yang begitu abstrak sehingga butuh begitu lama bagi matematikawan untuk benar-benar mendapat *sense* dari konsep ini.

Ketakterhinggaan bisa dipandang dari dua perspektif, yakni urutan bilangan (ordinal) atau banyaknya objek (kardinal). Ketakterhinggan yang diteliti Cantor adalah ketakterhinggaan dalam perspektif kardinalitas.

Secara sederhana, permasalahan ketakterhinggaan dalam kardinalitas adalah bagaimana kita menetukan himpunan mana yang lebih banyak anggotanya, jika isinya sama-sama tak terhingga?

Misal, antara mana lebih banyak, bilangan ganjil atau bilangan bulat? Mana lebih banyak, bilangan rasional atau bilangan riil? Mana lebih banyak, bilangan riil atau bilangan dalam interval [0,1]? Semuanya banyaknya takterhingga, tapi antara takterhingga itu, apakah ada takterhingga yang lebih besar ketimbang takterhingga yang lain?

Pertanyaan ini sudah dijawab oleh Cantor dengan menunjukkan 2 takterhingga yang ukurannya berbeda, yakni **takterhingga takterhitung** (*uncountably infinite*) dan **takterhingga terhitung** (*countably infinite*). Yang pertama disimbolkan dengan $\aleph_0$, yang kedua disimbolkan dengan cc. Bedanya apa? Yang terhitung, selalu bisa dienumerasi (dihitung) dengan bilangan terurut baik (dalam hal ini bilangan asli). Misal, bilangan genap, itu terhitung, karena kita bisa enumerasi 2,4,6,… dengan 1,2,3,… (mengaitkan setiap bilangan asli dengan bilangan genap melalui operasi kali dua). Kita sebut himpunan bilangan genap punya kardinalitas $\aleph_0$.

Akan lebih jelas bedanya, jika saya minta anda membilang/mengenumerasi bilangan riil. Misal dari 00, bilangan apa setelah 0? 0.1? 0.01? 0.000000001? Secara formal, telah dibuktikan bahwa **mustahil mengenumerasi bilangan riil**, sehingga ia tergolong takterhitung, artinya banyaknya lebih banyak dari yang terhitung seperti bilangan bulat. Dengan kata lain, himpunan bilangan riil punya kardinalitas c, dan $c > \aleph_0$.

Lantas apa yang dihipotesiskan oleh Cantor?

Bahwa tidak ada himpunan yang kardinalitasnya tepat diantara $\aleph_0$ dan c.

Atau dengan kata lain, tidak ada himpunan dengan kardinalitas λ dimana $\aleph_0 < \lambda < c$. Atau bisa juga dikatakan, **tidak ada himpunan yang anggotanya lebih banyak dari himpunan bilangan asli, namun lebih sedikit dari bilangan riil**.

CH ini telah dicoba dibuktikan oleh berbagai matematikawan. Lucunya, tidak seperti hipotesis lainnya yang kesimpulannya *either* benar atau salah, yang ditemukan justru, bahwa hipotesis ini tidak bisa *proven* ataupun *disproven,* dalam ZFC. Tebak siapa yang menghasilkan kesimpulan ini? Siapa lagi kalau bukan **Kurt Godel**, yang hasilnya dilengkapi oleh **Paul Cohen**.

Kata Godel, **CH tidak bergantung pada ZFC**. Artinya, ia benar atau salah, sistem ZFC *has nothing to do with it*. Bahasa lainnya, ZFC tidak bisa menentukan kebenaran dari hipotesis ini. Baik CH, atau negasinya, bisa ditambahkan ke ZFC dan sistem matematika kita tetap konsisten.

Aneh bukan? Ya, karena matematika sampai saat ini merupakan ilmu yang fondasinya bolong. Jadi **jangan berharap semua pernyataan bisa secara logika ditentukan benar-salahnya**. Tidak semua hipotesis bisa dibuktikan kebenarannya. Mungkin saja, memang, ada aksioma dasar lain selain ZFC yang kemudian bisa menghasilkan kesimpulan berbeda lagi untuk CH. Tapi apalah artinya? Itu seakan kebenaran sangat bergantung relatif pada sistem yang dikonstruksi manusia sendiri.

Dari sini mungkin kita bisa bertanya, apa sebenarnya makna kebenaran? Well, ini mungkin terlalu jauh. Tapi yang jelas, pernyataan yang *undecidable* tidak cuma CH, anda bisa baca yang lain di List of statements independent of ZFC - Wikipedia.

Semoga bermanfaat!

Bila $0.9999999999 \ldots = 1$, mengapa Epsilon tidak sama dengan 0?

8 Mei 2019

Saya sedikit bingung dengan maksud pertanyaan ini, karena sebenarnya tidak ada korelasi antar dua anak kalimatnya.

$0.999999 \cdots = 1$ karena memang angka 0.9999 ... hanyalah representasi lain dari angka 1, bukan karena ia angka yang begitu dekat dengan 1 sehingga menjadi sama dengan 1. Digit yang tak berhingga dibelakang koma berisi angka 9 ini tidak membuat ia tidak pernah bisa dianggap suatu angka tersendiri yang berbeda dari 1. Hal ini yang membuat manipulasi berikut dimungkinkan. Jika dimisalkan $x = 0.999$ ..., maka $10x = 9.999$ ... dan kita bisa peroleh

$$9x = 10x - x = 9.999 \cdots - 0.999 \cdots = 9 \Rightarrow x = 1$$

Perhatikan bahwa pada jika digit 9 tidak mengulang tak terhingga kali di belakang koma, misalnya 0.999, maka proses di atas menjadi

$$9x = 10x - x = 9.99 - 0.999 = 8.991$$

$10x$ menjadi hanya punya dua digit di belakang koma, sedangkan x masih memiliki 3 digit dibelakang koma, sehingga mereka tidak saling *cancelling*. Angka 9 di belakang koma yang mengulang tak terhingga kali membuat perkalian dengan 10 tidak mengurangi digit di belakang koma, sehingga ketika dikurangkan, digitnya habis menyisakan 9. Proses manipulasi di atas sebenarnya tidak harus dengan mengalikan 10, bisa $100, 1000,$ dan seterusnya. Karena inti dari manipulasinya adalah digit 9 yang tak terbatas itu.

0.999… bukan bilangan sendiri. Sekali lagi, ia hanya **representasi lain** dari 1. Dengan itu, kita bisa perumum menjadi bahwa semua bilangan asli selalu punya **2 representasi**, yakni bilangan asli nn itu sendiri, dan $(n - 1)$.9999 ....

Lalu, kenapa dengan logika yang sama, setiap bilangan kecil taknol ϵϵ tidak sama dengan 0. Karena sekecil-kecilnya ϵ digitnya tetap harus dimulai dengan suatu bilangan tak nol. Kalau semua digitnya nol, ya bukan bilangan kecil ϵ lagi namanya, itu memang 0.

Atau, anda berharap seperti yang dilakukan 0.999 ..., yakni bilangan yang sangat kecil, sehingga berbentuk 0.000 ... namun ada angka 1 di ujungnya? Bagaimana caranya? Posisi angka 1 pada digit keberapa di belakang koma tetap perlu didefinisikan dengan baik, karena ia tidak mengulang. Jika ada angka tak nolnya yang posisinya terdefinisikan, maka ia berarti selalu bisa direpresentasikan secara unik dengan $x \times 10^{-n}$ dengan $x > 1$ dan nn adalah posisi dari angka tak nolnya. Reprensentasi ini jelas bukan 0, karena sifat 0 adalah mematikan siapapun yang mengalikan diri dengannya, alias $a \cdot 0 = 0$. Sedangkan $a \cdot (x \times 10^{-n}) = ax \times 10^{-n}$, suatu bilangan lain.

Apakah matematika diciptakan atau ditemukan?

4 Mei 2019

Pertanyaan ini terkesan sederhana, namun begitu esensial.

Untuk menjawabnya, kita perlu perdalam terlebih dahulu pemahaman kita mengenai matematika.

So, **apa itu matematika?**

Matematika dalam perspektif umum bisa dipandang secara sederhana sebagai ilmu mengenai berhitung. Akan tetapi, memahami ilmu mengenai berhitung tidak hanya berarti bahwa kita cukup bisa berhitung, namun juga paham formulasi dari cara berhitung itu sendiri, apa yang harus dihitung, dan bagaimana cara menghitungnya. Dalam prosesnya, ketiga aspek tersebut dipelajari untuk memahami bentuk umum dari perhitungan, dan sebagaimana bentuk umum pada hampir semua konsep, mereka berada dalam wilayah abstrak.

Bagaimana mengukur berapa banyak pizza yang dimakan sekelompok orang bisa diperumum menjadi aturan penjumlahan, yang bisa memberi konsep tentang pecahan, yang kemudian dalam bentuk yang lebih rumit menjadi sebuah sistem persamaan linear, yang dalam bentuk abstraknya menjadi konsep aljabar linear yang menjadi mata kuliah anak tingkat 3 jurusan matematika.

Konsep kalkulus seperti limit, integral, dan diferensial pun merupakan abstraksi dari suatu perhitungan tertentu, dimana ada variabel atau ukuran yang ingin ditentukan atau dicari nilainya.

Inilah kata kuncinya: **abstraksi.**

Pada perkembangannya, proses abstraksi ini pun terus terjadi hingga menjadi suatu ciri khas tersendiri dari apa yang dilakukan matematika. Jika yang dilakukan matematikawan hanyalah berhitung, maka para fisikawan, insinyur, ekonom, pengusaha, bahkan hingga pedagang pun melakukannya, bahkan secara konkret dengan objek yang jelas. **Matematika hanya melakukan proses abstraksi dari realita ke dalam suatu model tertentu yang sifatnya general dan independen dari realita itu sendiri**. Proses menghitung dua apel ditambah dengan tiga apel menjadi lima apel diabstraksi dalam suatu aturan dimana ia sudah tidak lagi bergantung pada realita, yakni bahwa dua ditambah tiga adalah lima, tidak peduli itu apel, mobil, uang, atau apapun.

Tujuan dari abstraksi matematis adalah **generalisasi konsep** sehingga aturan yang formulasikan berlaku secara universal. Untuk mencapai tujuan tersebut, pembahsaan yang detail mengenai suatu objek matematis tidaklah diperlukan, karena yang terpenting adalah bagaimana objek itu berperilaku dalam suatu aturan matematika tertentu. Dengan itu, setiap objek riil cukup diambil substansinya saja dalam bentuk objek khayal yang hanya membawa sifat-sifat perlu dari objek yang sesungguhnya.

Matematika selalu berusaha melihat substansi dari realita dan membawanya ke ranah ide atau *forma*. Dalam ranah ide, semua objek cukup ditunjuk atau direpresentasikan dengan huruf atau simbol sederhana ketimbang kata-kata untuk mempermudah pembacaan atau penulisan. Terlebih lagi, karena ranah ide ini merupakan generalisasi dari realita, maka terminologi tidak perlu diberikan kepada setiap objek spesifik. Misalnya, objek waktu cukup dituliskan dengan suatu huruf ‘t’ dimana ‘t’ ini, sebagai substansi dari waktu, harus bernilai bilangan riil positif (karena waktu bersifat kontinyu dan tidak mungkin mundur).

Secara umum, mekanisme ini dapat digambarkan dalam bagan berikut

Karena matematika selalu bermain di wilayah yang sudah independen dari realita, maka **satu-satunya aturan yang bermain di dalamnya hanyalah logika yang rigid**, bersama dengan aturan-aturan lain yang dibangun sebelumnya. Sebagaimana apa yang dikatakan George Cantor, “*Esensi dari matematika adalah kebebasannya*”. Apapun bisa dikonstruksikan dalam suatu sistem matematika, selama mengikuti kaidah logika formal yang valid.

Memang terkadang, dalam proses abstraksi yang sudah jauh ke wilayah teoretik, objek-objek matematika berubah menjadi murni independen, bahkan **tanpa memiliki proyeksi terhadap realita**. Objek-objek ini hanya menjadi objek yang ada hanya untuk sistem tersebut, tanpa merepresentasikan apapun pada realita. Akan tetapi, ketika suatu sistem matematika memang dibangun dari hasil abstraksi langsung dari suatu objek riil, beberapa kaidah dalam realita menjadi koridor pembatas tersendiri dari apa yang bisa dilakukan pada sistem tersebut, dan kita pun selalu bisa memproyeksikan kembali setiap objek pada sistem tersebut dalam konteks yang sesungguhnya di dunia nyata.

Ketika melihat matematika secara independen, mungkin terkesan bahwa matematika “diciptakan” oleh manusia. Semua objek matematika ada *by definition*, dan semua teorema matematika pun dibangun dari definisi-definisi yang dibuat manusia, apakah itu operasi tambah, kali, limit, turunan, integral, dan segala macam. Itu memang benar,. Akan tetapi, **jangan lupakan** bahwa semua definisi yang dibangun manusia itu *based on abstraction of reality*.

Ibarat imajinasi, semua yang bisa kita pikirkan/bayangkan dalam kepala kita mungkin terkesan kita sendiri yang “ciptakan”, tapi sebenarnya semua imaji itu dibangun dari citra abstrak realita yang pernah kita lihat. Manusia tidak akan pernah bisa memikirkan apapun tanpa mengandalkan apa yang ia cerap dari realita.

Justru, yang bisa kita tangkap adalah, karena matematika mengabstraksi konsep-konsep realita, justru **matematika merepresentasikan esensi yang lebih dalam dari realita itu sendiri**, dan proses abstraksi yang kita lakukan adalah proses *discovery* dari esensi itu.

Lagipula, usaha manusia untuk “membangun ulang” seluruh bangunan matematika yang *purely* independen dari realita telah terbukti gagal dengan dibuktikannya teorema kelengkapa Godel, sehingga seakan sekarang dianggap bahwa matematika mengalami *foundational crisis.* Padahal, kita hanya lupa bahwa fondasi matematika ada justru di realita itu sendiri.

Jadi, apakah matematika diciptakan (*invented*) atau ditemukan (*discovered*)? **Ditemukan**, dalam abstraksi terdalam dari realita.

Apa yang dimaksud dengan nilai Eigen beserta fungsinya?

3 Mei 2019

Untuk memahami perubahan, kita harus memahami hal-hal yang tidak berubah. - Anonim

Kutipan di atas begitu esensial, karena matematika senang mempelajari perubahan akan sesuatu, meskipun sebenarnya makna kutipan itu tentu bukan dalam konteks matematika.

Objek matematika tentu bisa berubah-ubah. Bagaimana ia berubah-ubah ini yang terkadang menjadi inti dari kajian matematis. Apa saja objek matematika? Yang paling dasar sebenarnya bilangan. Akan tetapi, perubahan terhadap 1 variabel bilangan sudah cukup tuntas dianalisis oleh kalkulus, melalui konsep limit dan turunan, maka tidak ada eigen-eigenan di sana.

Objek matematika yang cukup penting dan banyak dikaji adalah **vektor**. Kenapa vektor? Karena ia bisa merepresentasikan begitu banyak hal, baik secara abstrak maupun nyata. Setiap titik dalam geometri euklid, dimensi berapapun, selalu bisa direpresentasikan sebagai vektor dari titik **0**. Sehingga bentuk geometri apapun selalu bisa dilihat dalam kumpulan vektor. Vektor juga merepresentasikan suatu set nilai tertentu, yang tentu bisa bermakna apapun dalam realitanya.

Vektor dengan nn komponen, selalu bisa ditulis dalam bentuk $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$, atau yang lebih formal

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Perubahan dari vektor tentu menarik untuk dipelajari. Pada dasarnya, perubahan dari vektor selalu diwakili oleh suatu matriks. Misalkan saya punya vektor, $(1,2)$ kemudian saya cerminkan terhadap sumbu y, maka tentu vektor hasil cerminannya adalah $(-1,2)$ bukan? Dalam konteks ini, matriks perubahannya adalah $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Coba anda kalikan matriks itu dengan vektor $(1,2)$, maka pasti diperoleh $(-1,2)$. Sehingga, untuk suatu vektor v, perubahannya terhadap matrix A adalah Av.

Di sinilah kemudian para matematikawan tertarik dengan apa saja yang tidak diubah oleh perubahan tersebut? Karena kita bermain dengan vektor, maka yang sering dilihat adalah cukup arah dari vektornya, karena besar dari suatu vektor hanyalah penskalaan dari arahnya saja. Maka muncullah pertanyaan, apakah ada vektor v, sehingga $Av = \lambda v$. Yang berarti perubahan oleh matrix A, tidak mengubah arah dari v!

Singkat cerita, matematikawan berhasil menemukan cara mencarinya. Karena seakan perubahan oleh A terhadap v terwakili oleh λ, λ seakan menjadi karakteristik atau jati diri dari matriks A untuk vektor v, maka disematkan ia dengan predikat *eigen* (bahasa jerman untuk diri/*self*) ddan dinamakanlah ia menjadi **nilai eigen**. Vektor yang tidak berubah arahnya oleh A pun disebut juga sebagai **vektor eigen**.

Matematikawan selalu suka dengan hal-hal yang lebih umum, karena tentu prinsip-prinsip yang lebih umum memberi kita pemahaman yang lebih menyeluruh bukan? Karena itu, mereka tidak berhenti di vektor, mereka generalisasi vektor menjadi apapun yang punya 10 sifat. Apa saja sifat-sifat itu? Terlalu panjang untuk dibahas di sini, namun generalisasi ini menghasilkan banyak sekali objek yang bisa dibahas dengan cara yang sama. Apa saja? Fungsi, barisan, dan bahkan matriks itu sendiri. Kumpulan objek-objek yang punya 10 sifat itu pun disebut sebagai **ruang vektor**, meskipun isinya sendiri bukan vektor.

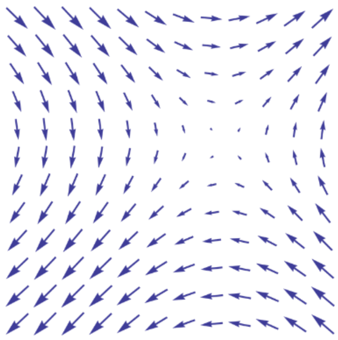
Namun, tentu kalau objeknya sudah aneh-aneh, matriks tidak lagi bisa merepresentasikan perubahannya kan? Dirumuskanlah generalisasinya, dengan apa yang disebut sebagai **transformasi**. Anggap saja seperti fungsi kalau dalam konteks bilangan. Misal saya punya objek v, maka transformasi T dari objek v adalah $T(v)$. Seperti apa bentuk T? Kita tidak tahu, tentu bergantung dari T itu sendiri dan ruang vektornya. Tapi tentu, matematikawan akan selalu tertarik dengan sifat-sifat dari T **secara general**.

Karena T adalah generalisasi dari matriks, dan setiap matriks selalu punya vektor eigen dan nilai eigen, tentu seharusnya T juga punya vektor eigen dan nilai eigen kan? Iyap, artinya kita mencari objek v yang memenuhi $T(v) = \lambda v$. Nama “vektor” tentu harus menyesuaikan, sehingga jika objeknya fungsi, namanya menjadi **fungsi eigen**.

Ketika kita berbicara terkait fungsi eigen, maka seringkali transformasi yang dibicarakan adalah operator diferensial $\frac{d}{dx}$, sehingga $Tv = \frac{d}{dx}v$. Fungsi eigen, dengan itu, adalah fungsi yang memenuhi $\frac{d}{dx}f(x) = \lambda f(x)$.

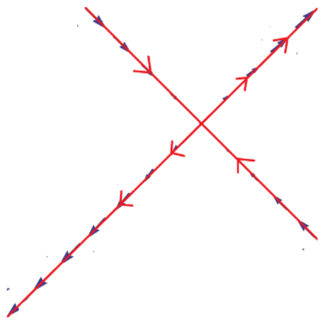
Apa manfaat dari memahami eigen-eigenan ini? Banyak. Seperti kutipan di awal, memahami nilai-vektor eigen dari suatu perubahan (transformasi) akan memberi kita banyak gambaran tentang sifat dari perubahan tersebut.

Salah satu kegunaannya adalah dalam **sistem dinamik**. Sistem dinamik adalah kumpulan variabel yang selalu berubah-ubah dan saling memengaruhi (namanya juga dinamik). Kumpulan variabel, tentu saja, selalu bisa dipandang sebagai vektor. Akan tetapi, karena variabel-variabel ini bergantung waktu (sebenarnya mereka fungsi *sih*), maka solusi umum dari sistem dinamik berupa **medan vektor**. Apa lagi itu? Medan vektor sebenarnya adalah hanyalah vektor-vektor yang nilainya berbeda-beda pada setiap titik. Seperti ini



Medan vektor yang didapat dari solusi sistem dinamik memperlihatkan dinamika variabelnya pada setiap titik. Tentu, dengan anda melihat gambar di atas, jika bayangkan suatu partikel diletakkan pada suatu titik sembarang, maka anda bisa tahu kemana ia akan bergerak bukan?

Nah, ketimbang mencari tahu bentuk eksplisit dari medan vektornya (yang tidak selalu bisa dilakukan), maka vektor eigen akan sangat membantu. Bayangkan sekarang, untuk medan vektor di atas, saya dapatkan 2 vektor eigen, yang bila saya gambarkan akan seperti berikut



Bisa kira-kira bayangkan bentuk medan vektornya di wilayah yang kosong seperti apa? Tinggal ikuti saja arah dari vektor eigennya, maka medan vektornya akan menyesuaikan.

Ya, ini baru salah satu contoh yang sangat sederhana dari aplikasi vektor eigen, dan tentu, masih banyak aplikasi lainnya yang membuat vektor eigen menjadi teknik matematika yang cukup dasar.

Apakah term yang hanya diketahui oleh seorang ahli matematika?

2 Mei 2019

Berhubung matematika adalah ilmu yang hampir selalu digunakan oleh ilmu lain, maka sebenarnya sebagian besar istilah matematika diketahui oleh ahli di ilmu lain, kecuali yang murni teoretis. Misalnya:

ordinal, kardinal, kategori, magma, grupoid, kontinuum, fraktal, kernel, lemma, epimorfisme, monomorfisme, monoid, monad, komonad, kodimensi, koset (ko-himpunan), ko-graf, functor, core, centraliser, normalizer, orbit, kisi (*lattice*), spektral, dan masih banyaaak lagi.

Beberapa istilah, menggunakan bahasa biasa namun punya makna khusus, seperti

kelas, buka, tutup, padat, aksi, baik, primitif, lapangan, gelanggang, ajaib, kompak, selimut, terhubung, terhitung, terhingga, terpisahkan, terukur, terbatas, terbangun, dan masih banyak lagi yang sebenarnya membuat matematikawan bisa dengan mudah membuat *jokes* karena istilah yang dipakai sering digunakan sehari-hari.

Mengapa bola bentuknya bulat?

27 Apri 2019

Karena definisi.

Kamu seperti bertanya mengapa segitiga punya tiga sisi, mengapa sepeda dikayuh, atau mengapa sepatu dipakai di kaki.

Berapa hasil jika tak hingga dibagi dengan nol?

26 Apr 2019

Jawaban singkatnya, seperti kata kulit kerang ajaib:

Kenapa?

Sebelum benar-benar bisa menjawab pertanyaan ini sepenuhnya, paling tidak kita harus menjawab dua pertanyaan dulu:

Apa sebenarnya arti pembagian terhadap 0? Dan apa sebenarnya tak terhingga?

Yang pertama, sudah saya jawab di Jawaban Aditya Firman Ihsan untuk Berapakah hasil dari pembagian dengan pembagi bilangan nol (n0n0)? Singkatnya, pembagian terhadap 0 tidak pernah terdefinisi, artinya ia tidak punya makna. Kita boleh melakukannya, namun tidak ada artinya sama sekali. Itu seperti mencoba berbicara "cantik ke dari minum memacul", yang merupakan kalimat tanpa makna sama sekali.

Yang kedua, agak rumit untuk dijelaskan, namun agar dapat *sense* dari tak terhingga sesungguhnya, bisa baca dulu jawaban di pertanyaan lain yang terkait.

Tak terhingga merupakan konsep yang membingungkan banyak matematikawan karena sifatnya yang kontra-intuitif. Anda bisa simak baik-baik bagaimana Hilbert mengilustrasikan betapa sukar masuk akalnya konsep tak terhingga. Sayangnya, tak terhingga tidak lebih dari suatu konsep abstrak yang tak punya pengejawantahan, ia bukan bilangan, bukan suatu objek, bukan apa-apa. *Infinity is not a thing!* Dia tidak lebih dari sekedar konseptualisasi dari kardinalitas himpunan yang sangat besar.

Lantas, apa artinya tak hingga dibagii sesuatu? **Tidak ada!** Tak hingga dikenakan operasi apapun pun tidak punya makna! Ditambah lagi, apapun dibagi 0 tidak punya makna juga, sehingga tak terhingga dibagi 0? Lebih tidak bermakna!

Tapi, apakah memang demikian?

Jika kita memandang tak terhingga sebagai suatu entitas tersendiri, maka iya, memang demikian. Akan tetapi, persepsi akan tak terhingga punya sudut pandang lain dalam ilmu kalkulus. Tak terhingga dalam kalkulus, khususnya konsep limit, hanyalah merupakan *sesuatu yang jauh di sana*, sehingga hanya perlu didekati. Bayangkan aja suatu garis lurus tanpa ujung. *Nah*, tak terhingga dipandang sebagai sesuatu yang entah apa jauh di 'ujung' garis itu. "Yang jauh" itu bisa didekati oleh suatu fungsi dengan membuat variabelnya mendekati titik yang lain.

Contoh, kita tahu bahwa nilai $\frac{1}{0.1} = 10, \frac{1}{0.01} = 100, \frac{1}{0.001} = 1000$. Tentu dengan itu kita bisa berekspektasi bahwa semakin kecil x, maka semakin besar nilai $\frac{1}{x}$. Namun, x itu bisa mengecil sampai seberapa kecil? Dan nilai $\frac{1}{x}$ bisa menjadi seberapa besar? Kan 10 tidak punya makna. Maka dari itu, dibangunlah suatu konsep limit, dimana kita tidak perlu benar-benar menghitung nilai suatu fungsi di suatu titik, jika memang nilainya di titik itu bermasalah. Ya karena kita perkirakan semakin kecil x maka nilai $\frac{1}{x}$ semakin besar, maka kita anggap saja $\frac{1}{x}$ itu semakin menuju sesuatu yang jauh di sana, yang begitu besar, yang entah apa maknanya. Di tuliskanlah

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

Secara formal, arti dari persamaan di atas **bukan berarti** ∞∞ **itu suatu objek yang "ada"**, tapi, menggunakan definisi limit, persamaan di atas maknanya adalah

Seberapapun kecilnya x, selalu ada bilangan L dimana nilai $\frac{1}{x} > L$

Tanpa perlu sedikitpun kita *mention* apapun mengenai tak terhingga, kita bisa membangun konsep suatu titik yang begitu besar jauh disana, yang didekati dengan semakin kecilnya x.

Itulah konsep limit, dan dengan itulah kalkulus *deals with infinity without even defining it!*

Lantas, bagaimana dengan tak terhingga dibagi 0. Mau tidak mau, jika bersikeras harus ada jawabannya selain bahwa ia tidak punya makna, kalkulus harus terlibat. Sekarang, anggap tak terhingga per 0 bukanlah apa-apa, bukan objek, bukan sesuatu. Ia hanya konsep yang ingin kita dekati.

Sekarang misalkan saya punya fungsi $\frac{1/x}{x}$ (yang sebenarnya sama saja dengan $\frac{1}{x^2}$). Semakin kecil x, apa yang terjadi pada fungsi itu? Sesuai penjelasan sebelumnya, kita tahu bahwa pembilangnya pastilah semakin membesar, sedangkan penyebutnya ikut semakin mengecil. Secara keseluruhan sendiri, **fungsi itu tentu akan membesar** kan? Karena pembilangnya membesar, dan penyebutnya mengecil. Dapat *sense*-nya?

Sekarang, bagaimana jika x itu cukup kecil sehingga menghampiri 0? Ya sesuai penjelasan sebelumnya juga, pembilangnya pastilah menuju "tak terhingga" dan penyebutnya menuju 0, sehingga dalam konsep limit,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1/x}{x} = \infty$$

Tapi kan yang kita inginkan adalah tak terhingga per 0, atau $\frac{\infty}{0}$?

Eits, jangan lupa, aslinya $\frac{\infty}{0}$ **tidak punya makna!** Jangan berharap kalkulus bisa mengubah itu! Yang dilakukan disini adalah ternyata melalui konsep limit, $\frac{\infty}{0}$ setara dengan ∞. Kenapa? Karena pembilangnya besar, penyebutnya kecil. Dia secara keseluruhan akan membesar juga. Membesar kemana? Sekali lagi, tidak tahu. Tak terhingga dalam kalkulus hanyalah konsep sesuatu yang jauh di sana, entah apa.

Jadi, kalau ada yang menuliskan $\frac{\infty}{0}$ seakan ia adalah suatu objek tersendiri, maka biarlah ia berbicara tanpa makna, karena matematikawan terkadang menulis seperti itu hanya untuk membantu penjelasan, karena pada dasarnya, yang sedang ditulis adalah sesuatu yang didekati dimana pembilangnya membesar dan penyebutnya mengecil.

Saya tekankan sekali lagi, **tak terhingga dibagi 0 tidak punya makna!**

Jika matematika murni tidak memiliki manfaat praktis, lalu apa manfaat mempelajari matematika murni?

18 Apr 2019

Nothing at all

Tidak perlu naif. Mereka yang secara tulus dengan senang mempelajari matematika murni sebenarnya tidak pernah punya tujuan dalam ranah manfaat. Mungkin ada harapan kecil bahwa kelak 50 atau 100 tahun lagi, teori-teori itu akan bisa naik ke permukaan menjadi sebuah penerapan konkrit, tapi hal itu terlalu idealis. **Seorang matematikawan bermatematika hanya karena ia senang melakukannya!**

Kenapa pelukis melukis? Kenapa sastrawan bersyair? Kenapa filsuf berpikir? Beberapa "profesi" terkadang tidak berorientasi sedikit pun pada kebermanfaatan, selain dari apa yang mendorong profesi itu sendiri. Ya, mereka melakukan itu semua hanya karena mereka senang melakukannya! Kita makan, dalam kondisi paling dasar, adalah karena kita lapar dan ada dorongan untuk makan, bukan karena ingin sehat. Sehat sendiri hanyalah konsep yang dibuat manusia sebagai salah satu bentuk representasi *a good life*.

Jadi, apa manfaat mempelajari matematika murni? Ya tidak ada, selain mungkin sekadar memenuhi rasa penasaran, atau memenuhi hasrat dari kecintaan terhadap masturbasi logika formal melalui matematika.

Kalaupun memang akhirnya ada perubahan-perubahan internal yang kita interpretasikan sebagai "manfaat", seperti, dengan belajar matematika murni, logika kita menjadi tajam, rapih, dan terstruktur, itu belum tentu merupakan manfaat yang punya korelasi langsung dari matematika murni, karena pada dasarnya tu hanyalah penyematan makna atas pengalaman subjektif kita. *Well*, ketika ada dua orang melakukan hal yang persis sama, dengan cara yang sama, di tempat dan waktu yang sama, "manfaat" yang mereka dapatkan bisa berbeda, karena interpretasi subjektif terhadap pengalaman itu bisa berbeda.

Lagipula, terkadang kita hanya terlalu naif berusaha melakukan sesuatu demi manfaat, padahal di balik itu, sebenarnya ada dorongan halus yang tersembunyi secara psikologis yang menjadi sebab sesungguhnya dari tindakan itu. Betapa luar biasanya akal manusia, sehingga justifikasi atas *dorongan* itu bisa menghasilkan berbagai konsep alasan yang begitu beragam.

Kita berangkat bukan karena tujuan, tapi karena adanya hasrat yang mengisi hati kita untuk menggerakkan kaki.

Apa itu permasalahan Hilbert Hotel dalam Matematika?

26 Maret 2019

Paradoks Hotel Hilbert pada dasarnya bukanlah paradoks atau permasalahan apa pun, ia hanya sebuah ilustrasi sederhana untuk menjelaskan sifat suatu konsep yang begitu spesial dalam matematika: **tak terhingga (∞)**

Pertanyaan mengenai apa sebenarnya ∞ merupakan pertanyaan yang mengganggu para matematikawan pada akhir abad ke-19. Sebelumnya, ∞ hanya dianggap sesuatu yang begitu besar *jauh di sana* sehingga cukup diatasi dengan konsep limit. Akan tetapi, ketika kemudian pertanyaan mengenai kardinalitas (banyaknya anggota) suatu himpunan muncul, entitas ∞ ini membuat pusing.

Misalkan saja, kita tahu **banyaknya bilangan ganjil adalah tak terhingga**, tapi kita tahu juga bahwa **banyaknya bilangan bulat adalah tak terhingga**. Tentu kita berpikir, karena bilangan ganjil itu termuat di bilangan bulat, harusnya **bilangan bulat itu lebih banyak dari bilangan ganjil** bukan? Tapi mereka sama-sama banyaknya tak terhingga! Jadi, apakah tak terhingga itu bertingkat atau bagaimana?

Nah, David Hilbert, seorang matematikawan abad-20 yang setara dengan Max Planck atau Erwin Schrodinger kalau di bidang Fisika, memunculkan sebuah “paradoks” untuk menjelaskan jawaban dari masalah kardinalitas himpunan tak terhingga di atas. Paradoks inilah yang kemudian dikenal sebagai ***Hilbert's paradox of the Grand Hotel.***

Kita akan lihat mengapa ia disebut “paradoks”, padahal sebenarnya Hilbert sendiri sudah punya jawabannya.

Kalau misalkan ada hotel dengan 10 kamar dan semua kamar itu terisi semua. Jika ada pelanggan baru datang ingin menginap, maka **tentu mustahil** untuk menempatkan pelanggan baru itu di kamar manapun bukan? Bagaimana cara menempatkan pelanggan baru itu jika kamar kosong saja tidak ada?

Kita pun tentu, dengan akal sederhana kita, bisa menyimpulkan: ***hotel yang sudah terisi penuh tidak mungkin bisa diisi lagi.***

Hilbert kemudian mengatakan, *eits, kita lihat sekarang hebatnya ketakterhinggaan*.

Bayangkan sebuah hotel yang punya **tak terhingga kamar!**

Ada seorang pelanggan datang, maka tentu berdasarkan kesimpulan kita tadi, pelanggan ini tidak mungkin bisa menginap di hotel itu bukan? Di sinilah hebatnya tak terhingga. Karena banyaknya kamarnya tak terhingga, maka **nomor kamarnya tidak punya batas atas** bukan? Geser saja satu tamu setiap kamar ke kamar nomor berikutnya. Jadi, tamu di kamar no. 1 pindah ke kamar no. 2, tamu di kamar no. 2 pindah ke kamar no. 3, *dan seterusnya*.

Apakah *‘dan seterusnya’* ini ada ujungnya? **Tidak!** Namanya juga tak terhingga. Karena itulah perpindahan ini memungkinkan tanpa harus mengusir siapa pun.

Dengan demikian, kamar no. 1 jadi kosong dan pelanggan baru ini pun bisa menginap. Tidak masuk akal? Justru itulah ia dinamakan paradoks, karena bertentangan dengan intuisi kita di awal bahwa hotel yang sudah terisi penuh tidak mungkin bisa diisi lagi.

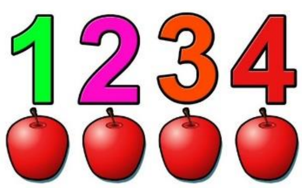
Paradoks ini banyak levelnya sebenarnya, dan setiap level selalu ada solusinya. Berikut beberapa contohnya*:*

1. Ada suatu rombongan studi banding dari suatu universitas dengan tak terhingga banyaknya mahasiswa. Mungkinkah setiap mahasiswa menginap di hotel Hilbert? **Mungkin!**
2. Ada suatu rombongan dari suatu kota dengan tak terhingga banyaknya sekolah, dengan setiap sekolah punya tak terhingga banyaknya murid. Mungkinkah setiap murid menginap di hotel Hilbert? **Mungkin!**
3. Ada suatu rombongan pariwisata dari suatu negara dengan tak hingga banyaknya provinsi, dimana rombongan setiap provinsi terdiri dari tak hingga banyaknya bus, dengan setiap bus berisi tak terhingga banyaknya turis ingin menginap di hotel itu. Mungkinkah setiap turis menginap di hotel Hilbert? **Mungkin!**

Mengapa hotel Hilbert itu selalu bisa memasukkan pelanggan baru, mau berapa pun banyaknya pelanggan itu? Karena sebanyak-banyaknya pelanggan yang datang, mereka semua terhitung (*countable*)!

Apa pula itu “terhitung”? Dan **mengapa semua yang terhitung bisa diakomodasi ke Hotel Hilbert?** Yang mau tahu jawabannya, siap-siap bertemu sedikit matematika.

Bagaimana sebenarnya kita “menghitung” (*count*) sesuatu, misal, apel di meja, atau motor yang parkir di toko? Kita sebenarnya melakukan pengaitan dari setiap benda yang kita hitung dengan bilangan asli. Ya, seperti anak TK belajar berhitung, satu per satu, kita tunjuk setiap apel dengan suatu bilangan, 1…, 2,…, 3…, 4! Pinter, 4 apel.



Matematikawan pun menggunakan konsep ini dalam konsep kardinalitas himpunan. Bukankah jika kita lihat, yang kita lakukan di atas adalah melakukan pemetaan dari himpunan apel di meja, dengan himpunan {1,2,3,4}? Maka, ketimbang menghitung satu per satu setiap anggota dari setiap himpunan yang kita temui, kita cukup bandingkan saja antar himpunan. Dua himpunan bisa dikatakan memiliki **banyaknya anggota sama** atau **kardinalitasnya sama** ketika kita bisa melakukan *mapping* dua arah (bolak-balik, atau disebut *bijeksi*) dari himpunan pertama ke himpunan kedua.

Misalkan, dengan asumsi tidak ada yang poligami, kita bisa tahu banyaknya perempuan bersuami dengan cukup tahu banyaknya suami yang beristri. Kenapa? Karena ada bijeksi berupa ikatan pernikahan yang memetakan setiap perempuan bersuami dengan suami yang beristri. Atau contoh lain, dengan asumsi tidak ada yang cacat, kita bisa tahu jumlah hidung manusia di bumi ini cukup dengan tahu jumlah seluruh populasi manusia. Kenapa? Karena setiap manusia hanya punya 1 hidung.

Oke, tentu kita sedikit bertanya. Apa gunanya konsep bijeksi ini ketika sebenarnya semua himpunan bisa dihitung dengan biasa, seperti di awal tadi? Cara menghitung manual tadi, akan bermasalah ketika kita berurusan dengan himpunan tak terhingga. Kenapa? Karena mau menghitung sampai kapan ketika batas atasnya aja tidak ada? Akan tetapi, selama kita masih bisa menghitungnya dengan bilangan asli, ia masih dikatakan *terhitung (countable)*. Secara formal, **himpunan terhitung didefinisikan sebagai himpunan yang memiliki bijeksi dengan subhimpunan dari himpunan bilangan asli**, meskipun ia *infinite* (karena bilangan asli itu sendiri tak terhingga).

Kembali ke permasalahan di awal, dengan konsep seperti ini, kita pun bisa mengatakan bahwa semua himpunan yang terhingga tapi terhitung (*countably infinite*) memiliki banyaknya anggota sama dengan himpunan bilangan asli. Atau dengan kata lain, kardinalitasnya sama, dan dinotasikan dengan $\aleph_0$ (tak perlu pusing dengan simbol, ini sama saja dengan ∞ namun dalam konsep himpunan).

Dengan itu, kita bisa menyimpulkan:

- Kardinalitas himpunan bilangan cacah adalah $\aleph_0$
- Kardinalitas himpunan bilangan ganjil adalah $\aleph_0$
- Kardinaltias himpunan bilangan bulat adalah $\aleph_0$
- Kardinalitas himpunan bilangan rasional adalah $\aleph_0$
- $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$
- $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$
- $\aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$
- $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$
- $\aleph_0 \times \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$

Semua benda nyata pada dasarnya terhitung, maka kamar hotel Hilbert, penghuninya, pengunjung yang baru datang, semuanya juga terhitung, sehingga konsep $\aleph_0$ berlaku di sini.

Karena banyaknya kamar hotel Hilbert adalah $\aleph_0$, maka banyaknya penghuninya adalah ℵ0ℵ0 juga. Berapa pun banyaknya pelanggan baru yang datang, semuanya juga pasti hanya berjumlah ℵ0ℵ0. Misal pada kasus ke-3 di atas, banyaknya provinsi adalah ℵ0ℵ0, banyaknya bus per provinsi adalah ℵ0ℵ0, banyaknya turis per bus adalah $\aleph_0$, maka total turis yang datang tetaplah $\aleph_0 \times \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$.

Penghuni awal hotel Hilbert adalah $\aleph_0$. Jika penghuni baru datang, maka banyaknya penghuninya menjadi $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$, maka tentu cukup untuk diisi pada kamar yang jumlahnya juga pas $\aleph_0$.

Dengan demikian, **berapa pun pengunjung baru yang datang, karena mereka pasti terhitung, mereka pasti bisa tetap menginap di hotel Hilbert**.

Tidak masuk akal bukan? Meskipun berada di luar intuisi kita, solusi hotel Hilbert benar secara matematis. Itulah mengapa ia disebut "paradoks".

Tambahan

Kalau semua benda nyata terhitung, contoh bilangan tak terhitung apa dong? Himpunan bilangan riil.

Kenapa? Tidak ada pemetaan yang bisa dibangun antara himpunan bilangan riil dan himpunan bilangan asli. Coba saja hitung himpunan bilangan riil, maka pasti gagal. Setelah 0, apa? 0.1? Tapi kan sebelum itu ada 0.01? Sebelumnya lagi masih ada 0.001. Lantas bagaimana menghitungnya? George Cantor, matematikawan sejenius Hilbert, telah membuktikan secara matematis, bahwa himpunan bilangan riil mustahil bisa dihitung, maka kardinalitasnya dinamakan dengan hal lain, yakni *kontinum* atau c, dimana $c > \aleph_0$.

Bagaimana urutan berpikir Euclid, dari definisi menuju proposisi, ataukah sebaliknya? Catatan: buku Elements dimulai dari definisi.

22 Mar 2019

Sebenarnya jawaban ini tidak hanya untuk Euclid, tapi juga cara berpikir logis-matematis secara general.

Matematika/Logika adalah ilmu deduktif, berbeda dengan sains yang sifatnya induktif . Matematika dan logika tidak mendasarkan kebenaran pada realita, bahkan benar-benar independen dari realita, karena dua ilmu ini hanya peduli pada validitas dari suatu alur deduksi.

Apa sebenarnya cara berpikir deduktif? Kebenaran pada dasarnya hanya status / nilai yang di-*assign* atau disematkan pada suatu pernyataan. Bagaimana cara menyematkannya? Inilah perbedaan mendasar dari deduksi dan induksi. Kalau induksi, suatu pernyataan bisa disematkan dengan suatu nilai kebenaran, apabila **memiliki korespondensi dengan keadaan riil**. Sedangkan deduksi, suatu pernyataan bisa disematkan dengan suatu nilai kebenaran, apabila ia memiliki koeherensi atau **konsisten dengan pernyataan-pernyataan yang sudah punya nilai kebenaran sebelumnya**.

Jadi, cara berpikir deduktif hanya bisa berangkat dari pernyataan-pernyataan yang memang sudah terbukti benar/salah sebelumnya. Akan tetapi, bukankah ini berarti kita membutuhkan suatu set pernyataan yang memang sudah punya nilai kebenaran tanpa perlu dibuktikan? Nah, set pernyataan ini lah yang dikenal dengan **definisi** dan **aksioma**, meskipun sebenarnya dua benda itu adalah hal yang sama, karena definisi pada dasarnya hanyalah aksimoa terkait pemberian istilah pada suatu konsep. Barulah kemudian, dari aksioma-aksioma dasar itu, dilakukan suatu proses deduksi untuk mendapatkan pernyataan-pernyataan lain, yang kemudian kita namakan sebagai **proposisi**.

Kenapa $\mathbf{0^0 = 1}$ sedangkan untuk $\boldsymbol{n}$ bukan 0, $\mathbf{0^n = 0}$?

17 Mar 2019

Pertanyaan ini bahkan menyiratkan hal yang belum pasti benar, karena 0000 pada dasarnya tidak selalu sama dengan 1.

Mengapa? Karena definisi matematikawan terhadap 0000 berbeda-beda. Seperti yang selalu saya tekankan terkait pertanyaan seperti ini, matematika adalah ilmu yang dibangun di atas **definisi dan aksioma**. Segala kebenaran matematis sangat bergantung pada dua komponen itu. Dalam hal ini, yang harus diperjelas adalah definisi pangkat.

Demi kesederhanaan, saya akan jelaskan mengenai pangkat bilangan bulat saja. Juga, demi kelengkapan penjelasan, saya akan benar-benar menggunakan konsep paling fundamental.

Suatu bilangan riil aa dikatakan dipangkatkan dengan suatu bilangan asli nn, atau dinotasikan a_n bila a dikalikan dengan dirinya sendiri sebanyak n kali. Dalam notasi yang lebih formal, kita bisa definisikan fungsi P_a dimana $P_a(n) = an$ untuk n bilangan asli dan sembarang bilangan a selain 0, yang memiliki sifat rekursif, yakni

$$P_a(0) = 1$$

$$P_a(n^+) = a \times P_a(n)$$

dengan n^+ disebut sebagai penerus (*successor*) dari n (bilangan asli berikut setelah n). Sebagai contoh, misalkan kita ingin menghitung 5^3 atau $P_5(3)$, maka perhatikan bahwa

$$P_5(0) = 1$$

$$P_5(1) = P_5(0^+) = 5 \times P_2(0) = 5$$

$$P_5(2) = P_5(1^+) = 5 \times P_5(1) = 5 \times 5$$

$$P_5(3) = P_5(2^+) = 5 \times P_5(2) = 5 \times 5 \times 5$$

Jelas kan? Mengapa perlu serumit itu hanya untuk sebuah pangkat? Karena sekali lagi, matematika sangat bergantung pada definisi, sehingga setiap definisi harus sejelas dan seformal mungkin.

Oke, itu baru pangkat bilangan asli. Kita kemudian bisa ekstensi itu ke bilangan bulat. Himpunan bilangan bulat pada dasarnya hanyalah himpunan bilangan asli beserta balikannya (*inverse*) terhadap operasi penjumlahan. Kita kemudian definisikan bahwa untuk suatu bilangan asli n, $a^{-n} = (a^n)^{-1}$, dan kita tahu bahwa untuk setiap bilangan bulat z, $z^{-1} = \frac{1}{z}$.

Oke, itu definisi pangkat dari suatu bilangan bulat, yang berarti belum termasuk 0. Lantas, bagaimana dengan 0n0n? Para matematikawan minimal sepakat bahwa untuk $n > 0$, cukup definisikan $0^n = 0$. Bagaimana dengan $n < 0$? Ya dari definisi pangkat negatif, karena $0^{-a} = \frac{1}{0^a} = \frac{1}{0}$, dan pembagian terhadap 0 tidak terdefinsi , maka 0^{-1} pun tidak terdefinisi. Yang tersisa adalah jika $n = 0$. Di sini muncul ketidaksepakatan.

Pada awalnya, definisi pangkat (berdasarkan fungsi P_a) adalah sama untuk semua bilangan termasuk 00. Yang berarti, karena selalu didefinisikan $P_a(0) = 1$, maka juga $0^0 = P_0(0) = 1$. Tetapi, muncul pendapat yang mengatakan, bahwa 0^0 adalah **bentuk tak tentu** (berbeda dengan tak terdefinisi). Dalam kalkulus, bentuk tak tentu hanya muncul dalam konsep limit, dimana nilainya sangat bergantung pada perilaku pemangkat dan yang dipangkat. Kenapa disebut tak tentu? Karena jika kita perhatikan perilakunya, untuk $a \neq 0$, nilai a^x selalu menuju 1 ketika nilai x menuju 0, padahal nilai x^a menuju 0 ketika x menuju 0.

Kesimpulannya? Jika anda bertanya mengapa ada yang mengatakan $0^0 = 1$, maka karena mereka ingin mendefinisikannya demikian. Meskipun sebenarnya, nilai 0^0 **bergantung konteks.**

Apakah titik (dalam ranah geometri) itu substansi?

15 Mar 2019

Kalau yang anda maksud substansi adalah entitas paling fundamental dari suatu konsep/realita, maka **iya**, titik adalah substansi dari geometri.

Geometri, pada konsep umumnya selalu memandang suatu ruang/semesta tertentu untuk kemudian di analisis segala bentuk yang ada di dalamnya. Contoh dari ruang adalah, ruang euklid, ruang sferis, ruang hiperbolik, ruang proyeksi, ruang linier, dan lain sebagainya.

Ruang apapun yang dipandang atau dianalisis, entitas paling dasarnya selalu dimulai dari **titik**. Meskipun makna titik di sini bisa sangat abstrak bila masuk ke ranah topologi (ilmu tentang bentuk dari ruang itu sendiri).

Apa kebalikan dari bilangan prima?

14 Mar 2019

Hati-hati dalam menggunakan terminologi.

Dalam matematika, penggunaan istilah yang kurang tepat akan menghasilkan konsep yang salah.

Balikan dalam matematika pada dasarnya merupakan terjemahan dari *inverse*. Secara definisi, balikan dari suatu bilangan bergantung pada operasi yang terkait, dimana ia adalah bilangan lain yang bila dioperasikan dengan bilangan tersebut menghasilkan identitas. Contoh, balikan dari 2 terhadap operasi tambah adalah -2 karena $2 + (-2) = 0$, namun balikannya terhadap operasi perkalian adalah $\frac{1}{2}$ karena $2 \times \frac{1}{2} = 1$.

Oke, sekarang saya yakin yang anda maksud adalah bukan "balikan" yang itu. Bila "kebalikan" yang anda maksud adalah bagaikan genap dengan ganjil, maka istilah yang tepat adalah **komplemen,** yakni himpunan bilangan lain yang melengkapi bersama himpunan bilangan yang terkait menjadi suatu struktur bilangan utuh, seperti bilangan asli, bulat, rasional, atau riil. Jika demikian, maka "kebalikan" dari himpunan bilangan prima adalah **himpunan bilangan komposit**.

Apakah semua orang harus mempelajari matematika?

14 Mar 2019

Matematika sebagai ilmu hitung? Iya, untuk minimal konsep-konsep dasar yang dipastikan semua orang bisa tanpa perlu kesusahan. Tujuannya apa? Tentu saja untuk bertahan hidup. Manusia yang tidak bisa berhitung di era sekarang akan kesulitan minta ampun berurusan dengan masyarakat, kecuali ia mau hidup serba konservatif.

Matematika sebagai cara berpikir? Tidak harus. Memang, banyak yang mengatakan bahwa matematika adalah lebih dari sekadar berhitung, karena ia melatih logika dan pikiran analitis. Tapi untuk apa? Konfusius tidak butuh paham matematika untuk bisa bijak dalam hidupnya. Pemimpin-pemimpin besar tidak butuh jadi ahli matematika untuk bisa membawa perubahan. Kita bisa melatih kemampuan berpikir kita tanpa matematika. Dalam hal ini, matematika hanyalah instrumen pembantu, bukan satu-satunya jalan. Jika ada yang merasa tidak senang matematika, maka tidak perlu dipaksakan.

Berapakah hasil dari pembagian dengan pembagi bilangan nol $\left(\frac{n}{0}\right)$?

12 Mar 2019

Bukan tidak bisa, tapi tidak terdefinisi.

Matematika adalah ilmu yang dibangun di atas **definisi dan aksioma**. Segala kebenaran matematis sangat bergantung pada dua komponen itu.

Sekarang, mengapa untuk suatu bilangan riil xx, dalam matematika x0x0 tidak terdefinisi?

Kita ambil konsep yang sederhana dulu pada bilangan rasional, karena bilangan riil pada dasarnya dibangun dari bilangan rasional.

Pada struktur bilangan rasional, operasi yang terdefinisi di dalamnya hanyalah penjumlahan dan perkalian. Pengurangan, pada dasarnya hanyalah penjumlahan terhadap *balikan (invers)* dari suatu bilangan. Misal, $1 - 2$ berarti $1 + (-2)$, dimana -2 merupakan balikan dari 2. Sekarang, apa itu balikan sebenarnya?

Kita perjelas dulu beberapa istilah.

Balikan, atau invers, terhadap suatu operasi (misal notasikan dengan $\circ$) dari suatu bilangan a, adalah bilangan b dimana berlaku $a \circ b = e$, dengan e adalah *identitas* dari operasi $\circ$. **Identitas** dari suatu operasi $\circ$ adalah bilangan e dimana untuk bilangan a apapun, selalu berlaku $a \circ e = a$. Sukar memahami? Yuk kita lihat contoh. Kita kenal operasi paling sederhana adalah operasi penjumlahan (dengan notasi +). Untuk operasi penjumlahan, identitasnya adalah 0 karena untuk semua bilangan a, selalu berlaku $a + 0 = a$. Balikan terhadap operasi ini dari suatu bilangan a adalah $-a$ karena berlaku $a + (-a) = 0$.

Nah, bagaimana dengan operasi perkalian? Operasi ini terdefinisi pada himpunan bilangan rasional dengan identitas 1. Kenapa? Karena untuk setiap bilangan bulat a, $a \times 1 = a$. Apakah setiap bilangan rasional punya balikan terhadap operasi perkalian? Iya, kecuali satu bilangan. *Guess what?* Ya, 0. Kenapa? Karena dari definisi, balikan dari 0 adalah suatu bilangan b dimana berlaku $b \times 0 = 1$. Adakah bilangan rasional yang memenuhi itu? **Tidak ada.**

Loh, kan yang ditanya adalah pembagian terhadap 0? Pembagian pada dasarnya hanyalah perkalian terhadap balikan dari suatu bilangan. Jadi, $\frac{a}{b}$ berarti $a \times b^{-1}$ dengan b^{-1} alias 1^b adalah balikan dari b terhadap operasi perkalian. Sehingga, karena 0 tidak punya balikan terhadap operasi perkalian, maka a0a0 tidak punya makna, alias tidak terdefinisi.

Jadi, jangan salah paham ya. Tidak ada yang melarang siapapun untuk membagi suatu bilangan dengan 0, hanya saja kawanku, itu sia-sia, karena hasilnya **tidak terdefinisi**.

Apa yang dipelajari jurusan "Matematika Terapan"?

9 Mar 2019

Banyak.

Tren matematika terapan adalah paradigma bahwa **segala sesuatu di dunia nyata ini selalu bisa dimodelkan dalam bentuk matematis**.

Paradigma ini mengimplikasikan banyak hal, mulai dari sesederhana bandul hingga dinamika atmosfer. Bahkan perilaku manusia pun bisa dimodelkan secara matematis. Hal ini membuat matematika terapan menjadi bidang yang sangat luas cakupannya, sehingga terkadang tumpang tindih juga dengan ilmu lain. Ketika ilmu lain berusaha meneliti model dari suatu fenomena yang mereka amati secara kuantitatif, maka mau tidak mau matematika terapan harus masuk ke situ. Sehingga, dalam konteks ini cabang matematika terapan dilihat berdasarkan ilmu gabungannya, antara lain:

1. Matematika fisika
2. Biomatematika (termasuk biostatistik)
3. Matematika Keuangan
4. Ekonometrika
5. Matematika Teknik
6. Matematika Industri
7. Sains komputasi
8. Sains Data
9. dan masih banyak lagi.

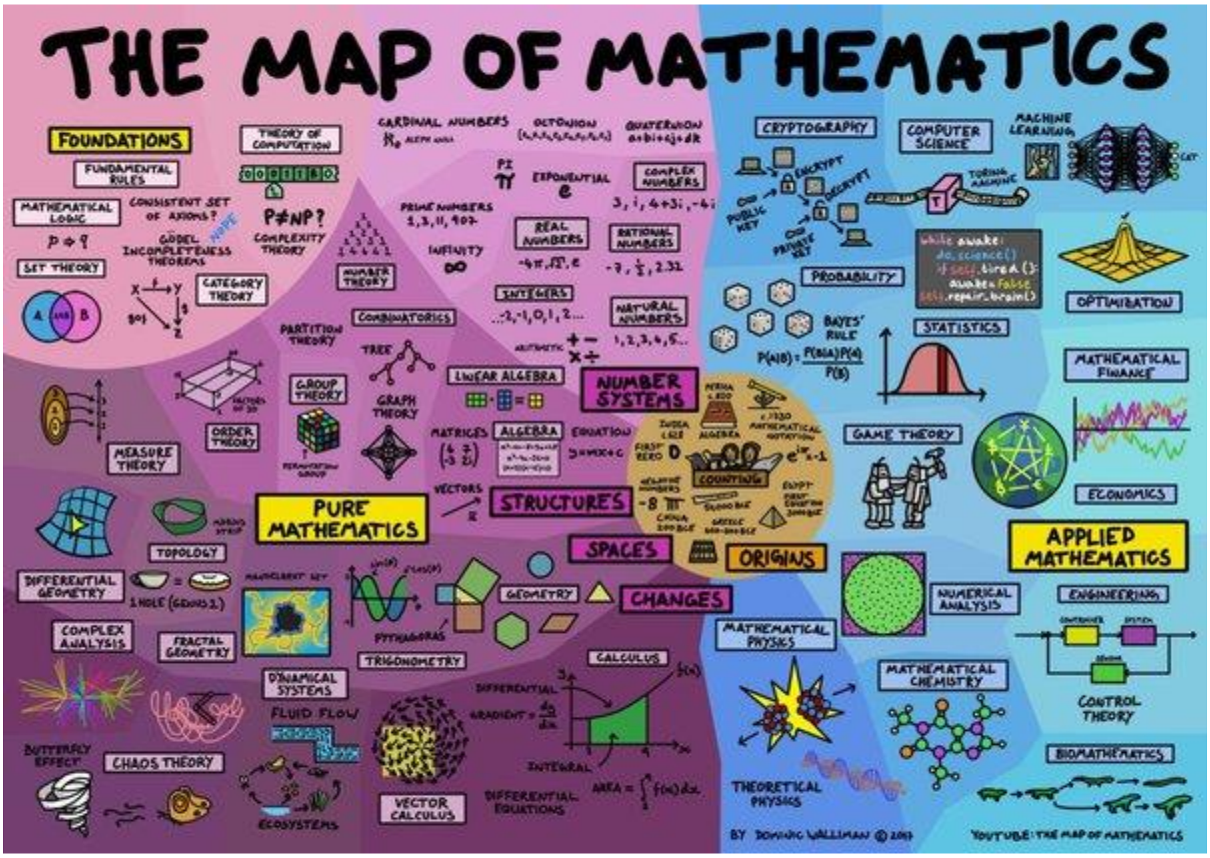
Namun, jika secara spesifik kita memandang matematika terapan sebagai suatu jurusan akademis, maka yang dipelajari paling tidak adalah versi general dari fenomena yang diamati secara spesifik oleh ilmu lain (entah ekonom, fisikawan, insinyur, dll). Dalam hal ini, matematika terapan paling tidak bisa diklasifikasikan dalam 8 sub-bidang:

1. Statistik (termasuk Machine Learning)
2. Sistem Dinamik
3. Teori Optimisasi
4. Teori Kontrol
5. Mekanika Gelombang

6. Masalah Nilai Batas
7. Metode Numerik
8. Teori Koding dan Kriptografi

Tentunya klasifikasi ini tidak rigid karena selalu ada masalah-masalah di alam yang membutuhkan lebih dari 1 teori matematika.

Bagan berikut (sumber) kurang lebih bisa memberi gambaran besar mengenai cabang-cabang matematika.



Apakah tak hingga (∞) merupakan sebuah bilangan?

8 Mar 2019

Jawaban singkatnya: **Tidak**.

Untuk kenapanya, pertanyaan yang harus dijawab pertama kali adalah, **apa itu bilangan?**

Berbicara mengenai bilangan akan sangat bergantung pada konteks, karena sebenarnya hanya menyebut **bilangan** dalam matematika tidak akan punya makna apa-apa, selain bahwa ia merupakan suatu objek dalam suatu himpunan. Secara general, kita akan bisa langsung menyebut himpunan yang dimaksud adalah himpunan bilangan riil (bisa juga himpunan bilangan kompleks, namun untuk kesederhanaan penjelasan, cukup sampai di riil), karena seluruh bilangan yang lain (bilangan rasional, bulat, asli, prima, dll) hanyalah bagian spesifik dari himpunan bilangan riil.

Untuk sesuatu bisa disebut bilangan, maka objeknya harus mematuhi sifat-sifat yang mendefinisikannya, dan ini bergantung pada himpunan bilangan apa objek itu berada. Misal, 2.5 disebut sebagai bilangan asli karena ia bisa dituliskan sebagai pembagian 2 bilangan bulat, yakni $2.5 = \frac{5}{2}$. Sekarang, kita harus definisikan dulu paling tidak 4 himpunan bilangan standar:

1. **Bilangan asli** merupakan bilangan yang dibangun melalui konsep penerus (*successor*) dari himpunan kosong ($\emptyset$).
2. **Bilangan bulat** merupakan **bilangan asli** beserta balikannya terhadap operasi penjumlahan (negatifnya).
3. **Bilangan rasional** merupakan hasil pembagian dua **bilangan bulat**, selama pembaginya bukan 0.
4. **Bilangan riil** merupakan representasi dari barisan **bilangan rasional** yang bersifat Cauchy (apa ini, abaikan saja)

Pertanyaan yang selanjutnya perlu dijawab adalah, **apa itu tak terhingga?**

Sederhananya, tak terhingga adalah konsep untuk **sesuatu yang sangat besar,** sehingga tidak boleh ada objek lain yang lebih besar darinya. Dengan konsep itu, tak terhingga pada dasarnya *undefined,* alias gagal terdefinisi. Kenapa? Karena tak terhingga, bila melihat dari definisi 4 himpunan bilangan di atas, tidak bisa dibuktikan mengikuti salah satu sifatnya.

Misal, ia kita andaikan merupakan bilangan asli, maka dari konstruksi bilangan asli, setiap bilangan asli selalu memiliki penerus (s*successor*), sedangkan itu kontradiksi dengan konsep tak terhingga, bahwa tidak boleh ada objek yang lebih besar darinya. Dengan cara yang mirip, kita bisa buktikan bahwa tak terhingga pasti bukan juga bilangan bulat, bukan juga bilangan rasional, bukan juga bilangan riil.

Lantas tak terhingga sebenarnya ada tidak *sih*? Ada, cuma hanya sebagai suatu ‘ukuran’.

Untuk memahami lebih jauh apa itu tak terhingga, saya sarankan baca dulu penjelasan saya **di jawaban pertanyaan yang lain**. Pada tulisan itu, tak terhingga bisa dipandang sebagai posisi dalam suatu urutan (**ordinal**) atau sebagai ukuran besarnya suatu himpunan (**kardinal**).

Baik pada keduanya, meskipun tak tedefinisi dengan baik, tak terhingga bisa dipandang sebagai “objek” tersendiri. Misal, dalam konsep kardinalitas, tak terhingga direpresentasikan dengan $\aleph_0$.

***Loh*, berarti tak terhingga itu merupakan bilangan *dong*, karena ia adalah bilangan kardinal?**

Memang sedikit ambigu di sini, bilangan kardinal dan bilangan ordinal hanyalah konsep yang dibangun untuk menjelaskan suatu ukuran, yakni ukuran “besar” himpunan atau ukuran posisi pada himpunan terurut. Keduanya bukanlah objek matematis sebagaimana bilangan asli, bulat, rasional, atau riil.

Ordinal maupun kardinal, memang pada mulanya hanyalah bilangan asli yang direpresentasikan dengan cara berbeda. Misal, posisi 3 terletak setelah 2 secara ordinal, atau himpunan dengan 3 anggota lebih besar daripada himpunan dengan 2 anggota. Ketika kemudian keduanya bertemu dengan konsep ketakterhinggaan, seperti, bagaimana kita bisa mengukur besarnya himpunan bilangan asli atau besarnya himpunan bilangan rasional, keduanya butuh representasi lain. Didefinisikanlah $\aleph_0$ untuk menunjukkan besar himpunan yang besarnya sama dengan himpunan bilangan asli, atau c_0 untuk menunjukkan besar himpunan yang besarnya sama dengan himpunan bilangan riil.

Akan tetapi, sebagaimana saya katakan sebelumnya, $\aleph_0$ maupun c_0 hanyalah ukuran abstrak dari suatu himpunan yang banyak anggotanya sama dengan dua himpunan patokan (asli dan riil). Keduanya bukanlah bilangan dalam *sense* objek. **Dalam matematika, ketakterhinggaan memang konsep yang tidak pernah bisa dieksplisitkan**. Bahkan ketika berusaha memastikan bahwa apakah sebenarnya bilangan asli itu banyaknya ada tak terhingga pun, matematikawan bingung untuk membangun konsepnya. Yang kita tahu, semua bilangan asli bisa selalu punya penerus. Hingga akhirnya, eksistensi dari adanya himpunan yang besarnya tak hingga pun harus diaksiomatisasi (dianggap benar dari awal tanpa harus dibuktikan).

Jadi, apakah tak hingga merupakan bilangan? **Tidak** dalam konteks bilangan sebagai objek matematis. Namun **iya** dalam konteks bilangan sebagai konsep ordinal atau kardinal.

Bagaimana membuktikan 1 + 1 = 2?

7 Mar 2019

Pertanyaan ini sederhana, tapi sebenarnya menyentuh sisi fundamental dari matematika itu sendiri.

Untuk bisa menjawabnya, kita butuh menjawab 2 pertanyaan pendahulu:

Apa sebenarnya bilangan?

Apa sebenarnya definisi penjumlahan?

Spoiler alert! Ini akan sedikit rumit dan melibatkan konsep abstrak fondasi matematika.

Well, apa itu bilangan? Secara pemaknaan sederhana, ia berarti suatu konsep untuk membilang (*counting*) sesuatu. Dalam makna yang lebih luas, ia juga bisa berarti segala bentuk penanda dari suatu ukuran. Pada makna yang pertama, ia merujuk ke konsep bilangan paling sederhana, yakni bilangan asli, sedangkan pada makna kedua, ia merujuk pada bilangan riil (bisa juga lebih general ke bilangan kompleks, namun di sini dulu cukup), yang sebenarnya juga mencakup bilangan asli. Bilangan riil bisa dibangun oleh bilangan rasional. Bilangan rasional, bisa dibangun oleh bilangan bulat. Bilangan bulatm bisa dibangun oleh bilangan asli. Bilangan asli? Ia tidak dibangun oleh apa-apa. Bilangan asli merupakan konsep bilangan paling primitif yang ditemukan peradaban manusia, karena ia murni hanya digunakan untuk membilang (*counting*). Namanya saja bilangan asli (*natural*), ia begitu natural sehingga ia menjadi objek paling mendasar dari matematika.

Tapi, bagi para matematikawan fundamental, ini masih sedikit bermasalah, karena setiap objek dalam matematika harus bisa didefinisikan dengan baik. Matematika dibangun melalui konstruksi logis setiap premis dan objeknya, sehingga haruslah segala sesuatu, termasuk bilangan asli, bisa dikonstruksi dengan logika formal yang jelas.

Karena matematika adalah ilmu yang *pure logic*, maka ia harus independen dari realita. *Lah*, terus, matematika bisa dibangun dari apa? Entitas paling fundamental dari matematika adalah himpunan. Tapi, himpunan sendiri harus terlepas dari realita, artinya, jika kita membicarakan himpunan, kita tidak bisa lagi mengatakan bahwa A adalah himpunan bunga berwarna merah, atau B adalah himpunan mahasiswa S1 ITB. Lantas darimana anggota-anggota himpunan itu bisa ada? Maka karena itu lah sebelum memulai, kita harus bayangkan pada awalnya tidak ada apapun di dunia ini (dunia matematika tentunya), bayangkan semesta abstrak yang kosong, dan dengan itu, **kita hanya punya himpunan kosong (∅)**, satu-satunya himpunan yang ada pertama kali, yang keberadaannya kita jamin secara aksiomatik.

Himpunan kosong ini, kita sebut ia sebagai **0 atau nol**, sebagai bilangan natural pertama kita (Dalam fondasi matematika, himpunan bilangan natural tidak harus dimulai dari 1). Dari nol ini kita bisa bangun bilangan natural secara rekursif melalui konsep penerus (*successor*). Dengan mengasumsikan pembaca sudah paham konsep gabungan (*union*) himpunan, penerus dari suatu bilangan asli aa didefinisikan sebagai $a^+ = a \cup \{a\}$. Maka, secara induktif, kita bisa membangun satu per satu bilangan-bilangan asli lain dari 0, yakni

$$0 = \emptyset$$

$$1 = 0^+ = \{\emptyset\}$$

$$2 = 1^+ = \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}$$

$$3 = 2^+ = \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}\Big\}$$

dan seterusnya.

Dengan cara ini, seluruh bilangan asli pun terbangun dan terdefinisi dengan baik.

Kita lanjutkan ke pertanyaan kedua. Apa itu sebenarnya penjumlahan? Ketika di level fondasi matematika hanya punya himpunan, maka dibangun konsep lain untuk merepresentasikan hubungan antar himpunan. Konsep lain ini adalah **fungsi**. Apa itu fungsi? Untuk sekarang, cukup kita pahami fungsi sebagai **pemetaan dari setiap anggota suatu himpunan ke himpunan lain**, meski sebenarnya definisi fungsi harus bisa dibangun dengan baik dari himpunan, tapi itu tidak penting untuk saat ini. Sekarang, kita bisa definisikan suatu fungsi A_m sehingga $m + n = A_m(n)$. Fungsi ini memenuhi

$A_m(0) = m$ atau $m + 0 = m$; dan

$Am(n^+) = \big(A_m(n)\big)^+$ atau $m + n^+ = (m + n)^+$.

Inilah definisi penjumlahan berdasarkan definisi bilangan asli yang dikonstruksi sebelumnya.

Oke, sekarang kita siap untuk membuktikan bahwa $1 + 1 = 2$. Perhatikan bahwa dari definisi penjumlahan di atas, kita bisa melihat bahwa

$$1 + 1 = 1 + 0^+ = (1 + 0)^+ = 1^+ = 2$$

Terbukti.

NB: Beberapa pernyataan di atas, seperti bahwa fungsi $A_m(n)$ memenuhi 2 sifat itu, dalam teori himpunan sebenarnya butuh dibuktikan. Namun, demi kesederhanaan penjelasan, saya anggap itu sudah terbukti.

Apakah setiap bilangan kompleks merupakan bilangan imajiner?

5 Mar 2019

Seperti jawaban saya yang lain, kita mulai dengan definisi saja yuk.

Bilangan imajiner adalah bilangan berbentuk $b\sqrt{-1}$ dengan b bilangan riil. Disebut imajiner karena $\sqrt{-1}$ tidak ada di himpunan bilangan riil.

Bilangan kompleks adalah bilangan riil "ditambah" dengan bilangan imajiner. Atau, bilangan yang berbentuk $a + b\sqrt{-1}$ dengan a dan b bilangan riil. Disebut kompleks karena gabungan antara yang riil dan imajiner (kompleks kan?).

Jelas sekarang yang mana merupakan yang mana?

Bilangan imajiner pada dasarnya hanyalah bilangan kompleks yang suku riil-nya 0.

Apakah bilangan 12,5 termasuk bilangan ganjil atau bilangan genap?

5 Mar 2019

Kita perjelas dulu definisinya yaa

Bilangan genap adalah **bilangan bulat** yang habis dibagi dengan 2

Bilangan ganjil adalah **bilangan bulat** yang tidak habis dibagi dengan 2.

Sekarang, apa itu bilangan bulat?

Bilangan bulat adalah **bilangan asli atau balikannya** terhadap operasi tambah (negatif).

Apa itu bilangan asli?

Bilangan asli adalah salah satu dari **1,2,3, dan seterusnya**.

Dari situ, 12.5 bilangan asli atau bukan? Bukan, jadi ia juga tidak bisa digolongkan sebagai bilangan bulat.

Lah bilangan bulat aja bukan, maka ia tidak dilibatkan dalam klasifikasi genap-ganjil

---

Dapatkah sebuah segitiga memiliki dua sudut siku-siku?

3 Mar 2019

BISA

Tapi,

itu hanya memungkinkan pada **geometri sferis (*spherical geometry*)**.

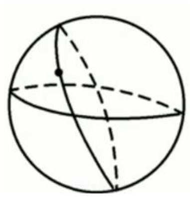
Apa pula itu geometri sferis?

Konsep-konsep geometri pada dasarnya bergantung pada "ruang" yang diamati. Geometri yang selama ini dipelajari di sekolah adalah geometri pada ruang Euclid (Euclidean Geometry), yakni geometri “ruang datar”, baik 2 dimensi maupun 3 dimensi, atau bahkan dimensi yang lebih tinggi. Dalam ruang Euclid, konsep-konsep klasik geometri berlaku dengan baik, seperti dua garis yang sejajar tidak akan pernah berpotongan, segitiga punya jumlah sudut sama dengan 180 derajat, dan lain sebagainya.

Akan tetapi, ruang Euclid bukanlah satu-satunya ruang yang bisa diamati. Paling tidak ada dua ruang tambahan yang cukup penting diketahui, yakni **ruang sferis** dan **ruang hiperbolis**. Keduanya adalah ruang yang “melengkung”, tidak “datar” seperti Euclid. Yang kedua, yakni geometri hiperbolis, hanya sering dipelajari fisikawan yang fokus pada teori relativitas.

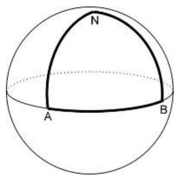
Ruang sferis adalah ruang yang berada pada permukaan suatu bulatan (*sphere*). Seperti ruang Euclid, ruang sferis bisa punya banyak dimensi. Khusus bulatan 1 dimensi adalah lingkaran dan bulatan 2 dimensi adalah bola. Sekarang, coba kita amati khusus bulatan 2 dimensi, karena kita ingin **menggambar segitiga.**

Apa itu segitiga? Dalam ruang apapun, definisinya sama, yakni suatu bidang yang dibentuk oleh 3 garis dan 3 titik sudut. Sayangnya, definisi garis di tiap ruang berbeda. Dalam ruang sferis, setiap ruas lintasan yang membelah tengah bulatan, adalah garis! Untuk membayangkan, pada bulatan 2 dimensi, setiap garis bujur pada arah apapun adalah garis. Berikut adalah ilustrasi 2 garis yang berpotongan di ruang sferis.



Satu hukum yang tidak berlaku pada geometri Euclid namun berlaku di geometri sferis, adalah bahwa dengan definisi garis di atas, maka **2 garis yang sejajar di bidang sferis, bisa memiliki titik potong!** Bayangkan saja dua garis bujur bumi yang jelas-jelas berpotongan di kutub utara dan kutub selatan.

Dengan fakta ini, kita pun bisa membuat segitiga yang dibentuk 2 garis sejajar, dan 1 garis yang memotong tepat secara siku-siku 2 garis tersebut. Berikut ilustrasinya



Dan tadaaa, kita dapatkan segitiga bahkan dengan **3 sudut siku-siku.**

Lebih general lagi, segitiga dalam ruang sferis faktanya punya **total sudut selalu lebih besar dari 180 derajat!**

Apa tujuanmu mempelajari matematika?

25 Des 2018

Mencari kebenaran

Kenapa? Kebenaran absolut sering dianggap berkaitan dengan sains sebagai ilmu pasti dengan standar ilmiah yang ketat. Pada mulanya, saya menganggap bahwa jawaban atas kebenaran bisa saya temukan dalam ilmu fisika, dimana semesta dibongkar hingga konsep dan hukum paling fundamental. Namun kemudian saya menyadari, senjata ilmu fisika ada dua, yakni metode ilmiah dan matematika. Tanpa matematika, fisika tidak akan berkembang. Tanpa matematika, banyak kebenaran dalam fisika tidak bisa diformulasikan.

Oleh karena itulah kemudian saya mengalihkan perhatian ke matematika. Terlebih lagi, matematika merupakan ilmu yang murni menggunakan logika, senjata yang didewakan kaum rasionalis. Saya belajar matematika untuk mencari landasan paling ultima dari kebenaran semesta.

Apakah matematika penting untuk menguasai bahasa pemrograman?

25 Des 2018

Tidak.

Khusus bahasanya ya, karena itu lebih terkait pada sintaks, struktur data, dan sebagainya.

Kaitan antara matematika dan pemrograman hanya ada pada konstruksi algoritmanya. Matematika terkadang membantu konsep berpikir yang sistematis sehingga suatu algoritma program yang efisien bisa dibangun.

Apa itu matematika?

25 Des 2018

Izinkan saya membagikan secuplik catatan saya di tempat lain beberapa tahun lalu terkait hal ini.

Pertanyaan tak terjawab

Ketika mencoba mencari jawaban pertanyaan dasar apa itu matematika, siapapun bisa memberikan jawaban yang berbeda namun tidak bisa disalahkan satu dengan yang lainnya. Walau mungkin anak matematika sendiri belum tentu pernah secara serius memikirkan apa itu matematika, sejak memasuki jurusan matematika, saya menyadari banyak yang berkata bahwa matematika adalah cara berpikir. Mungkin itu cukup cocok, hal yang tidak bisa disalahkan. Namun dari perspektif ilmu terapan, matematika juga adalah alat, yang tinggal pakai untuk menyelesaikan masalah yang sesuai pada berbagai sektor yang berbeda. Dalam perspektif yang berbeda, matematika lebih dari sekedar alat ataupun cara berpikir, matematika bisa menjadi sebuah prinsip, ideologi yang mengarahkan pandangan, sebuah sifat yang tak terlihat.

Terlepas dari semua itu, matematika juga bisa dilihat sebagai suatu objek, baik dalam bentuk mata kuliah, jurusan, pelajaran, buku, atau apapun yang secara nyata ada dan jelas. Dalam sebagai objek itu, salah satunya matematika juga bisa dibilang adalah sebuah ilmu. Sekali lagi, hal yang tidak bisa disalahkan dalam mencoba mendefinisikan apa itu matematika. Bahkan terlebih lagi, seperti mungkin apa yang dirasakan Srinivasa Ramanujan ketika dia menjadi begitu semangat dalam mempelajari teori bilangan, matematika menjadi suatu spiritualitas, suatu hal yang melampaui logika, melampaui seni, bahkan intuisi. Pada suatu keadaan tertentu, seorang matematikawan dapat merasakan suatu keindahan dan kebahagiaan tersendiri ketika berhadapan dengan matematika. Dilihat dari sisiyang berbeda lagi, matematika juga adalah bahasa, matematika juga adalah seni, dan masih banyak lagi perspektif lainnya yang tidak bisa disalahkan.

Semua pendapat itu mengakibatkan tidak ada pengertian pasti dari matematika. Padahal, matematika adalah eksistensi yang nyata, yang semua orang bisa merasakannya dan tahu bahwa itu matematika, walau memang pada kedalaman tertentu, hanya segelintir yang paham yang bisa melihat bahwa sesuatu adalah matematika. Maka apa itu matematika?

Masyarakat pada umumnya memahami matematika adalah ketika angka-angka dioperasikan. Dalam sistem pendiddikan di Indonesia, semua orang sejak kecil diberi persepsi serupa, bahwa matematika adalah ilmu hitung, titik. Bahkan pada Kamus Besar Bahasa Indonesia, matematika hanya didefinisikan sebagai: ilmu tt bilangan, hubungan antara bilangan, dan prosedur operasional yg digunakan dl penyelesaian masalah mengenai bilangan. Perspesi ini membuat matematika yang jika diibaratkan dalam dimensi n, hanya dilihat dari satu sisi koordinat, menghilangkan makna $n-1$ koordinat lainnya. Sempitnya arah pemahaman terhadap matematika ini membuat eksistensi matematika bagaikan hantu: tidak terlihat, terkadang membuat orang begitu takut untuk sekedar melihatnya, terkadang juga membuat orang begitu penasaran hingga terus berusaha agar bisa melihatnya.

Abstraksi Tanpa Batas

Awalnya Aristoteles mendefinisikan matematika sebagai "*science of quantity"* atau ilmu tentang kuantitas. Definisi itu mungkin masih cocok untuk bentuk dasar matematika ketika pertama kali lahir. Namun ketika abad ke 18 matematika mulai memperluas abstraksinya dengan munculnya teori grup dan geometri proyektif, definisi itu kehilangan makna dengan sendirinya, karena aljabar abstrak sama sekali tidak punya hubungan dengan pengukuran atau kuantitas. Abstraksi matematika yang terjadi selama abad ke 19 membuat definisi apapun selalu mengalami tidak cukup untuk menggambarkan matematika secara utuh.

Dengan menjadikan logika sebagai batu landasan, abstraksi yang dapat dilakukan menjadi tanpa batas. Dalam hal ini matematika menjadi suatu bentuk yang sangat bebas, karena yang terpenting dalam matematika adalah validitasnya, artinya tidak peduli apapun objeknya, tak peduli seaneh apapun hasilnya, selama melalui proses konstruksi yang valid, hal tersebut pasti berlaku. Permasalahan-permasalahan dari dunia nyata pun terus diperluas dan digeneralisasikan menjadi bentuk seumum mungkin. Dari 3 dimensi menuju n dimensi, dari keterhinggaan menjadi bentuk tak terhingga. Matematika yang awalnya hanyalah sebuah konsep membilang pun menjadi sesuatu yang sangat luas. Ketika segalanya diabstraksikan dalam bentuk umum, walaupun objeknya belum tentu ada di dunia nyata, apalagi yang tidak termasuk ke dalamnya?

Seiring watu, permasalahan di dunia nyata sebenarnya semakin luas dan kompleks, yang selalu menuntut menghasilkan cabang baru dalam matematika. Namun seperti dalam perkembangannya, matematika tidak pernah berhenti pada selesainya suatu permasalahan, namun selalu ada proses abstraksi lebih lanjut walaupun sudah tidak ada hubungannya lagi dengan permasalahan nyata. Ambillah contoh teori koding (salah satu cabang dari teori bilangan), bagaimana mengkonstruksikan kode sehingga error bisa terdeteksi. Permasalahan ini muncul dari dunia teknologi informasi yang memakai sistem biner dalam mentransmisi informasi, sehingga muncullah teori koding dalam lapangan (suatu sistem matematika dengan 2 operasi dan 8 aksioma) biner. Namun dalam perkembangannya, teori koding diperluas lagi menjadi lapangan dimensi n, walaupun tidak ada permasalahan dunia nyata apapun yang berhubungan dengannya! Abstraksi ini pun terus menciptakan suatu konsep raksasa yang mana segala sesuatu tunduk padanya, dan konsep raksasa ini hanya berdiri pada satu landasan: logika.

Ketakterbatasan abstraksi ini membuat perkembangan matematika tidak akan pernah berhenti. Ia hanya butuh satu koridor, selebihnya ia bebas kemana-mana. Hal ini seperti yang pernah dikatakan George Cantor, bahwa “Esensi dari matematika adalah kebebasannya.” Jika dibilang matematika adalah ratu ilmu pengetahuan, maka ratu bebas bekehendak pada semua pengetahuan manusia! Dan memang benar, matematika adalah satu-satunya ilmu yang begitu bebasnya, karena ia tidak berdiri di atas realita, ia tidak terbatas realita.

Esensi di balik eksistensi

Lalu apa itu matematika? Melihat eksistensi ini begitu mengalami ketidakjelasan makna, begitu luasnya hingga beberapa bahkan saling kontradiksi satu dengan lainnya namun tetap memiliki gambaran yang benar terhadap matematika, maka matematika diibaratkan bagaikan himpunan, objek yang tidak punya definisi. Yang bisa kita tahu dari himpunan hanyalah keanggotaannya, cukup. Karena ketika kita membatasi himpunan dalam bentuk definisi, maka Bertrand Russel pernah memberikan paradoks yang luar biasa dengan mendefinisikan suatu himpunan yang anggotanya bukan merupakan anggota dirinya sendiri, $R = \{x : x \notin x\}$. Hal ini membuat bahwa R elemen R jika dan hanya jika R bukan elemen R, kontradiksi! Maka jelas definisi tidak bisa membuat eksistensi dari suatu himpunan ada, tapi yang bisa dilihat dari himpunan hanya keanggotannya.

Seperti halnya himpunan, yang kita tahu dari matematika hanyalah apa yang terkait dengannya. Lebih tepatnya lagi, yang bisa kita tahu dari matematika hanyalah esensinya, tanpa perlu matematika itu mewujud menjadi suatu eksistensi. Apapun bisa jadi matematika. Hingga akhirnya Russel mencoba mendefinisikan matematika dalam bentuk tak terdefinisi. Ia menyebutkan bahwa matematika sebagai*: the subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true*. Memang suatu konsep yang absurd, tapi itulah matematika! Perkembagan matematika bukannya semakin memperjelas maknanya, namun malah mendestruksi jati dirinya sendiri. Matematika semakin mengabur dalam bentuk yang hanya bisa dirasakan secara intuitif. Pada titik inilah matematika melampaui logika, landasannya sendiri, menjadi suatu bentuk spiritualitas.

Maka ketika kita bertanya lagi, apa itu matematika, jawabannya tidak pernah ada, karena matematika adalah konsep yang selalu diperluas. Begitu luasnya hingga tidak pernah ada definisi yang lengkap untuk membuat semua yang termasuk dalam matematika memenuhi definisi itu. Syarat utama definisi adalah lengkap dan konsisten, artinya mencakup semua yang termasuk di dalamnya dan bentuknya selalu tetap. Namun ketika kita mencari definisi matematika, maka pastilah antaraia tidak lengkap atau ia tidak konsiten. Itulah kenapa hingga sekarang tidak pernah ada konsensus apapun yang menyepakati definisi matematika, bahkan tidak pernah ada kesepakatan apakah matematika itu seni atau sains, yang ada hanyalah klaim yang dipakai untuk mempersempit makna matematika dalam satu arah tertentu. Akhirnya hingga saat ini pun secara ironis, ketika matematika menciptakan banyak definisi dalam konstruksi konsepnya, matematika sendiri dianggap sebagai tak terdefinisikan.

Mengapa π disebut bilangan irasional?

25 Des 2018

Alasannya sederhana memang, karena berdasarkan definisi bilangan rasional, π tidak bisa dituliskan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a dan b bilangan bulat. Akan tetapi, bagaimana menunjukkan bahwa memang faktanya demikian?

Pembuktian bahwa pipi irasional cukup rumit. Anda jika punya kapabilitas matematika yang cukup, bisa baca langsung detailnya di Proof that π is irrational - Wikipedia. Untuk sekarang, bayangkan saja bahwa berdasarkan definisi, $\pi\pi$ merupakan rasio dari keliling dan diameter suatu lingkaran. Nilai keliling dan nilai diameter lingkaran ini bisa jadi kandidat untuk a dan b yang ingin kita cari. Akan tetapi, setiap kita cobakan suatu lingkaran dengan diameter berupa bilangan bulat, kelilingnya tidak akan pernah bisa berupa bilangan bulat (anda bisa coba ini secara *brute force* kalau mau). Tentu ini tidak bisa jadi bukti, karena penjelasan saya tersebut hanya ilustrasi agar memudahkan anda membayangkan mengapa π tidak rasional. Selebihnya, baca saja tautan yang saya berikan di atas.

Apa yang dimaksud dengan Teorema Kelengkapan Godel (Godel's Completeness Theorem)?

26 Des 2018

Menjelaskan teorema Godel dalam bentuk yang originalnya akan sukar, karena konsep yang ia tawarkan begitu kompleks setara mekanika kuantum dalam fisika. Saya akan coba elaborasikannya sesederhana mungkin.

Sejak akhir abad ke-19, beberapa matematikawan mulai mempertanyakan suatu hal yang sangat fundamental: dimana fondasi dari matematika? Pada era itu, matematika berkembang hanya melalui formulasi logis dari abstraksi-abstraksi terhadap realita. Pendekatan apapun bisa dilakukan asalkan bisa melalui proses deduksi formal yang patuh aturan-aturan logika. Sayangnya, deduksi ini berawal dari apa? Ibarat semesta, semua fenomenanya mematuhi hukum sebab-akibat, namun tentu kita bisa bertanya, rantai sebab-akibat ini berawal dari apa? Bila kita perhatikan, teorema-teorema dalam matematika selalu dideduksikan dari teorema lain yang telah dibenarkan (dibuktikan) sebelumnya. Karena itu, maka tentu haruslah ada suatu sistem aksioma awal yang memulai semua proses deduksi itu. Berbagai matematikawan pun mulai mencari sistem aksioma dasar ini. Dua kandidat yang terkenal adalah *principia mathematica* yang diformulasikan Bertrand Russell dan Alfred Whitehead, dan *Zermelo-Frankel Axioms*. Bisa dikatakan seluruh bangunan matematika bisa dibangun dari salah satu sistem aksioma tersebut.

Apa yang dilakukan Kurt Godel adalah *literally* menghancurkan kedua fondasi tersebut. Bahkan, makalah yang ditulis Godel terkait teorema yang ia buktikan berjudul "*On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems*", karena ia secara spesifik 'menyerang' konsep-konsep fundamental seperti *principia mathematica*. Apa sebenarnnya yang ditemukan (dibuktikan) oleh Godel?

Teorema ketidakpastian Godel terdiri dari dua bagian yang sebenarnya tidak terlalu rumit, namun signifikansinya sangatlah besar. Pada teoremanya yang pertama, Godel hanya mengatakan bahwa suatu sistem matematika yang aksiomatik (dibangun dari suatu set aksioma dasar) **tidak akan pernah bisa lengkap dan konsisten** sekaligus. Yang dimaksud 'lengkap' di sini adalah semua kebenaran dalam sistem tersebut bisa dibuktikan. Artinya, jika suatu sistem itu konsisten, maka pastilah ada kebenaran yang tidak bisa dibuktikan, akan tetapi jika sistem itu lengkap, pastilah ia tidak konsisten.

Pada teoremanya yang kedua, ia menambahkan bahwa suatu sistem tidak akan pernah bisa membuktikan konsistensi dirinya sendiri. Ini terkait dengan teorema pertama, karena teorema kedua mengatakan bahwa untuk membuktikan suatu sistem itu konsisten, maka kita tidak bisa menggunakan sistem itu sendiri, kita harus menggunakan aksioma tambahan untuk membuktikan bahwa sistem tersebut konsisten. Akan tetapi, aksioma tambahan ini menghasilkan suatu sistem baru, yang harus dibuktikan juga konsistensinya, namun sekali lagi teorema kedua mengharamkan itu sehingga kita akan butuh lagi aksioma di luar sistem itu, dan seterusnya. Hal ini menunjukkan bahwa aksioma dasar dalam suatu sistem matematika tidak akan pernah cukup dan lengkap, seperti apa yang dikatakan Godel pada teorema pertamanya.

Untuk ilustrasi, ketidaklengkapan dari sistem matematika ibarat berusaha membangun suatu himpunan yang berisi semua himpunan. Jika kita misalkan himpunan A berisi seluruh himpunan, himpunan A sendiri tidak masuk di dalamnya, maka makna "seluruh himpunan" di situ gagal terbukti. Agar A masuk ke dalam koleksi "seluruh himpunan", maka kita butuh himpunan B untuk melingkupi A dan isinya A. Hal yang sama kembali terulang, himpunan B sendiri tidak masuk di dalam "seluruh himpunan" yang diinginkan. Begitu seterusnya, sehingga adalah mustahil membuat himpunan dari seluruh himpunan. Dengan demikian juga suatu sistem aksiomatik.

Implikasi dari teori ini sebenarnya sederhana, namun merobek sebuah lubang besar dalam fondasi ilmu pengetahuan, karena teori ini akan mengatakan bahwa mustahil untuk membuktikan bahwa matematika (dalam sistem apapun) yang dibangun itu benar secara utuh (konsisten), karena untuk membuktikan bahwa ia benar, maka kita akan selalu membutuhkan sistem lain. Matematika tidak akan pernah bisa menjadi perangkat yang rigid dan lengkap. Ia menjadi fondasi yang berlubang dan instrumen yang rapuh. Lantas, bagaimana? Jika ini memang 'benar', maka hampir semua bangunan sains akan roboh, karena disamping eksperimentasi, matematika adalah salah satu fondasi terkuat sains.

Apakah matematika termasuk bidang seni atau ilmu pengetahuan?

26 Des 2018

Saya asumsikan yang anda maksud ilmu pengetahuan dalam konteks ini adalah sains. Karena kata ilmu, pengetahuan, beserta frasa gabungannya "ilmu pengetahuan" sering salah diaritkan oleh masyarakat.

Jika berbicara mengenai komparasi antar cabang ilmu, maka yang harus dilihat adalah aspek epistemologisnya. Epistemologi merupakan aspek filosofis keilmuan yang terkait dengan cara kita mengetahui sesuatu terkait ilmu itu. Sederhananya, epistemologi menelisik dasar-dasar kebenaran yang diakui dari setiap cabang keilmuan. Bagaimana kita ketahui suatu teori itu benar? *Well*, orang humaniora, filsuf, saintis, agamawan, seniman, **dan** matematikawan akan menjawabnya dengan cara yang berbeda-beda. Perbedaan inilah yang membuat epistemologi dari suatu ilmu menjadi tolok ukur pembeda yang akuran dalam klasifikasi cabang ilmu.

Kita bicarakan yang gampang terlebih dahulu, yakni sains. Sudah menjadi pemahaman umum bahwa standar kebenaran dari sains adalah metode ilmiahnya. Justifikasi kebenaran dari sains didasarkan pada hipotesis yang bisa diuji secara universal dan *reproducible*. Formulasi hukum sains harus bisa menjamin bahwa eksperimen (observasi) bisa dilakukan berulang-ulang secara objektif sesuai dengan variabel kontrol yang digunakan. Jika saya mengulangi eksperimen foto listrik saat ini di Bandung, hasilnya harus sama dengan hasil yang didapatkan Einstein seabad yang lalu di Eropa, dengan catatan variabel yang diamati benar-benar direplikasi. Akan tetapi, sains punya catatan penting, bahwa ia merupakan hasil pengajuan hipotesa **terhadap realita**. Setiap hukum sains berasal dari fenomena riil yang bisa diobservasi.

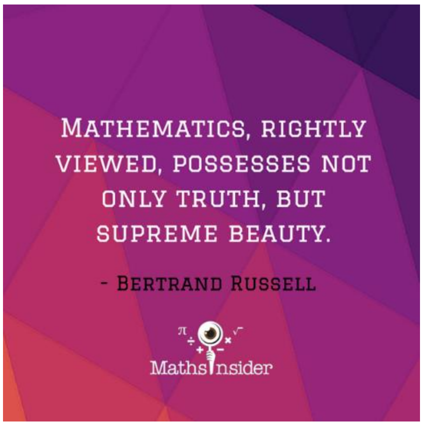
Berbicara mengenai seni akan lebih sulit. Mendefinisikan seni itu sendiri bukan hal yang mudah. Namun bila kita coba melihat aspek epistemologisnya, seni lebih mendasarkan 'kebenaran' pada unsur-unsur keindahan. Dilemanya, unsur keindahan tidak bisa terukur secara objektif, sehingga seni lebih terfokus pada apresiasi ketimbang justifikasi. Dengan itu, seni justru menjadi seperti antitesis dari sains, karena ia bersifat begitu subjektif karena 'kebenaran' dari seni berasal dari penilaian emosional seorang individu terhadap suatu objek, baik itu natural maupun artifisial. Seseorang berkarya bukan karena telah berpikir panjang secara rasional ataupun mengamati alam semesta, namun karena ada inspirasi emosional tertentu yang memantiknya untuk mengeluarkan gagasan terkait keindahan.

Lantas, bagaimana dengan matematika? Pada awal perkembangannya, matematika memang 'terkesan' seperti *tools* dari sains. Matematika digunakan untuk melakukan abstraksi terhadap hasil-hasil observasi, sehingga korelasi atau hukum tertentu bisa diturunkan dengan lebih kuantitatif dan lebih objektif. Bahkan, bisa dikatakan sains sebenanrya punya dua kaki, yakni metode ilmiah **dan** matematika. Tanpa matematika, sains, khususnya fisika dan astronomi, tidak akan bisa berkembang. Namun, itu adalah wajah matematika sekian dekade lalu. Sekarang, cabang-cabang matematika lebih sering disibukkan dengan hal yang bahkan tidak punya korelasi terhadap realita sama sekali. Matematika melakukan abstraksi dan generalisasi terhadap matematika hingga hubungannya dengan realita itu sendiri putus, menyisakan murni deduksi logika. Memang, masih ada cabang matematika yang masih menjaga hubungan baik dengan realita melalui pemodelan, metode numerik, statistik, dan beberapa aspek terapan seperti sistem dinamik, teori kontrol, atau metode optimisasi. Namun, matematika sebagai satu keutuhan sekarang telah menjadi entitas ilmu tersendiri yang murni cerai dengan sains.

Uniknya, meskipun matematika adalah ilmu yang murni membutuhkan logika, pada faktanya logika hanya menjadi media justifikasi kebenaran matematis. Logika diibaratkan eksperimentasi dalam sains, dimana sebelumnya harus sudah ada hipotesa terlebih dahulu yang perlu dibuktikan. Deduksi langsung tanpa melalui hipotesa bisa saja memungkinkan, namun jarang bisa ditempuh. Tapi, jika hipotesa dalam sains bersumber dari observasi awal terhadap fenomena riil, maka darimana hipotesa dalam matematika berasal? Di sinilah letak menariknya. Tidak ada jawaban tunggal akan hal ini! Setiap matematikawan bisa mendapatkan inspirasi terkait suatu teorema beserta pembuktiannya dengan cara yang begitu bervariasi. Keadaan emosional tertentu juga bisa mempengaruhi munculnya inspirasi. Srinivasa Ramajunan, seorang matematikawan India yang punya kontribusi cukup besar pada teori bilangan, bahkan dikatakan mendapat inspirasi (*vision*) mengenai matematika ketika sembahyang. Seorang matematikawan bisa saja melamun seharian dan tiba-tiba teriak *eureka.* Pada titik inilah matematika menjadi serupa dengan seni, yakni ketika inspirasi emosional subjektif tertentu bisa mempengaruhi gagasan seorang matematikawan dalam mencoba membuktikan suatu teorema. Beberapa hasil yang dimunculkan matematika pun terkadang begitu mengagumkan sehingga memiliki keindahan tersendiri. Matematika sekadar bukanlah ilmu dengan teorema yang kaku dan rumit, namun sebuah konsepsi akan harmonisasi abstraksi semesta yang terkadang begitu indah dan cantik. Saya sendiri sering terpukau dengan betapa mengagumkannya teorema-teorema matematika.

Jadi, apakah matematika seni atau sains?

Jawabannya adalah bahwa matematika merupakan **keduanya** sekaligus **bukan keduanya**. Matematika memiliki aspek sains dan seni yang melengkapi. Matematika seperti sains, eksak dan rasional, namun juga seperti seni, indah dan emosional. Namun, matematika tidak bisa disebut seni, dan tidak juga bisa disebut sains. Ia adalah entitas tersendiri, sinergi harmonis dari keduanya.



Sebagai seorang matematikawan, apa saja hal-hal yang ingin kamu bagikan agar masyarakat umum lebih paham tentang matematika?

28 Des 2018

1. Matematika dianggap sekadar ilmu hitung. Padahal, ilmu hitung hanyalah "permukaan" dari matematika.
2. Matematika dianggap terlalu abstrak dan tidak aplikatif. Padahal semua teknologi yang anda gunakan saat ini, dari komputer, pesawat, mobil, HP, internet, bahkan baju anda sekalipun, tidak mungkin bisa diproduksi tanpa matematika.
3. Matematika adalah ilmu yang tidak punya imbas langsung ke dalam kehidupan sehari-hari. Padahal, jika seseorang belajar matematika secara serius, ia memiliki kemampuan berpikir yang sistematis, terstruktur, kritis, dan rasional, sehingga banyak hal dalam hidup akan begitu dimudahkan dengan kemampuan berpikir seperti itu/.

Mengapa $0! = 1$**?**

21 Des 2018

Fungsi faktorial merupakan fungsi yang rekursif. Pendefinisian fungsi yang dilakukan secara rekursif, selalu membutuhkan dua hal, yakni aturan rekursi (pengulangan)-nya dan nilai awal untuk memulai rekursi yang dilakukan.

Dalam fungsi faktorial, kita punya aturan, bahwa nilai fungsi dari suatu bilangan bulat adalah hasil kali dari bilangan bulat itu dengan nilai fungsi dari bilangan bulat sebelum bilangan bulat itu. Dengan kata lain, misalkan f merupakan fungsi faktorial, maka

$$f(n) = n \times f(n-1)$$

Aturan ini tidak akan bisa mendefinisikan apa-apa bila tidak ada nilai awalnya. Tentu nilai awal ini sebenarnya bebas, namun untuk fungsi faktorial, karena memang yang diinginkan adalah

$$2! = 2 \times 1$$

$$3! = 3 \times 2 \times 1,$$

dan seterusnya, maka didefinisikan lah bahwa $f(0) = 1$ atau $0! = 1$.

Bisa saja sebenarnya saya definisikan $f(0) = 5$, maka nilai-nilai berikutnya menjadi $1! = 5$, $2! = 10$, $3! = 30$, dan seterusnya.

Sebagai kesimpulan, mengapa $0! = 1$? Ya karena fungsi faktorial didefinisikan demikian.

Apa cara efektif untuk belajar matematika?

21 Des 2018

Senangi dulu matematikanya.

Bagaimana cara senangnya? Dekati terus, hingga anda terbiasa dan mulai dimudahkan dengannya.

Bagaimana cara mendekatinya? Pahami konsep-konsep sederhana tanpa perlu melibatkan simbol yang terlalu rumit. Sudah banyak media yang menawarkan untuk memperkenalkan matematika dengan cara yang lebih visual atau menarik. Cobalah kunjungi kanal Youtube seperti 3Blue1Brown.

Berapa nilai dari (1/3)!, sepertiga faktorial?

21 Des 2018

Fungsi faktorial dalam versi originalnya (yang dengan simbol tanda seru) merupakan fungsi berdomain bilangan cacah. Domain fungsi adalah himpunan objek dimana fungsi itu terdefinisi. Karena domain fungsi faktorial hanyalah bilangan cacah, maka di luar domain itu, fungsi faktorial **tidak terdefinisi**.

Akan tetapi, dalam ilmu statistik diperkenalkan suatu fungsi berdomain bilangan riil yang bernama fungsi Gamma. Bagaimana bentuk fungsinya?

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

Tanpa disengaja, fungsi Gamma berperilaku seakan seperti perluasan dari fungsi faktorial. Kenapa? Fungsi Gamma, bila dihitung pada bilangan-bilangan cacah, maka ia memiliki nilai persis seperti fungsi faktorial pada bilangan cacah sebelumnya.

Perhatikan bahwa

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$$

dan juga

$$\Gamma(1) = 1$$

sehingga, kita akan dapatkan

$$\Gamma(n) = (n - 1)!$$

Maka dari itu, untuk menghitung faktorial dari $\frac{1}{3}!$, kita bisa gunakan fungsi Gamma sebagai perluasan dari faktorial, yakni $\Gamma\left(1 + \frac{1}{3}\right) = 0.89298$

Bagaimana cara menghapal dan memahami matematika dalam waktu singkat?

23 Des 2018

Matematika tidak untuk dihapal!

Itu satu poin penting dan utama. Ingin menghapal matematika, apalagi dengan waktu singkat pula? Maka bersiap-siaplah untuk tersesat dalam hidup anda.

Oke, bila anda memang tidak ingin menghapal, namun ingin paham, maka satu syarat utamanya adalah, tidak ada pembelajaran berkualitas yang bisa didapatkan **dalam waktu singkat**. Saya sampai heran mengapa pertanyaan ini bisa terpikirkan. Jika anda berharap ada suatu metode praktis dan instan untuk belajar seperti “pembodohan” yang dilakukan pada bimbel-bimbel, maka sekali lagi, bersiap-siaplah untuk tersesat dalam hidup anda.

Jadilah pembelajar yang sabar dan tekun. Tidak ada orang yang bisa menjadi bijaksana, pandai berenang, cerdas berpikir, berlari kencang, lihai dalam bermain bulutangkis, dalam waktu singkat! Matematika, sesulit apapun ia, pasti akan takluk oleh pembelajar yang tangguh, tidak terburu-buru, dan menikmati prosesnya.

Apakah ada bilangan yang lebih besar dari tak hingga (∞)?

8 Mar 2019

Untuk menjawab ini, perlu diperjelas dulu konsep “**bilangan**”, konsep “**lebih besar**” dan konsep “**tak hingga**”.

Kita mulai dulu ke konsep “lebih besar”. Frase “lebih besar” hanya bisa disematkan pada suatu himpunan yang terurut (*ordered set*). Jika suatu himpunan tidak terurut, maka tidak ada relasi “lebih besar” atau “lebih kecil” antar anggotanya.

Selanjutnya, masuk ke inti masalah. Apa sebenarnya “tak terhingga”? Konsep “tak terhingga” sebenarnya konsep yang *not well-defined,* karena sebenarnya ia lebih sering merepresentasikan sesuatu yang “lebih besar” dari semua bilangan lain, alias sesuatu yang sangat besar. Namun, seberapa besar?

Untuk menjawabnya, kita harus kembali ke konsep bilangan. Bilangan merupakan entitas yang unik sebenarnya. Ia begitu sering digunakan dalam matematika, namun pada dasarnya ia memiliki banyak definisi, bergantung konteks sistem yang dipandang. Bilangan pada umumnya bisa dipandang dalam 2 cara, yakni sebagai ordinal atau sebagai kardinal.

Bilangan Ordinal

Sebagai ordinal, bilangan dipandang sebagai "posisi" dari setiap objek pada himpunan terurut, khususnya himpunan terurut-baik atau *well-ordered sets* (himpunan terurut yang memiliki objek terkecil). Bilangan 1, misalnya, dalam konsep ordinal merupakan 'representasi' dari objek pada posisi pertama. Sebagai ordinal, bilangan semacam cara untuk melakukan "enumerasi", sehingga kita bisa melihat bilangan sebagai objek kedua, ketiga, keseratus, kesejuta, dan seterusnya, tapi sampai kapan?

Pada kehidupan sehari-hari, proses enumerasi tentu hanya akan sampai suatu bilangan asli yang "terhingga". Untuk kasus-kasus dimana jumlah suatu objek bisa begitu banyak, maka bilangan ordinal berperan sebagai ekstensi dari bilangan asli. Untuk melihat bagaimana ekstensi ini terjadi, kita perlu pahami bahwa terdapat tiga macam tipe bilangan ordinal. Yang pertama adalah 0 (nol), sebagai objek patokan pertama. Yang kedua merupakan ordinal yang merupakan penerus (*successor*) dari ordinal yang lebih kecil, seperti 1, 2, 3, 4, dan seterusnya. Ordinal ini disebut sebagai ordinal penerus (*successor ordinals*). Yang terakhir, adalah semua ordinal yang bukan kedua tipe sebelumnya, disebut dengan ordinal batas (*limit ordinals*). Jika aa ordinal batas, maka setiap penerusnya merupakan ordinal batas. Contoh paling kecil dari ordinal batas adalah ω (konsep "tak terhingga" pertama kita!). ω bisa dipandang sebagai bilangan yang natural paling besar (pertama). Mengapa saya tambahkan kata pertama? Karena enumerasi bilangan ordinal masih bisa dilanjutkan dengan $\omega + 1, \omega + 2$, dan seterusnya, hingga mencapai ordinal batas kedua, yakni $2 \cdot \omega$. Tapi tunggu dulu, jika ωω merupakan representasi ordinal dari konsep "tak terhingga", apa artinya $\omega + 1$. Menjawab ini butuh penjelasan detail tentang teori himpunan, jadi saya tahan saja dulu dan pembaca anggap saja itu urutan selanjutnya setelah "tak terhingga". Enumerasi ini bisa berlanjut terus hingga seperti berikut.

$$\omega, 2\omega, 3\omega, \dots, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^\omega, \dots, \omega^{\omega^\omega}, \dots, \omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}} (\epsilon_0), \epsilon_1, \dots, \epsilon_\omega, \dots$$

Jadi apa itu tak terhingga? Dalam sudut pandang bilangan ordinal, anggap saja "tak terhingga" merupakan semua ordinal batas.

Bilangan Kardinal

Sebagai kardinal, bilangan dipandang sebagai "ukuran" dari besarnya suatu himpunan. Bilangan kardinal merupakan 'representasi' dari semua himpunan yang memiliki ukuran (jumlah anggota) sama. Misalkan, himpunan $\{a, b\}$ dengan himpunan $\{2,3\}$ memiliki kardinalitas yang sama, yakni 2. Dua himpunan dikatakan memiliki kardinalitas sama apabila kita bisa pasangkan setiap (tepat masing-masing satu) anggota dari kedua himpunan itu tanpa ada sisa (pemasangan ini disebut sebagai *bijeksi*). Bila bijeksi ini gagal dilakukan, maka himpunan yang "memiliki sisa" dikatakan lebih besar dibandingkan yang satunya. Dalam kehidupan sehari-hari, himpunan objek mungkin hanya memiliki anggota jumlah terhingga, namun bagaimana dengan himpunan seluruh bilangan asli? atau himpunan seluruh bilangan rasional? atau himpunan seluruh kurva mulus yang menghubungkan dua titik di ruang dimensi 2? Kita bisa lihat bahwa semua contoh itu memiliki tak hingga banyaknya anggota, tapi seberapa "tak terhingga"? Kita juga mungkin akan mengira bahwa akan tercipta banyak tingkat ke-takterhingga-an, karena bila kita bayangkan secara sederhana, seharusnya bilangan bulat lebih besar dari bilangan asli dan bilangan rasional lebih besar dari bilangan bulat.

Berhubung kardinalitas diukur dari bijeksi antar himpunan, maka kita cukup coba petakan saja antar himpunan untuk melihat mana yang "lebih besar". Menariknya, ternyata, himpunan bilangan asli, himpunan bilangan rasional, maupun himpunan bilangan bulat, memiliki kardinalitas yang sama! Kita sebut ketakterhinggaan kardinalitas keluarga himpunan bilangan asli ini sebagai $\aleph_0$ (berbeda dengan ω karena konsep bilangannya berbeda). Apakah ada "tak terhingga" yang lebih besar dari ini? Ada, yakni bilangan irasional, bilangan riil, dan keluarganya. Mengapa? Karena George Cantor telah membuktikan bahwa mustahil membangun bijeksi antara bilangan riil dan bilangan asli. Ketakterhingga-an bilangan riil ini disebut sebagai *continuum*, dinotasikan dengan c. Apakah ada yang lebih besar lagi? Ada dan bisa dikonstruksikan, namun karena tidak ada objek pragmatis yang direpresentasikan dengannya, maka banyak matematikawan cukup meneliti $\aleph_0$ dan c.

Catatan:

Jika kita tuliskan tak terhingga dalam simbol ∞, maka ia sebenarnya merepresentasikan tak terhingga yang mana? Khusus untuk ∞, ia merupakan konsep tak terhingga yang objeknya tidak ada. Ia digunakan dalam kalkulus untuk merepresentasikan suatu titik pada bilangan riil yang dijauh sana yang didekati dengan limit. Meskipun dalam kalkulus, kita bermain dengan bilangan riil, namun tidak berarti bahwa $c = \infty$, karena c merupakan bilangan kardinal, yang terdefinisi dengan baik, sedangkan ∞ hanyalah konsep yang "didekati" melalui limit. Oleh karena itu, sebenarnya adalah suatu tindakan yang salah bila kita menuliskan simbol ∞ tanpa ada konsep limit yang menyertai. Misalkan, salah bila kita menulis $\frac{1}{0} = \infty$, karena yang benar adalah $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$.

Bagaimana langkah yang benar dalam mempelajari struktur aljabar?

13 Des 2018

Sukar mendeskripsikan apa yang dimaksud "langkah yang benar", karena sebenarnya proses belajar adalah proses yang punya banyak jalan. Namun, dari saya pribadi, struktur aljabar, ataupun semua cabang matematika lainnya, merupakan abstraksi dari topik yang lebih konkrit dan sederhana, sebagaimana sebenarnya matematika sendiri merupakan hasil abstraksi dari hukum-hukum alam.

Untuk mencapai inti bumi, kita harus pelan-pelan menggali dari permukaan melalui 1 lubang galian secara konsisten. Maka dari itu, untuk belajar sesuatu yang abstrak, mulailah membiasakan diri dari level yang kurang abstrak. Pada konteks struktur aljabar, mulailah dari konsep yang lebih konkrit seperti ruang vektor, untuk kemudian mengenal konsep Lapangan secara sederhana, sebelum kemudian lebih dalam lagi masuk ke dalam konsep Grup. Setelah berada di inti bumi, maka bergerak kemana-mana akan lebih mudah, itu juga mengapa ketika sudah paham paling tidak ke konsep Grup (sebenarnya ada yang lebih mendasar lagi seperti teori Kategori), maka langkah berikutnya cenderung fleksibel, bergantung kemana kita mau arahkan abstraksi itu. Dari Grup, kita bisa melangkah ke Gelanggang (Ring) sampai ke Teori Modul, atau bisa melangkah ke konsep Lapangan Hingga yang bisa merembet ke teori bilangan, atau bisa melangkah lebih dalam ke Teori Kategori, atau justru mendalami lebih detail konsep Grup itu sendiri.

Ini hanyalah satu cara untuk belajar. Setiap orang bisa punya langkah yang berbeda untuk mempelajari sesuatu. Yang terpenting hanyalah konsistensi dan militansi dari belajar itu sendiri, dimana kita tidak boleh sedikitpun merasa puas dan cukup.

Selamat belajar!

Bagaimana matematikawan belajar matematika?

14 Des 2018

Seperti halnya penulis belajar menulis atau pelukis belajar melukis, mereka belajar dengan melakukan dan mereka senang melakukannya!

Apa masalah dalam ilmu matematika yang hingga saat ini masih menjadi perbedaan pendapat di kalangan ilmuwan?

19 Des 2018

Ilmu matematika merupakan ilmu yang rigid dan terstruktur, sehingga sukar menemukan perbedaan pendapat. Ketika suatu teorema telah dibuktikan dengan alur logika yang jelas, maka semua matematikawan bisa dipastikan akan setuju dengannya. Perbedaan pendapat hanya terjadi dalam ranah konjektur atau hipotesa, karena memang pembuktiannya belum ada.

Akan tetapi, sejak akhir abad ke-19, beberapa matematikawan seperti Hilbert, Peano, Frege, dan Russell, mulai mengarahkan perhatiannya ke arah dalam, atau ke fondasi matematika itu sendiri. Mereka semua mulai mempertanyakan landasan ilmu matematika itu ada dimana. Sejak saat itu, cabang matematika secara informal terbentuk, yakni *foundation of mathematics* atau *metamathematics.* Di cabang inilah perbedaan pendapat mulai dengan jelas terjadi antar matematikawan. Hal ini diperparah dengan teorema ketidakpastian Godel yang meruntuhkan harapan semua metamatematikawan untuk menemukan satu sistem fondasi dasar tunggal yang universal bisa membangun seluruh teori matematika. Hingga saat ini, ilmu matematika yang sudah kokoh seperti aljabar, analisis, graf, fungsional, dan lainnya tetap berdiri apa adanya. Beberapa konjektur masih ada dan diusahakan untuk dibuktikan, namun karena sifatnya konjektur, maka perbedaan pendapat antar matematikawan tidak mempengaruhi ilmu matematika itu sendiri. Hanya di ranah fondasi perbedaan pendapat itu masih terus terjadi.

Berapa hasil dari 6÷2(1+2)? Jika menggunakan kalkulator CASIO jawabannya adalah 1 sedangkan kalkulator smartphone 9. Manakah yang benar 1 atau 9?

13 Des 2018

Ini hanya masalah bagaimana mesin komputasi (dalam hal ini kedua kalkulator tersebut) menginterpretasi sintaks 6:2(2+1). Apabila (2+1) dianggap linier dengan 6, atau dengan kata lain (6/2)*(2+1), maka hasilnya adalah 1, namun apabila (2+1) dianggap resiprokal dengan 6, atau dengan kata lain 6/(2*(2+1)), maka hasilnya adalah 9

That’s it. That’s all of it. Meski aku belum benar-benar menghapus akun Quora, aku sudah benar-benar tidak pernah menjawab apapun lagi. Tanggal 29 Mei 2019 adalah terakhir kalinya aku menjawab di Quora, yang hanya terhitung tidak sampai 6 bulan dari jawaban pertama yang kuberi. Ya, 6 bulan cukup untuk membuatku menyadari dengan semua aspek positif yang ada pada Quora, aku tidak bisa berlama-lama aktif di sana, karena pada akhirnya mekanisme di Quora mengubah cara berpikirku dan caraku menulis, yang meski sebenarnya itu tidak lah buruk, tidak ingin ku pertahankan juga. Tentu itu ditambah alasan-alasan lainnya seperti kesibukan dan kejenuhan.

Meskipun tidak bisa disebut media sosial, Quora punya efek serupa dengan sistem yang ada di dalamnya. Upvote sama saja seperti “like” di media sosial yang membuat substansi tidak terlalu menjadi aspek krusial. Aku bisa saja tidak perlu mengejar upvote dan hanya fokus pada menuangkan pikiran, tapi itu bertentangan dengan esensi dari Quora itu sendiri. Aku menulis di Quora karena aku menjawab seseorang, yang mau tak mau aku harus memikirkan bahwa bagaimana caranya yang bertanya itu paham, sehingga aku tidak bisa sekadar fokus hanya menuangkan pikiran. Sehingga, daripada pikiran habis untuk memikirkan bagaimana jawabanku dibaca, yang akhirnya membuatku secara tak sadar mengusahakan upvote, lebih baik kembali ke cara menulis biasa saja. Pertanyaan-pertanyaan di Quora cukup jadi inspirasi saja, yang memang kemudian aku catat untuk ku jadikan artikel terpisah. Apakah aku akan kembali menjawab di Quora suatu saat, entah.

(PHX)