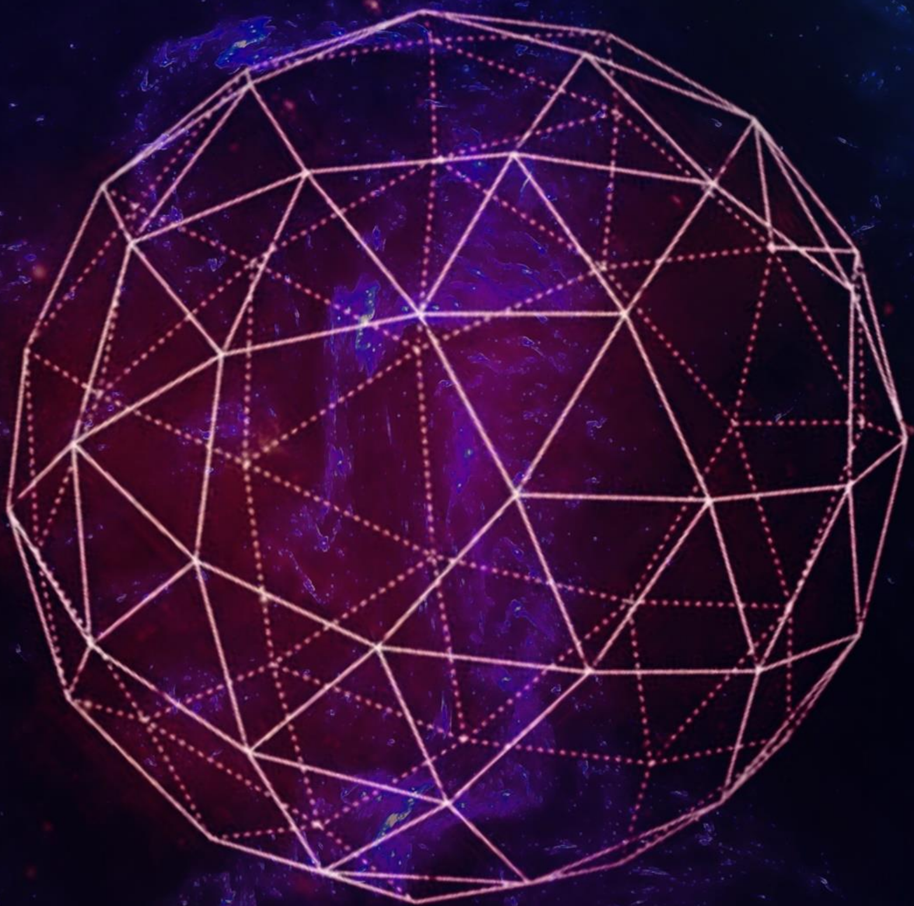


booklet phx #45

Meta-matika

part IV

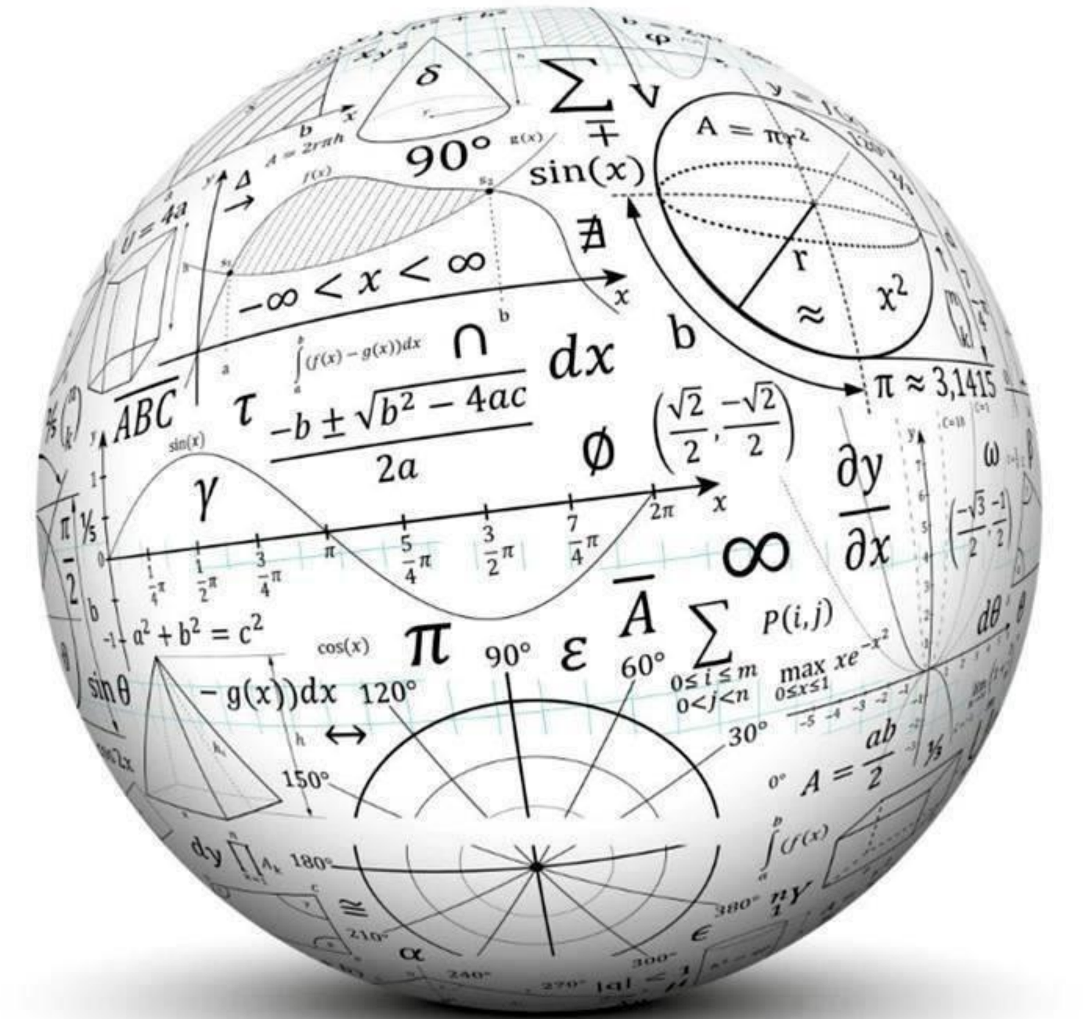
Booklet Seri 45

Metamatika IV

Oleh: Phoenix

Kali ini matematika akan coba ditelusuri jauh lebih dalam lagi, jauh lebih dalam dibanding ketika Neo menerima pil merah dari Morpheus untuk mengetahui the Matrix. Mungkin hasilnya tidak akan setragis itu, namun jauh di dalam penelusuran ini, satu per satu renungan lahir yang justru menghasilkan terus pertanyaan baru. Tapi yang namanya pencarian, mungkin yang penting bukanlah hasilnya, namun proses itu sendiri, yang membawa penjelajahan panjang ke dalam alam pikiran yang entah bagaimana caranya bisa menghasilkan aturan eksak atas semesta.

(PHX)

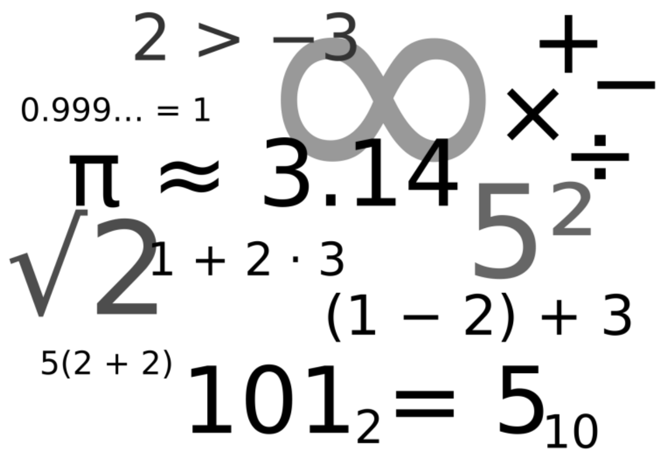


Teruntuk

Semua mahasiswa matematika di seluruh Indonesia,

Dan siapapun yang mengagumi keindahan angka

Daftar Konten



Apakah Bilangan Riil itu "Riil"?

Bilangan adalah bilangan. Kita semua menggunakan bilangan dalam kehidupan sehari-hari tanpa perlu mengetahui secara rinci sifat-sifatnya selain bahwa ia bisa diterapkan operasi-operasi aritmatika. Kita menghitung banyaknya buah yang kita beli di pasar dengan sebuah bilangan, kita mengukur tinggi badan kita juga dengan sebuah bilangan, kita memeriksa suhu tubuh kita melalui thermometer pun dalam bentuk sebuah bilangan, kita menyatakan waktu juga dengan sebuah bilangan, kita menandai hari dalam kalender juga dengan sebuah bilangan, kita menghitung luas kain yang kita beli untuk dijahit juga dengan sebuah bilangan. Begitu banyak penggunaan bilangan sehari-hari dengan keperluan, kasus, dan penggunaan yang berbeda, namun kita tetap menyebut itu semua dengan sebuah istilah sederhana: bilangan. Apakah memang semua bilangan tersebut secara esensi sama?

Untungnya, apa yang kita gunakan dalam kehidupan sehari-hari memang masih merupakan bilangan yang bersifat sama, yakni bilangan rasional. Lebih umum lagi, sebenarnya semua bilangan itu bisa disebut sebagai bilangan riil, namun sebagaimana akan dipaparkan setelah ini, bilangan riil merupakan konsep yang terlalu general, bahkan mungkin melampaui realitas itu sendiri, sehingga sebenarnya lebih aman menyebut bilangan-bilangan itu sebagai bilangan rasional. Tentu meskipun manusia dalam keseharian tidak mempersoalkan itu dan menganggap bilangan adalah entitas yang bersifat tunggal, dalam level yang lebih abstrak, bilangan memiliki sifat-sifat yang membuatnya memiliki hirarki khusus dalam ilmu matematika. Bahkan ketika matematikawan menggunakan istilah bilangan riil itu sendiri, ia belum tentu memang punya hubungan langsung dengan realita. Ada apa dengan bilangan riil?

Hirarki Bilangan

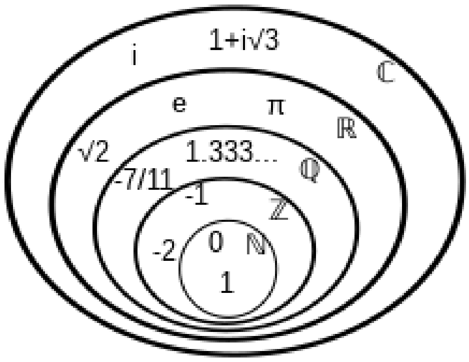
Bilangan memang entitas yang unik, karena bahkan sampai saat ini bilangan masih dipersoalkan hakikat eksistensinya. Cara mudah untuk memahami bilangan adalah dengan memosisikannya dalam bahasa, sehingga bilangan pada dasarnya hanya nama yang disematkan pada suatu sifat kuantitas. Seperti halnya kata sifat "banyak" atau "besar", bilangan memberi atribut sifat berupa besaran atau jumlah dari suatu hal, namun lebih spesifik dan eksak. Ketika sifat "besar" atau "banyak" itu cenderung relatif, maka bilangan memberi kepastian perbandingan, bahwa benda berjumlah 3 lebih banyak daripada benda berjumlah 2. Di awal kelahirannya, bilangan pun menjadi label untuk membilang atau *counting*. Jika dilihat dari akar kata bahasa Indonesianya, jelas bahwa bilangan adalah entitas dari pembilangan atau hasil dari membilang. Konsep membilang sendiri pun sebenarnya hanya merupakan proses memberi label berbeda pada setiap objek yang tengah diamati. Ketika terdapat sejumlah sapi di padang rumput, maka bilangan akan memberi label berbeda pada setiap sapi tersebut. Perbedaannya dari label dengan nama biasa (misal setiap sapi kita beri nama), label dalam proses membilang menjadi sifat yang bisa disetarakan dengan objek lain. Sebagaimana misalnya kata sifat "indah", kata sifat itu bisa disematkan pada objek yang berbeda seperti pemandangan atau lukisan namun dengan inti gagasan yang serupa. Ketika sekelompok sapi diberi sifat numerik 2, maka ia jumlahnya setara dengan objek lain yang punya sifat sama, seperti 2 apel, 2 domba, atau 2 gunung.

Penyifatan numerik ini memang unik, berbeda dengan sifat-sifat lainnya yang cenderung kabur dan elastis sehingga ukurannya bisa sangat subjektif. Label numerik ini kemudian perlahan diperumum menjadi sebuah sistem numeral, yang berupa simbol-simbol berurut. Simbol ini yang kemudian dikenal sebagai angka. Dalam bahasa Indonesia, angka dan bilangan meskipun digunakan tanpa perbedaan, sebenarnya mewakili konsep yang berbeda. Dengan berkembangnya keperluan manusia, konsep membilang ini berkembang dengan beragam ekstensi, seperti pembilangan berlanjut yang menghasilkan konsep penjumlahan dan pembilangan berulang yang menghasilkan konsep perkalian. Sampai titik ini, bilangan yang digunakan masih sebatas 1, 2, 3 dan seterusnya, yang kemudian disebut oleh matematikawan sebagai bilangan asli (natural), karena ini bilangan paling dasar yang secara natural muncul dan dikembangkan oleh manusia. Bilangan asli selanjutnya terekstensi dengan tambahan angka 0, meskipun sebenarnya angka 0 sendiri tidak dianggap sebagai label pembilang (karena ia justru menunjukkan ketiadaan). Dalam sistem bilangan, bilangan asli bisa mulai dari 0 ataupun 1 tanpa menimbulkan masalah karena itu hanya terkait dengan awal pembilang.

Dalam aplikasi pembilangan, ada banyak kasus dimana muncul konsep sisa dan hutang, yang sebenarnya bisa dianggap sebagai membilang secara mundur. Sebagai contoh, kalau seseorang punya 10 sapi, kemudian diambil 4 sapi, maka secara mundur 10 sapi dapat dihitung menjadi sisa 6 sapi. Dari sini, berkembang bilangan negative. Tentu konsep membilang secara mundur ini hanya satu perspektif dari sekian banyak kasus lainnya yang bisa memberi petunjuk atas awal mula adanya bilangan negatif. Bilangan asli bersama negatifnya membentuk konsep baru bernama bilangan bulat. Adanya bilangan negatif juga memberi konsep pengurangan di aritmatika. Tentu ini tidak berarti komplementer namun lebih ke inklusi, karena bilangan asli pun sebenarnya juga adalah bilangan bulat. Penamaan bilangan bulat diawali untuk membedakan dengan yang tidak bulat dalam sistem bilangan yang lebih besar. Hal ini dipicu dengan berkembangnya konsep pembagian yang sebenarnya merupakan invers atau balikan dari perkalian. Ketika seseorang punya 10 petak tanah dan mau diwariskan ke 4 anaknya secara merata, maka harus dicari bilangan yang kalau dikali 4 sama dengan 11. Bilangan ini tidak selalu ada dalam sistem yang sudah diketahui (bilangan bulat). Kita tahu bahwa 2 dikali 4 sama dengan 8 dan 3 dikali 4 sama dengan 12, maka haruslah bilangan tersebut berada di antara 2 dan 3. Untuk menemukan bilangan ini, kita harus membuat pembilangan atau enumerasi di antara bilangan, sehingga dibuatlah pembilang baru yang berdasar suatu patokan tertentu. Dalam hal ini, patokannya adalah 4, sehingga tercipta enumerasi 1 per 4, 2 per 4, 3 per 4, dan 4 per 4. Dari sini, muncul konsep rasio (perbandingan), dimana 1 per 4 merupakan sebuah enumerasi baru berbanding dengan 4. Kita mengenal konsep ini dalam keseharian sebagai pecahan. Adanya pecahan memberi sistem baru karena ditemukannya bilangan yang tidak bulat. Sistem baru ini dinamakan bilangan rasional (karena berkembang dari konsep rasio).

Bilangan rasional mewakili semua bilangan yang kita gunakan sehari-hari. Ya, semua. Selama bilangan itu bisa ditulis atau diucapkan, bisa dipastikan itu bilangan rasional. Lantas kenapa sekarang dikenal bilangan riil? Memang kemudian ditemukan beberapa bilangan yang disebut irasional, artinya bukan merupakan rasio dari dua bilangan bulat. Munculnya bilangan ini sebenarnya juga datang dari operasi atau konsep yang tidak natural. Salah satu bilangan irasional yang bisa dikatakan sederhana adalah hasil dari fungsi akar. Ketika kita mengalikan beberapa bilangan yang sama, maka lahir operasi pangkat. Perhatikan bahwa pada perkembangan bilangan, yang selalu menjadi masalah adalah ketika muncul kebutuhan untuk menentukan balikan dari operasi yang ada. Bilangan negatif lahir dari balikan penjumlahan dan bilangan pecahan lahir dari balikan perkalian. Dalam kasus ini, kebutuhan untuk mencari balikan dari operasi pangkat memicu ekstensi bilangan baru, dan kebutuhan ini muncul dari salah satu teorema paling tua di matematika, yakni Pythagoras. Teorema Pythagoras, sebagaimana kita ketahui melibatkan suku-suku kuadratik. Ketika kita mencari panjang salah satu sisi segitiga dengan Pythagoras, mau tidak mau kita harus mencari bilangan yang kuadratnya jumlah atau selisih dari kuadrat sisi yang lain. Sayangnya, tidak semua bilangan merupakan hasil dari kuadrat, seperti bilangan 2 atau 3, sehingga “akar dua” menjadi sebuah bilangan yang nilainya tidak jelas. Memang kemudian nilainya bisa diaproksimasi atau didekati, namun untuk mendapatkan secara eksak dan tepat suatu bilangan yang bila dikuadratkan menjadi 2 bukan hal yang mudah, hingga akhirnya dibuktikan bahwa “akar dua” justru merupakan bilangan yang bahkan tidak bisa dituliskan dalam rasio dua bilangan bulat. Berkembanglah dari sini konsep bilangan irasional.

Bilangan rasional dan bilangan irasional membentuk keseluruhan bilangan yang awalnya dianggap lengkap. Tidak ada nama khusus diberikan, karena dianggap tidak ada lagi bilangan di luar itu. Jadi ketika menyebut “bilangan” saja, maka sudah pasti merujuk pada bilangan rasional atau irasional. Baru kemudian ketika secara perlahan muncul masalah di aljabar dimana beberapa persamaan tidak punya solusi, seperti $x^2 = -1$. Tidak ada bilangan rasional ataupun irasional yang bila dikuadratkan menghasilkan -1. Masalah seperti ini awalnya tidak bersumber dari aplikasi riil, namun murni masalah abstrak matematis. Bahkan, kalaupun akhirnya sistem bilangan diekstensi untuk mengakomodasi bilangan yang memenuhi $x^2 = -1$, bilangan ini tidak memiliki representasi nyata. Ia bahkan tidak jelas menunjukkan atau mewakili konsep apa. Yang jelas, ia dapat ada secara abstrak, paling tidak melalui definisi matematis. Oleh karena sifatnya yang demikian, Rene Descartes menyebut bilangan ini imajiner, dan menyebut semua bilangan yang lain sebagai "riil".



Gambar 1. Gambaran hirarki bilangan, dengan ℕ adalah himp. bilangan asli, ℤ adalah himp. bilangan bulat, ℚ adalah himp. bilangan rasional, ℝ adalah himp. bilangan riil, dan ℂ adalah himp. bilangan kompleks.

Problematika Konstruksi Riil

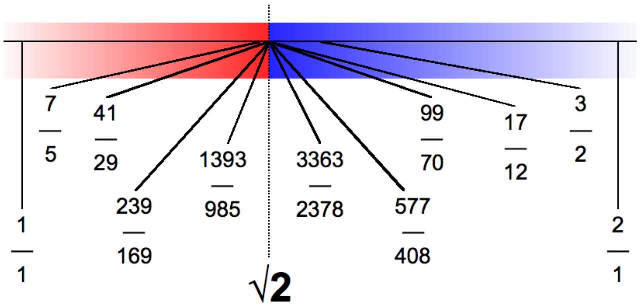
Perhatikan bahwa dalam perkembangan hirarki bilangan di atas, pada awalnya bilangan-bilangan dibangun secara konstruktif kecuali ketika menghasilkan bilangan riil itu sendiri. Yang dimaksud konstruktif di sini adalah sistem bilangan tersebut bisa didefinisikan dari sistem yang lebih sederhana, karena paling tidak cara seperti ini bisa menjamin jejak konsep dari yang natural. Definisi suatu hal memang bisa saja bersifat murni aksiomatik tanpa perlu ada proses konstruksi di dalamnya. Sebagai contoh, kita bisa saja langsung mendefinisikan yang dimaksud "hal gaib" adalah semua hal yang tidak dapat dicerap dengan indra fisik manusia, namun definisi seperti ini tidak memberi kejelasan akan esensi dari hal gaib itu sendiri, seperti apa sebenarnya komposisinya, bentuknya bagaimana, apa saja yang termasuk di dalamnya, dan semacamnya. Konsep "gaib" dibangun tidak secara konstruktif, tapi melalui definisi aksiomatik, yang notabene langsung mengasumsikan bahwa bendanya itu ada. Definisi non-konstrukstif tidak menjamin eksistensi secara lengkap.

Ini yang terjadi pada awal pembangunan konsep bilangan riil. Matematikawan hanya melihat bahwa ada bilangan selain bilangan rasional yang memang bisa dilacak representasinya pada kasus riil. Setiap segitiga siku-siku sama kaki pasti panjang sisi miringnya berupa bilangan irasional. Kita bisa memperumum sedikit bahwa akar semua bilangan prima pasti adalah bilangan irasional. Akan tetapi, tidak ada yang menjamin apakah cuma itu saja. Tidak ada yang bisa mendefinisikan secara jelas sebenanrya bilangan irasional itu apa selain bahwa itu bilangan yang tidak rasional. Bilangan riil cukup lama dipegang secara aksiomatik, yang berarti dianggap ada dengan sifat-sifat yang didefinisikan.

Adanya bilangan irasional menunjukkan bahwa sistem bilangan rasional, sebagai sistem bilangan yang pada awalnya umum dipegang, itu tidak lengkap. Padahal, jika dipikirkan, apapun bilangan yang dapat kita sebut, pasti adalah bilangan rasional. Bayangkan, suatu bilangan apapun, jika ditambah bilangan sekecil apapun, pasti masih merupakan bilangan rasional. Misalkan saja 3.1, 3.11, 3.111, 3.1111, 3.11111, dan seterusnya. Sebanyak apapun angka ditambahkan dibelakang koma, ia akan tetaplah bilangan rasional. Jadi, kalau dibayangkan bilangan rasional itu dalam suatu garis, maka pastilah garis itu penuh oleh bilangan rasional, atau setiap titik di garis itu haruslah bilangan rasional. Akan tetapi, keberadaan bilangan irasional justru menunjukkan garis itu punya bolong, bahwa garis bilangan belum lengkap hanya dengan rasional. Maka dari itu, salah satu cara untuk mendefinisikan bilangan riil adalah dengan mendefinisikan proses yang bisa melengkapi bilangan rasional.

Perhatikan bahwa karena setiap bilangan yang punya digit desimal berhingga, maka pasti ia adalah bilangan rasional, karena sebanyak apapun angka di belakang koma, selalu bisa direpresentasikan sebagai pecahan dengan penyebut berupa pangkat dari 10. Sebagai contoh, 2.343112 bisa dituliskan sebagai pecahan 2343112/1000000. Dengan demikian, bilangan irasional pastilah berupa bilangan yang tidak bisa dituliskan dalam angka desimal yang berhingga. Terlebih lagi, angka yang berada di belakang koma dari suatu bilangan irasional, tidak mungkin membentuk pola berulang, karena pola berulang hanya dimiliki oleh bilangan rasional (seperti 2/9=0.2222…). Dari sini, dibangunlah prosedur bahwa untuk bisa membangun sebuah bilangan irasional, diperlukan sebuah proses tak berhingga, paling tidak proses untuk menambahkan desimal itu sendiri. Tentu ini terasa absurd, namun tidak ada masalah bagi matematikawan karena adanya konsep barisan bilangan. Dikembangkanlah definisi yang secara intuitif bisa dipahami bahwa bilangan riil adalah bilangan yang merupakan titik limit (ujung) dari suatu barisan bilangan yang Cauchy, yakni barisan yang bilangannya terus semakin dekat satu sama lain. Misalkan, bilangan natural e adalah bilangan irasional dengan nilai eksak 2.718281828459045… (dengan desimal yang terus berlanjut tanpa berulang tak berhingga), suatu barisan bilangan bisa dikonstruksi sebagai berikut: 2, 2.7, 2.71, 2.718, 2.7182, … Barisan ini akan konvergen (berujung) pada bilangan e. Tentu penjelasan seperti ini hanya untuk memudahkan pemahaman, karena secara abstrak, matematikawan mendefinisikan proses ini dengan sangat ketat. Jadi, bilangan riil bisa didpahami sebagai ujung dari sebuah barisan bilangan rasional Cauchy.

Jika merasa aneh dengan definisi ini, maka wajar. Intuisi sudah sukar bekerja dalam level abstraksi ini. Bahkan, definisi alternatif dari bilangan riil menggunakan apa yang disebut sebagai potongan Dedekind. Dalam definisi ini, garis bilangan rasional dibagi menjadi 2 potongan dengan sifat-sifat tertentu, dimana salah satu sifat pentingnya adalah potongan yang "kiri" tidak memiliki batas atas. Setiap potongan ini akan secara unik merepresentasikan sebuah bilangan riil. Sebagai contoh, bilangan "akar 2" direpresentasikan dengan sebuah himpunan yang berisi bilangan seluruh bilangan rasional yang lebih kecil dari akar 2. Potongan ini tidak punya batas atas karena untuk setiap bilangan rasional yang kurang dari akar 2, selalu ada bilangan rasional lain yang lebih besar namun tetap kurang dari akar 2. Potongan Dedekind dianggap cukup konstruktif karena mendefinisikan bilangan riil hanya dengan himpunan bilangan rasional. Definisi rincinya tentu tidak akan saya paparkan di sini karena bukan hal yang mudah untuk memahaminya secara lengkap. Jika melihat pendekatan-pendekatan ini, justru makin terasa bahwa bilangan riil jadi tidak terasa riil, karena bahkan konstruksinya sangat abstrak dan sama sekali di luar intuisi dasar.



Gambar 2. Ilustrasi potongan Dedekind untuk bilangan akar 2, yang direpresentasikan oleh himpunan bilangan rasional yang lebih kecil dari $\sqrt{2}$

Dengan definisi baik melalui barisan Cauchy ataupun potongan Dedekind, maka semakin sukar membayangkan bilangan riil dalam bentuk representasi nyata. Kalaupun memang misal suatu segitiga siku-siku sama kaki secara matematis pasti memiliki sisi miring yang irasional berdasarkan Pythagoras, maka dalam kenyataannya, kita tidak pernah bisa mengukur secara akurat bilangan irasional. Apa yang dapat kita ukur, sebut, dan gunakan dalam kehidupan nyata selalu merupakan bilangan rasional karena minimal pasti ada batasan representasi desimal. Kita tidak pernah menyebutkan, menuliskan, atau menggunakan akar 2 secara lengkap dalam media apapun, namun hanya dalam pembulatan sekian digit. Bahkan, bilangan Pi sendiri, yang jelas irasional dan dapat dikalkulasi dengan banyak cara, sejauh ini hanya bisa dihitung hingga 62,831,853,071,796 (62.8 triliun) digit di belakang koma berdasarkan rekor terakhir pada hari Pi sedunia (14 Maret) 2022. Penulisan 62.8 triliun digit Pi, meskipun sangat panjang, tetaplah membuatnya jadi bilangan rasional. Kita mustahil secara nyata menggunakan bilangan irasional. Hal ini menjadikan hakikat eksistensi bilangan riil sendiri patut menjadi bahan renungan, apakah ia memang hanya sebuah entitas matematis yang berada di dunia ide abstrak ala Platonik, atau memang dunia nyata ini direpresentasikan oleh bilangan riil?

Masalah Ketakterhinggaan

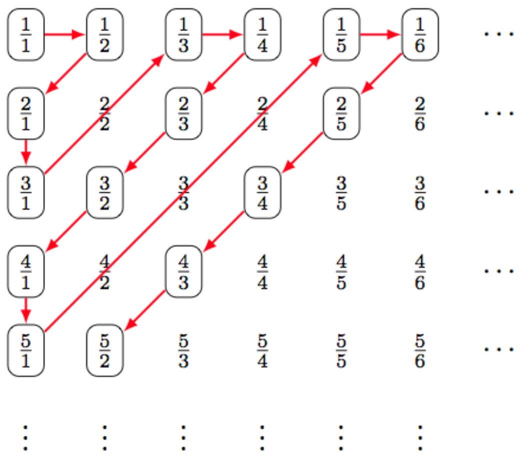
Isu dasar dari kerumitan penggunaan bilangan irasional ada pada bahwa ia melibatkan aspek takterhingga. Perhatikan bahwa keterbatasan manusia terletak pada kemampuan manusia yang hanya bisa berurusan dengan proses yang berhingga. Bahkan, sebenarnya patut diragukan bahwa proses berhingga bukan hanya keterbatasan manusia, tapi bisa juga keterbatasan semesta. Ketakterhinggaan sampai sekarang masih merupakan objek matematis yang memang punya implikasi pada konsep-konsep riil. Salah satu implikasi yang dekat dengan keseharian adalah kalkulus, yang dengannya dimungkinkan perhitungan laju perubahan. Laju perubahan hanya dapat dihitung melalui konsep infinitesimal, yakni sesuatu yang sangat kecil namun tidak sama dengan 0, atau secara esensial dapat dipahami sebagai kebalikan dari tak terhingga. Meskipun melibatkan infitesimal, kalkulus mendefinisikan konsep-konsep di dalamnya secara rapih sehingga tak memerlukan induksi tak hingga. Yang dimaksud induksi di sini adalah proses yang dilakukan tanpa henti. Ketakterhinggaan memang merupakan konsep yang tidak bisa didefinisikan secara langsung, namun harus melalui proses induksi, membuatnya mustahil untuk punya representasi riil. Memang ketakterhinggaan seperti ini oleh beberapa orang disebut sebagai ketakterhinggaan potensial, sebagai lawan dari ketaktehringgaan aktual dimana ketakterhinggaan itu berhasil diraih, akan tetapi konsep ketaktehringgaan aktual itu sendiri hanyalah jalan pintas konseptual yang sebenarnya tidak menyelesaikan masalah.

Dalam konteks pendefinisian bilangan riil, perhatikan bahwa permasalahan yang membuat bilangan irasional cukup “licin” untuk dikonstruksi adalah karakternya yang berupa bilangan dengan tak terhingga banyaknya digit belakang koma. Ia pun tidak punya basis eksistensi selain sebagai komplemen dari bilangan rasional. Maka dari itu, baik konstruksi barisan Cauchy maupun potongan Dedekind harus baik secara langsung atau tidak langsung melibatkan ketakterhinggaan. Barisan Cauchy jelas menunjukkan sebuah induksi ketakterhinggaan melalui barisan bilangan, dimana bilangan riil yang direpresentasikan adalah ujung tak terhingga dari barisan tersebut. Adapun potongan Dedekind sedikit meloncat dengan secara langsung membungkus seluruh bilangan yang menjadi representasi bilangan riil sebagai sebuah himpunan/potongan.

Secara matematis, kedua proses konstruksi itu memungkinkan karena memang induksi ketakterhinggaan sangat dimungkinkan dalam dunia matematika, selama proses induksinya jelas terdefinisi dan tidak menghasilkan kontradiksi. Bahkan, sebenarnya banyak konsep modern matematis yang lahir melalui induksi ketakterhinggaan seperti ini. Lebih spesifik lagi, konsep matematis yang melibatkan bilangan riil harus selalu melibatkan ketakterhinggaan, baik langsung ataupun tidak. Hal ini bilangan riil memiliki sifat lengkap yang membuatnya memenuhi prinsip kontinuitas. Kelengkapan ini memastikan keseluruhan garis bilangan riil tidak memiliki lubang atau celah sedikitpun. Antara dua bilangan riil berbeda, selalu ada bilangan riil lain, sedekat apapun kedua bilangan itu. Akan tetapi, perlu dicatat bahwa sebenarnya sifat ini juga dimiliki bilangan rasional. Bahkan, awalnya bilangan rasional dianggap lengkap sampai kemudian muncul bukti-bukti logis atas keberadaan "lubang" yang tak terlihat di garis bilangan rasional. Yang membuat bilangan riil berbeda adalah karena pengisian lubang ini menghasilkan ketakterhinggaan level baru.

Himpunan bilangan rasional pada dasarnya memang sangat rapat. Ia bahkan disematkan sifat matematis yang disebut sebagai *dense* dalam himpunan bilangan riil. Jadi, meskipun bilangan rasional itu bercelah, tapi kerapatannya membuat setiap bilangan riil yang kita ambil, dalam jarak sedekat apapun dari bilangan tersebut selalu ada bilangan rasional lain. Secara intuisi kita bisa pahami ini bahwa kita tidak bisa menemukan area atau interval sekecil apapun dimana di situ tidak ada bilangan rasional. Ambil sembarang tempat di suatu garis, buat interval sekecil apapun di sekitar tempat itu, maka dipastikan ada bilangan rasional yang kena. Ya, sekecil apapun intervalnya. Untuk gambaran yang lebih konkrit, misal ambil bilangan 3, maka interval sesempit apapun di sekitar 3, selalu ada bilangan rasional yang ditemukan. Anggaplah kita mau intervalnya cuma selebar 10^{-30} di sekitar 3, maka tetap ada bilangan rasional 3.00…001 (0-nya ada 30) atau 2.99…999 (9-nya ada 31) yang masuk ke dalam interval itu. Bisa dibayangkan kemudian bahwa seharusnya bilangan rasional ini begitu memenuhi garis bilangan riil dan bilangan irasional hanya sejumlah kecil titik-titik yang mengisi celah-celah yang masih bolong antara rasional tersebut. Sayangnya, matematikawan membuktikan hal lain, yang memang sangat sangat berlawanan dengan akal. Matematikawan menemukan bahwa bilangan irasional sebenarnya tetap (sangat jauh) lebih banyak dari bilangan rasional.

Hal ini karena kemudian diperlihatkan bahwa himpunan bilangan riil itu memiliki "ukuran" yang berbeda ketimbang himpunan bilangan lainnya. Himpunan bilangan, bahkan yang paling primitif skalipun seperti bilangan asli, pada dasarnya memang berjumlah tak hingga banyaknya. Enumerasi bilangan selalu bisa diteruskan tanpa henti. Selama suatu himpunan tak hingga bisa dibilang (*counted*), maka ketakterhinggaannya adalah sama, karena pembilangan itu memastikan adanya pemasangan setiap anggota himpunan tersebut dengan himpunan bilangan asli. Demikian halnya bilangan bulat dan bilangan rasional, kita selalu bisa membangun sebuah proses membilang pada dua himpunan tersebut. Untuk bilangan bulat, proses membilangnya bisa menjadi selang-seling antara positif dan negatif, seperti 0, 1, -1, 2, -2, dst. Pembilangan ini akan dipastikan dapat mencakup seluruh anggota himpunan secara lengkap tanpa ada yang tertinggal. Ibarat mau menghitung banyaknya sapi, selama entah menggunakan jari atau penanda lain, kita selalu bisa membilang sapi tersebut tanpa ada sapi yang terlewatkan. Bilangan asli menjadi label utama dalam pembilangan atau enumerasi. Khusus untuk bilangan rasional, proses pembilangannya butuh agak sedikit cerdik, yang akan lebih mudah dipahami langsung dengan ilustrasi.



Gambar 3. Ilustrasi pembilangan bilangan rasional

Dengan cara tersebut, dipastikan semua kemungkinan pasangan pembilang dan penyebut terakomodasi, sehingga semua bilangan rasional dapat dihitung tanpa ada yang terlewatkan. Karena bilangan rasional pun dapat dienumerasi, maka bisa dikatakan banyaknya bilangan rasional adalah sama dengan bilangan asli. Mungkin memang agak sedikit kontra-intuisi pada awalnya, namun perlu dipahami bahwa tak terhingga merupakan besaran yang agak "cair". Himpunan yang anggotanya tak hingga tetap bisa ditambahi 1 anggota dan besarnya tetap tak hingga. Meskipun nambah 1 anggota, tak terhingganya tetap sama karena konsep ketakterhinggaan dalam hal ini adalah tunggal. Ya, tunggal, sampai bilangan riil mengubah konsep ini.

Berbeda dengan bilangan rasional dan bulat, bilangan riil ternyata tidak dapat dienumerasi dengan cara apapun. Bagaimanapun kita bangun proses membilang sehingga diusahakan semua bilangan riil terlibat, dipastikan tetap ada suatu bilangan riil yang terlewatkan. Hal ini dibuktikan dengan jelas oleh Georg Cantor melalui proses yang dikenal sebagai argument diagonalisasi. Kita tidak akan membahas itu secara detail di sini. Namun yang jelas, dengan itu bilangan riil memiliki ketakterhinggaan yang berbeda, yakni ketakterhinggaan yang tak terbilang (*uncountably infinite*) untuk membedakannya dengan ketakterhinggaan yang terbilang (*countably infinite*) seperti bilangan asli, bulat, atau rasional. Yang tak terbilang jelas lebih banyak dari yang terbilang. Begitu banyaknya bilangan riil sampai ia tak bisa dibilang (dihitung). Karena jelas himpunan bilangan rasional itu terbilang, maka yang membuat bilangan riil jadi begitu banyak sampai tak terbilang tentu adalah bilangan irasional, sehingga dari sini bilangan irasional itu sebenanrya jauh lebih banyak dari bilangan rasional. Bahkan, kesimpulan yang lebih absurd lagi datang dari teori ukuran. Secara sederhana, "ukuran" di matematika adalah generalisasi dari konsep panjang, luas, atau volume. Ketika kita punya suatu segmen garis, kita dapat ukur panjangnya dari ujung ke ujung. Ketika ada suatu lubang titik di segmen garis itu, maka panjangnya tetap tidak berubah karena titik panjangnya 0. Ada 100 titik sekalipun, tidak akan mengubah total panjang garis, karena 100 titik itu pun tetap punya panjang 0. Lebih jauh lagi, ada tak hingga banyaknya titik pun, selama ia masih bisa dibilang, tetap panjangnya 0 dan tidak akan mengubah panjang segmen garis yang sebelumnya diukur. Segmen garis itu mengandung jauh lebih banyak titik sehingga bisa membentuk suatu panjang. Dalam konteks bilangan riil, dalam suatu interval antara 0 dan 1, "ukuran" dari seluruh bilangan rasional di dalamnya adalah 0 sedangkan "ukuran" dari seluruh bilangan irasional di dalamnya adalah 1, menunjukkan seberapa tidak signifikannya bilangan rasional ketimbang bilangan irasional. Perlu dibayangkan juga bahwa temuan seperti ini tetap tidak mengubah fakta bahwa bilangan rasional memang *dense* di dalam garis bilangan riil. Absurd? Ya! Pada dasarnya, temuan terkait bilangan riil ini membuat shock banyak matematikawan kala itu.

Untungnya, semua konsep-konsep aneh ini masih berada dalam dunia abstrak matematika yang memang bebas. Pertanyaan tetap Kembali pada, apakah memang semua konsep ini punya representasi di dunia nyata? Sejauh ini memang di bidang apapun di dunia nyata, penggunaan bilangan selalu hanya sejauh bilangan rasional. Jika memang bilangan irasional sebanyak itu, ia mewakili apa dalam dunia nyata? Ya tentu untuk beberapa bilangan irasional yang kita kenal, ada representasi khusus yang tersematkan, seperti bilangan Pi yang jelas merupakan konstanta universal perbandingan antara keliling dan diameter lingkaran, ataupun akar dari bilangan prima yang akan sering muncul dalam panjang sisi miring segitiga siku-siku. Akan tetapi selain keberadaan angka-angka ini masih bersifat matematis, sebagaimana penerapan setiap angka tersebut di dunia nyata akan mengubahnya menjadi rasional, sehingga irasionalitas bilangan itu tidak pernah terwujud.

Diskrit vs Kontinu

Sebenarnya setiap bilangan selalu punya kemungkinan untuk memiliki representasi riil, bergantung bagaimana konsep yang diwalki secara esensi menunjukkan apa. Sejauh ini, penamaan istilah “bilangan” bertahan seakan apa yang ditunjukkan sebenanrya memiliki esensi yang sama. Akan tetapi, perlu dilihat bahwa sebenarnya inti dari konsep yang ada di balik kata bilangan berubah seiring abstraksi yang dilakukan. Pada awal perkembangannya, sebagaimana telah dibahas, bilangan memang merupakan label untuk membilang, untuk menunjukkan sifat kuantitas, yang memperlihatkan jumlah. Bahkan sampai abstraksi ke bilangan rasional, bilangan masih memenuhi tugasnya sebagai label pembilang. Karena sifat kuantitas pada dasarnya memberi komparasi yang lebih presisi ketimbang sifat lainnya yang cenderung relatif, maka penyifatan ini memperluas kegunaan bilangan menjadi untuk komparasi, untuk menentukan posisi dalam sebuah keberurutan. Hal ini teraplikasikan juga pada keperluan lain yang sedikit berbeda seperti representasi ukuran geometris. Baik dalam menyajikan ukuran maupun keberurutan, karakter dasar “membilang” itu masih ada. Dalam mengukur panjang misalnya, kita pada dasarnya tetap menggunakan suatu patokan panjang tertentu, kemudian menjadikan patokan itu sebagai dasar pembilangannya. Dulu patokan itu masih berupa hal-hal materiil, seperti tangan, langkah kaki, ranting kayu, atau semacamnya. Sekarang, patokan itu pun masih ada, namun dibuat tunggal untuk standarisasi, seperti satuan meter. Semua ini masih berada dalam gagasan dasar bilangan sebagai pembilang. Meskipun misal muncul suatu ukuran yang tidak tepat setara dengan kelipatan patokan yang digunakan, seperti misal 2 meter lebih sedikit, maka “lebih sedikit” ini pun tetap bisa diatasi dengan pecahan (bilangan rasional), yang sebagaimana sudah terbahas juga sebelumnya, berdasar pada pembilangan juga. Kegunaan praktikal bilangan masih sesuai dengan hakikat dasar bilangan itu sebagai “pembilang” (*counter*).

Keseluruhan konsep tentang pembilangan ini berubah ketika bilangan irasional muncul, dan dengannya sistem bilangan riil. Sebagaimana yang kita lihat, bilangan riil berkembang sama sekali dengan sebuah konsep baru. Pendefinisiannya pun bahkan tidak intuitif dan melepaskan diri dari konteks pembilangan. Secara esensial sendiri, kita sudah lihat bagaimana bilangan riil memang bersifat *uncountable*, yakni tak berbilang. Tidak ada cara untuk bisa membilang bilangan riil. Hal ini membuat bilangan riil menghasilkan suatu konsep yang sangat spesifik hanya bisa disematkan padanya, yakni kontinuitas. Kekhususan ini memberi distingsi dengan bilangan-bilangan sebelumnya yang lebih sederhana dengan dualism diskrit-kontinu.

Diskrit merupakan sifat dimana suatu hal atau entitas bisa dipisahkan menjadi individu atau unit-unit terpisah. Segala benda material itu diskrit, karena setiap benda itu merupakan unit tersendiri. Keterpisahan individual suatu unit objek ini memungkinkan objek tersebut dapat dibilang, maka diskrit berkait erat dengan keterbilangan. Bisa dikatakan juga bahwa bilangan merupakan label berurut untuk unit diskrit. Selama sesuatu bisa dipisah atau dibelah jadi unit-unit tertentu, maka sesuatu itu selalu bisa disebut diskrit, dimana prosesnya dinamakan diskritisasi. Misal, 2 buah semangka merupakan unit diskrit, namun kalaupun semangka itu harus dipotong untuk 20 orang, maka potongan 1/10 semangka itu juga merupakan unit diskrit. Jika demikian, bukankah yang kontinu juga bisa dianggap diskrit? Iya, tapi ketika sudah dipecah-pecah atau didiskritisasi, maka yang kita pandang bukan lagi objek kontinunya, tapi objek diskritnya. Kontinuitas itu sendiri bertahan di balik objek diskrit itu. Sebagai contoh, interval bilangan riil dari 1 sampai 10 bisa dibagi menjadi 10 potongan diskrit dengan lebar 1. Interval satuan ini sebagai satu kesatuan mungkin memang merupakan objek diskrit, namun di dalam objek itu ada kontinuitas bilangan yang terkandung. Untuk memahami lebih jauh lagi, bayangkan menganggap setiap bilangan riil adalah sebuah unit diskrit. Karena unit diskrit itu harusnya dapat terpisahkan menjadi objek individual, sekarang coba ambil 10 bilangan riil yang berjejer, anggaplah dimulai dari 0. Apa bilangan riil yang bisa kita pisahkan setelah 0? Apakah 0.0001? Tapi, bukankah di antaranya masih ada 0.000001? Kita bisa mengulang pertanyaan ini sampai tak hingga kali dan tetap tidak bisa menemukan jawabannya. Tidak ada cara memisahkan garis atau suatu interval bilanngan riil menjadi objek-objek terpisah. Bilangan riil itu kontinu.

Apakah ada entitas lain yang punya sifat kontinu? Uniknya, hanya himpunan bilangan riil yang demikian. Kalaupun ada, objek matematis yang kontinu pasti terkait erat, baik berupa turunan ataupun aspek yang lebih besar dari bilangan riil, seperti himpunan bilangan kompleks. Bilangan riil begitu khusus sehingga membuatnya bahkan seperti sebuah entitas tersendiri di dunia matematika. Sampai-sampai, ada cabang khusus di matematika yang secara spesifik mengurusi bilangan riil, yakni matematika analisis. Yang mengherankan adalah, kenapa "bilangan riil" masih disebut sebagai bilangan, ketika jelas bahwa kapabilitasnya untuk membilang sudah hilang sama sekali? Ya mungkin itu hanya masalah bahasa. Secara konseptual sendiri, bilangan riil masih diperlakukan seperti bilangan di matematika karena memang memiliki sifat wajib yang dimiliki bilangan, yakni keberurutan. Selain itu, secara struktur ia sebenarnya serupa dengan himpunan bilangan rasional, karena keduanya sama-sama memiliki kumpulan sifat-sifat yang dikenal di matematika sebagai *lapangan* (*field*). Beberapa sifat itu antara lain komutatif (a+b=b+a), asosiatif (a+(b+c)=(a+b)+c), bilangan negatif sebagai invers (a+(-a)=0), dan seterusnya. Anggap saja semua itu sifat-sifat yang memang kita butuhkan sebagai bilangan. Walau demikian, semua ini adalah aspek-aspek abstrak matematis yang membuatnya masih dianggap bilangan. Secara praktikal, bilangan riil tidak pernah dipakai untuk membilang. Atau mungkin lebih tepatnya, secara praktikal bilangan riil tidak pernah dipakai.

Kapan kita menggunakan bilangan riil selain dalam perhitungan matematis? Tidak ada, karena bahkan bilangan riil, khususnya bagian irasionalnya, tidak bisa dipaparkan atau dijabarkan secara lengkap dengan cara apapun. Karena bilangan riil merepresentasikan kontinuitas, mungkin pertanyaannya bisa diganti menjadi, apa aspek di dunia nyata yang kontinu? Untuk menelusuri pertanyaan seperti ini, mau tidak mau kita agak sedikit berpaling dulu dari matematika.

Misteri Realitas

Kata kontinu, meskipun kerap dipakai di dunia nyata dalam beragam keperluan dan bidang ilmu, sebenarnya tidak pernah tergunakan secara semestinya. Apa yang kita sebut kontinu sebenarnya masih terimplementasikan secara diskrit, paling tidak dari segi praktikalnya. Memang, secara fundamental, sains masih melihat semesta sebagai sesuatu yang kontinu, paling tidak pada era klasik. Ketika Isaac Newton mengembangkan hukum-hukum tentang gerak, ia bergerak dari asumsi bahwa semesta itu kontinu, karena hanya dengan asumsi itu kalkulus bisa diformulasikan. Newton menciptakan kalkulus untuk menangani masalah kecepatan instan, yang sebenarnya merupakan paradoks. Masalah kecepatan instan bisa dibayangkan dengan baik melalui ilustrasi panah Zeno. Ia menggambarkan bahwa untuk panah yang dilepaskan, pada suatu titik waktu pastilah menempati suatu posisi yang tetap. Pada setiap titik waktu yang berbeda, panah tersebut menempati suatu posisi yang tetap, sehingga, seharusnya pada setiap waktu panah tersebut sebenarnya tidak bergerak. Karena ini berlaku untuk setiap titik waktu, sebenarnya sepanjang waktu panah itu tidak bergerak karena selalu diam menempati suatu posisi yang tetap. Implikasi dari hal ini adalah, gerak itu mustahil, atau paling tidak, ilusi. Gambaran yang lebih modern adalah bagaimana sebenarnya perangkat digital mengolah video. Berkas video pada dasarnya merupakan kumpulan gambar diam yang terangkai dengan cepat. Ukuran normalnya adalah sekitar 20-30 gambar (*frame*) per detik. Meskipun terdiri atas kumpulan gambar yang diam, sebuah berkas video ketika dijalankan terlihat seperti bergerak. Dalam hal ini, gerakan dalam video itu merupakan ilusi. Inti dari ilustrasi ini adalah ketiadaan kontinuitas dalam waktu. Ketika Zeno melihat durasi waktu yang berlalu hanyalah merupakan kumpulan titik-titik waktu (yang diskrit), maka pergerakan dunia ini hanya seperti video yang diputar.

Kita bisa saja menganggap semesta seperti demikian, yang berarti sebenarnya bersifat diskrit, akan tetapi anggapan ini akan menimbulkan masalah tersendiri.

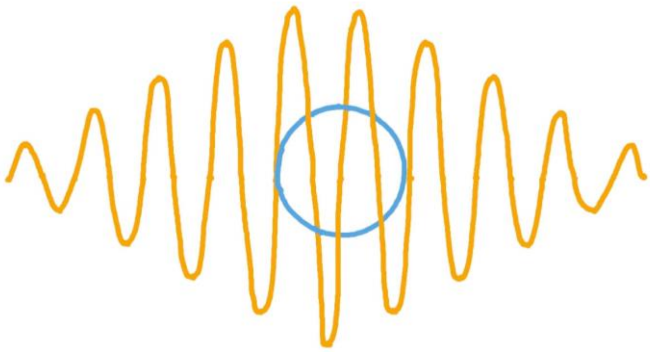
Video merupakan suatu hal yang “masa depan” dan “masa lalu”-nya sudah terdefinisi, sehingga pergerakan dalam suatu frame video bisa ditentukan dari frame berikutnya dan frame sebelumnya, yang memang sudah ada. Sehingga, meskipun video ketika dijeda (*pause*) seakan diam, pergerakannya sudah terdefinisi. Terlebih lagi, video digital sebenarnya tidak menyelesaikan paradoks panah Zeno, karena kita sebenarnya tetap tidak bisa menentukan gerak hanya dari satu frame video. Dalam kasus riil, masa depan itu bergantung pada laju perubahan (pergerakan) pada waktu sekarang. Ketika kita memotret sebuah bola yang tengah melayang, kita tidak pernah bisa memutuskan bola itu sebenarnya tengah bergerak ke arah mana. Masa depannya belum jelas dan kita tidak tahu pada waktu yang instan itu, bola itu lajunya seperti apa. Inilah inti dari paradoks panah Zeno, atau masalah kecepatan instan. Kita tahu benda itu bergerak dengan suatu kecepatan tertentu ketika kita mengamati benda itu dalam suatu interval atau durasi waktu. Lantas, bagaimana kita tahu kecepatan benda itu dalam waktu yang instan? Hal ini tidak bisa dipecahkan kalau kita menganggap waktu itu diskrit, karena kemudian semesta butuh loncat dari satu bingkai waktu ke bingkai berikutnya. Loncatan ini tidak mendefinisikan pergerakan karena tidak ada kausalitas yang jelas antar bingkai waktu. Terlebih lagi, bila semesta harus loncat dari antar bingkai waktu, maka dengan demikian tidak ada batasan semesta bisa berubah sejauh apa dalam loncatan itu. Konsep kausalitas pun menjadi kacau, karena tidak jelas bagaimana antar bingkai waktu saling memengaruhi. Asumsi ini akan membolehkan pergerakan benda tidak progresif, atau dengan kata lain suatu benda bisa berpindah tempat secara instan. Apakah ini berarti semesta itu kontinu?

Pada akhrinya memang Newton mengatasi masalah kecepatan instan ini dengan menganggap semesta, paling tidak ruang dan waktunya, itu kontinu, sehingga konsep-konsep dasar kalkulus seperti limit dan turunan, bisa terdefinisikan. Sampai sekarang, hukum-hukum fisika banyak bergantung dari fondasi ini. Kalkulus begitu fundamental karena ia memberi landasan formulasi yang kokoh untuk konsep tentang perubahan, sedangkan hampir semua yang diurus dalam dunia nyata adalah perubahan. Pertanyaan akan kekontinuan semesta tidak jadi masalah sampai kemudian era modern fisika hadir. Era klasik memandang semua besaran itu bersifat kontinu, sehingga selalu bisa mengambil nilai berapapun. Akan tetapi, ketika awal abad ke-20 berkembang temuan-temuan baru fisis yang merevolusi bangunan fisika besar-besaran. Ditemukan pada saat itu bahwa ternyata energi itu terkuantifikasi, artinya hanya bisa dipancarkan atau diserap dalam suatu kelipatan tertentu, bukan pada sembarang nilai. Konsep baru fisika ini kemudian dinamakan mekanika kuantum, karena mekanisme alam diperlihatkan dalam kuanta-kuanta (paket diskrit) atau dengan kata lain besaran alam terkuantifikasi. Mekanika kuantum ini mengubah paradigma awal yang menganggap semua besaran fisis itu kontinu. Salah satu aspek mekanika kuantum ini memang sempat memberi kejutan pada dunia fisika, namun bukan sekadar karena masalah dikotomi diskrit-kontinu.

Dalam dunia fisis, dikotomi diskrit-kontinu lebih sering diperlihatkan dalam bentuk dikotomi partikel-gelombang. Objek-objek materiil sudah lama dianggap terdiri dari komponen-komponen kecil. Meskipun skala komponen ini berubah dari waktu ke waktu, dimana semakin lama selalu ditemukan komponen yang lebih kecil, namun aspeknya tetap sama bahwa ada unit fundamental yang menyusun semua materi. Berawal dari atom, yang kemudian terpecah menjadi trio elektron-proton-neutron, hingga sekarang proton dan neutron dianggap tersusun oleh quarks. Unit-unit ini selalu digambarkan sebagai sebuah partikel, yakni objek kecil yang terlokalisasi, sehingga jelas bersifat diskrit. Kita bisa menghitung ada berapa banyak elektron atau quark yang tersusun dalam suatu benda dengan suatu kuantitas yang jelas. Akan tetapi, semesta tidak hanya terdiri atas materi, namun juga atas aspek-aspek yang lebih tidak berwujud seperti energi. Energi terkadang bisa terbawa oleh materi dalam bentuk potensial atau gerakan. Selain itu, energi terkadang juga bisa terpancarkan sendiri secara murni tanpa melalui materi, yakni dalam bentuk gelombang, khususnya gelombang elektromagnetik. Berbeda dengan materi yang terlokalisasi (jelas posisi dan gerakannya), gelombang bersifat menyebar dan tidak terlokalisasi. Jika kita melihat air beriak, atau senar yang dipetik, maka pertanyaan dimana gelombang tersebut berada tidak relevan. Ketika air beriak, gelombang itu bisa berada di seluruh permukaan air itu. Gelombang juga tidak bisa ditemukan dalam kondisi diam, karena ia secara esnesi merupakan perubahan yang terpropagasikan. Jika partikel disifati dengan posisi dan kecepatan (atau momentum), maka gelombang disifati dengan amplitude (tinggi gelombang) dan panjang gelombangnya (atau frekuensinya). Dalam bahasa kita sebelumnya, gelombang itu bersifat kontinu.

Dalam mekanika kuantum, energi, yang terpropagasikan oleh gelombang elektromagnetik, ternyata juga bersifat diskrit karena ia terkuantifikasi. Dalam pandangan klasik, karena panjang gelombang elektromagnetik itu bisa mengambil nilai berapapun, dan energi yang dibawa oleh gelombang itu ditentukan oleh panjang gelombangnya, maka energi juga harusnya bisa mengambil nilai berapapun atau kontinu. Temuan awal mekanika kuantum kemudian berlanjut hingga menghasilkan konsep bahwa ternyata gelombang elektromagnetik bisa terdiskritisasi juga sehingga bersifat seperti partikel. Bahkan, kemudian ditemukan juga bahwa sebaliknya juga berlaku, bahwa setiap partikel juga bisa bersifat seperti gelombang. Dalam hal ini, dikotomi diskrit dan kontinu terkaburkan, karena mekanika kuantum menunjukkan hakikat wujud bisa berperilaku seperti keduanya.

Mungkin memang jika ditinjau Kembali, dikotomi diskrit-kontinu agak kabur di sini, karena tidak jelas besaran apanya yang tengah diamati. Sebenarnya hal ini bisa terlihat bila cukup mengambil satu aspek saja, misalkan jumlah. Partikel bisa dengan mudah dibilang (*count*) jumlahnya, namun kita tidak bisa menyebut berapa jumlah gelombang. Gelombang tidak terlokalisasi sehingga tidak bisa dipisahkan menjadi unit-unit individual, sehingga pantas bila kita sebut ia bersifat kontinu.



Gambar 4. Gelombang yang membentuk "partikel"

Meskipun seakan bersifat dualisme, pertanyaan yang lebih fundamental masih bisa diajukan. Apakah seluruh semesta pada dasarnya gelombang, namun beberapa aspeknya bisa berperilaku seperti materi, atau sebaliknya? Perkembangan fisika saat ini sebenarnya sudah punya kecenderungan jawaban. Dalam teori yang lebih modern, yakni medan kuantum, digambarkan bahwa semesta ini berisi medan-medan kuantum yang selalu berfluktuasi, yang mana setiap medan bisa dibayangkan seperti permukaan laut yang selalu bergelombang. Adanya partikel, sebenarnya hanya merupakan fluktuasi medan yang cukup “besar”, ibarat suatu gelombang laut yang cukup tinggi sehingga seakan membentuk objek sendiri. Tentu saja permukaan laut di sini hanya ilustrasi karena jelas dimensinya berbeda, dimana medan kuantum itu 3 dimensi sedangkan permukaan laut hanya 2 dimensi. Dalam konsep ini, yang lebih fundamental adalah gelombang, sedangkan partikel-partikel hanyalah gelombang yang mewujud berbeda. Memang dalam mekanika kuantum, hukum paling fundamental dari materi adalah persamaan gelombang.

Dalam pemaparan tadi, kita baru berbicara tentang aspek wujud atau objek di semesta itu sendiri, sedangkan ketika berbicara semesta, banyak aspek yang terlibat. Aspek fundamental lain dari semesta adalah ruang dan waktu, yang sebenarnya merupakan konsep yang sama sekali berbeda ketimbang wujud itu sendiri. Hakikat dasar ruang dan waktu lebih mengarah pada sifat tersendiri yang menjadi penunjuk (*pointer*) dari wujud atau objek ketimbang sebuah entitas tersendiri. Dalam konteks ini, teori-teori modern fisika sudah jelas tendensi pada ruang dan waktu yang kontinu ketimbang diskrit. Ruang dan waktu yang diskrti memberi banyak paradoks dan masalah, terutama di teori relativitas. Terlebih lagi, sudah dipaparkan sebelumnya bagaimana paradoks Zeno tidak akan bisa diselesaikan bila menganggap waktu itu diskrit dan semesta hanya seperti video digital yang berisi kumpulan frame gambar. Ada beberapa pandangan yang memang menganggap adanya panjang dan durasi terkecil yang ada di semesta. Hal ini dipicu dirumuskannya suatu besaran yang dikenal sebagai panjang Planck (10^{-35} meter) dan waktu Planck (10^{-43} detik), akan tetapi besaran ini sebenarnya merupakan murni hasil perhitungan konstanta-konstanta dasar fisika yang disesuaikan satuannya tanpa ada landasan fisisnya. Sesungguhnya bila melihat kembali ke aspek wujud pun, apa yang diperlihatkan oleh medan kuantum adalah bagaimana wujud itu berperilaku di ruang. Medan kuantum membentuk gelombang yang kontinu dalam keseluruhan ruang. Ketika fluktuasi medan ini membentuk partikel, maka pada suatu titik ruang, gelombang ini terlokalisasi. Sehingga, secara mendasar, masalah diskrit-kontinu ddari wujud pun kembali ke aspek ruang dan waktunya.

Jadi?

Pengandaian semesta yang diskrit menghasilkan banyak problematika dalam bangunan teori fisika yang sudah dibangun. Berhubung masalah-masalah yang ditimbulkan dari semesta yang diskrit belum ada penyelesaian yang jelas, maka semesta yang kontinu lebih bisa diterima. Kesimpulan ini pun sebenarnya tidak menutup kemungkinan bahwa semesta bisa jadi bersifat diskrit, karena masih banyak yang perlu dipahami dan dibongkar dari hakikat semesta. Kita masih mungkin membayangkan semesta ini bersifat diskrit karena bisa jadi cara kerja semesta adalah seperti bagaimana komputer bekerja. Konstruksi perhitungan komputer sekarang semakin lama semakin halus dan semakin rinci, baik dalam bentuk video, permainan, simulasi, ataupun sampai berupa dunia virtual metaverse. Perkembangan teknologi seperti ini membuka peluang atas semesta yang diskrit, karena bukan hal yang mustahil juga bahwa semesta ini seperti semacam simulasi raksasa. Akan tetapi, untuk mengokohkan teori itu, banyak penyesuaian yang perlu dilakukan dan masalah-masalah yang perlu diselesaikan agar segala penjelasan tetap bisa konsisten menguraikan semua fenomena fisis. Ya, sampai saat itu tiba, lebih aman menganggap semesta ini memang kontinu.

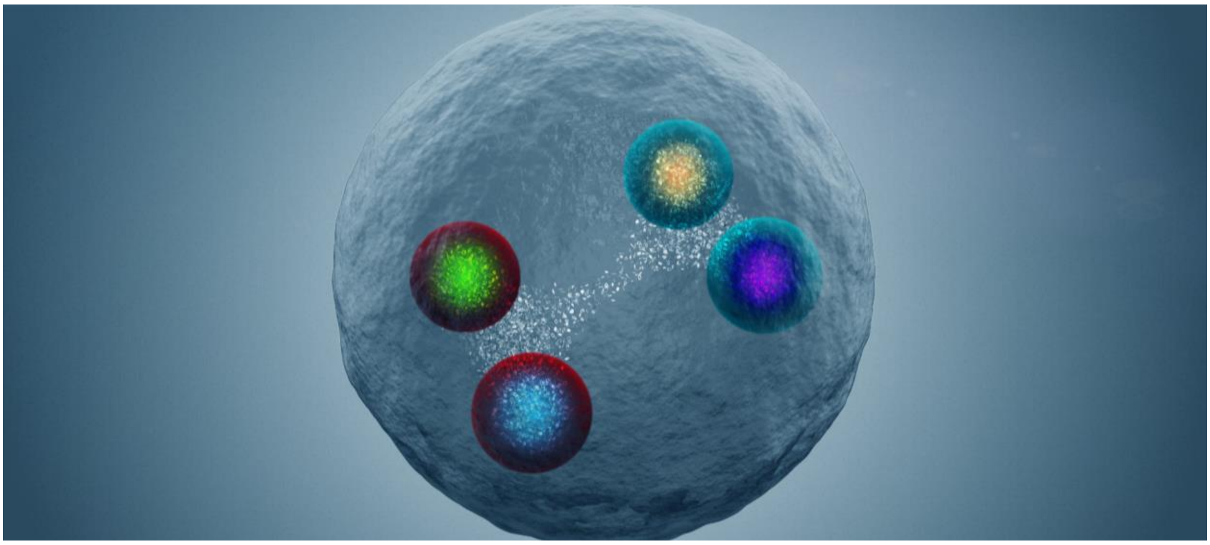
Jika kita meninjau awal permasalahan, keraguan atas kontinuitas semesta berakar dari tidak naturalnya eksistensi bilangan riil dalam matematika. Bilangan riil sebagai representasi dari kekontinuan memang tidak intuitif, sehingga sukar untuk benar-benar memastikan ke-riil-an dari bilangan riil. Sebenarnya bagaimana teori kuantum menganggap segala sesuatu secara fundamental adalah gelombang dan partikel hanyalah salah satu perwujudan dari gelombang, bisa dilihat juga secara matematis. Suatu garis bilangan riil yang kontinu, bisa didiskritisasi dengan membundel kumpulan bilangan riil dalam interval-interval.

Pemaparan panjang ini membuat penulis menduga bahwa mungkin ada kekeliruan cara pandang dalam melihat konstruksi sistem bilangan yang berawal dari bilangan asli. Memang secara historis, bilangan asli merupakan bilangan yang paling primitif digunakan dan dikembangkan manusia, namun rangkaian historis tidak selalu urut dalam aspek hirarki konsep. Banyak hal fundamental justru ditemukan belakangan. Meski bilangan asli merupakan sistem yang ditemukan paling awal, bukan berarti ia yang paling fundamental, sehingga bahkan dinamai "natural". Salah satu alternatifnya adalah bahwa yang natural justru sebenarnya adalah bilangan riil sebagai aspek yang fundamental memang menjadi fondasi di semesta. Selebihnya, bilangan asli, bulat, maupun rasional merupakan sistem yang dibangun dari bilangan riil. Hal ini mungkin lebih mudah dibayangkan karena melakukan konstruksi diskrit dari yang kontinu membutuhkan prosedur yang lebih intuitif, ketimbang sebaliknya yang sampai membutuhkan konsep-konsep abstrak seperti barisan Cauchy atau potongan Dedekind. Bilangan riil dengan demikian tidak perlu didefinisikan secara konstruktif, namun cukup aksiomatik karena ia fundamental.

Di matematika, sebenarnya konstruksi mana yang duluan tidak terlalu berpengaruh signifikan, selama ia konsisten dan masih dalam satu bangunan matematis. Dalam fondasi matematika, bangunan matematis bisa dibangun dari dua set aksioma yang berbeda. Terkadang bahkan hubungan satu konsep dan konsep lainnya dalam bangunan matematika bisa bersifat 2 arah, sehingga kita bisa membangun A dari B atau sebaliknya. Meskipun begitu, ketika mengaitkannya dengan realitas, maka akan penting melihat mana yang lebih fundamental ketimbang yang lain. Salah satu kelebihan kenapa bilangan asli dianggap lebih fundamental adalah karena bilangan asli itu sendiri bisa dikonstruksikan dengan aksioma himpunan yang jauh lebih fundamental lagi. Ketika kita mau membangun sistem bilangan yang dimulai dari bilangan riil, maka yang menjadi masalah adalah bagaimana bilangan riil itu sendiri dibangun dari konsep yang lebih fundamental seperti himpunan. Cara singkatnya adalah dengan menjadikan eksistensi bilangan riil itu sendiri sebagai aksioma dasar, sehingga tidak memerlukan pembuktian atau konstruksi lagi.

Alternatif lainnya adalah menganggap bilangan riil dan bilangan lainnya adalah dua entitas yang berbeda. Hal ini mungkin diperlukan karena kita tidak bisa menafikan bahwa bilangan asli pun cukup fundamental sebagai konsep pembilangan. Bilangan asli bisa dibangun secara anggun dari aksioma teori himpunan karena bilangan asli berdiri pada konsep yang sangat sederhana, yakni keberlanjutan (*successor*), bahwa setelah suatu bilangan ada bilangan berikutnya, yang dengan itu kita menghitung atau membilang. Menganggap bilangan asil dibangun dari bilangan riil pun membutuhkan intuisi yang tidak langsung. Bila dilihat lagi, kedua bentuk bilangan ini kan memang mewakili 2 konsep yang berlawanan, yakni diskrit dan kontinu, maka tidak ada salahnya juga menganggap kedua bentuk bilangan ini memang sebagai entitas yang berbeda tanpa harus saling membangun. Jika Kembali melihat aspek realitas pun, sebenarnya meskipun secara mendasar wujud, ruang, dan waktu bersifat kontinu, namun tetap banyak besaran-besaran fisis yang jelas diskrit, seperti muatan (*charge*), spin, dan kuantitas sendiri.

Yah, apapun jawaban pastinya. Apa yang lebih fundamental mungkin tidak terlalu signifikan untuk dibicarakan. Hal ini tidak akan mengubah keseluruhan bangunan matematika yang sudah ada. Semua perenungan ini hanya lebih pada pemaknaan dan interpretasi atas apa sebenanrya hakikat dari objek-objek matematis, termasuk bilangan riil. Akan terasa hampa bila bilangan riil didefinisikann begitu saja hanya dengan mementingkan alur logika dan konsistensi tanpa menghiraukan pemaknaan dari apa yang sebenarnya direpresentasikan bilangan riil. Paling tidak kita sudah melihat esensi dasar dari keduanya. Bilangan adalah label terurut. Bilangan yang diskrit adalah untuk melabeli objek-objek diskrit, dan dengan demikian mewakili besaran, kuantitas, atau jumlah, sedangkan bilangan yang kontinu (riil) adalah untuk melabeli entitas kontinu, dan dengan demikian mewakili "posisi" dan "panjang", baik dalam aspek ruang atau waktu.



Apa Objek Dasar Matematika?

Setiap ilmu memiliki objek yang diteliti. Setiap objek ini diamati, ditelaah, dan dikaji untuk mendapatkan pemahaman lebih dalam terkait aspek-aspek yang jadi fokus utama ilmu terkait. Sebagai contoh, objek biologi adalah makhluk hidup, objek kimia adalah zat, objek psikologi adalah aspek psikis atau mental manusia, objek sosiologi adalah manusia itu sendiri, objek sejarah adalah fenomena atau narasi masa lalu, objek liguistik adalah bahasa, dan objek fisika adalah seluruh materi. Seiring setiap ilmu berkembang, setiap objek ini terus digali dan dibongkar untuk bisa memahami mekanisme ataupun hukum yang berlaku pada objek-objek tersebut. Pergerakan ilmu semakin lama memang selalu semakin ke wilayah dasar dan fundamental. Dalam biologi misalnya, setiap makhluk hidup mulai dipahami sebagai kumpulan sel-sel punya sistem dan mekanisme sendiri serta saling berinteraksi. Semakin dasar dan fundamental ilmu itu dipahami, maka konsep yang dibangun di atasnya semakin kokoh dan utuh.

Pencarian ke dasar ini jelas terlihat pada bagaimana para saintis terus berusaha menemukan entitas terkecil penyusun materi. Di awal mula sains berkembang, konsep atom menjadi hipotesis terkuat sebagai sebuah wujud yang tak bisa dibagi lagi (a-tom=indivisible). Perkembangan muatan listrik dan juga radioaktif menuntun konsep lain bahwa atom itu sendiri terdiri atas tiga entitas lain yang lebih kecil, yakni proton, neutron, dan elektron. Lebih jauh lagi, ternyata proton dan neutron itu sendiri terdiri atas partikel lain yang bernama quark. Tidak berhenti sampai di situ, beragam hipotesis lain pun juga bermunculan terkait potensi wujud lain yang membentuk quark. Fisika saat ini masih terus menggali objek dasar ini, meski sebenarnya telah ditetapkan suatu konsep yang sudah cukup kokoh bernama Model Standar, yang menjelaskan peta 17 partikel fundamental dan sifat-sifatnya. Apakah partikel fundamental ini masih bisa dipecah lagi, itu suatu hal yang belum bisa diketahui. Dalam aspek sains lainnya, seperti biologi, astronomi, atau kimia, maka penelusuran objek dasar akan kembali lagi ke entitas dasar materi. Di wilayah humaniora sendiri seperti politik atau ekonomi pun, terdapat penelusuran yang serupa, namun penelusuran ini lebih kepada konsep ketimbang wujud atau materi, mengingat lingkup kajiannya adalah aspek abstrak manusia.

Bagaimana kemudian dengan matematika? Apakah ada objek dasar dalam dunia matematika yang menjadi fondasi atau penyusun objek-objek lainnya? Jika dilihat dengan seksama, yang dipelajari matematika pun sangatlah luas, dari fungsi, bentuk, matriks, persamaan, graf, dan lain sebagainya. Dengan bahan kajian matematika yang begitu beragam, apakah ada suatu entitas fundamental yang sebagaimana atom ataupun partikel elementer, menjadi elemen terkecil yang menyusun seluruh entitas lainnya?

Menggali ke Dalam

Matematika pada awal perkembangannya mungkin dikenal sebagai ilmu berhitung. Manusia mengembangkan matematika untuk manipulasi konsep kuantitas dan ukuran. Penerapan awal matematika pun sebatas aritmatika dan geometri, yang memang pada peradaban klasik sangat dibutuhkan dalam perekonomian ataupun konstruksi alat atau bangunan. Dalam tingkat ini, dapat dikatakan bahwa objek utama matematika adalah bilangan dan bentuk. Walau sebenarnya juga bentuk-bentuk geometri tetap menggunakan aspek bilangan, konsep-konsep geometri Eukclid pada awal perkembangannya tidak sepenuhnya bersandar pada konsep bilangan, seperti bagaimana dua garis itu sejajar, definisi lingkaran, sifat-sifat segitiga, dan seterusnya.

Seiring dengan perkembangan matematika itu sendiri, beragam konsep lain bermunculan. Bahkan konsep bilangan sendiri pun terus berkembang dari awalnya hanya bilangan asli untuk membilang, hingga menjadi bilangan kompleks yang... ya, kompleks. Konsep fungsi hadir untuk menghubungkan pengaruh satu ukuran dengan ukuran lainnya. Konsep matriks hadir untuk menyajikan bilangan dalam dua dimensi. Konsep turunan berkembang untuk memanipulasi perubahan suatu ukuran. Konsep-konsep lainnya seperti integral, grup, ruang vektor, modul, perturbasi, graf, kategori, manifold, numerik, peluang, topologi, dan masih banyak lagi, berkembang satu per satu mengisi lingkup ilmu matematika. Antara konsep-konsep ini memang ada keterkaitan, namun terkadang melihat satu entitas seperti melihat entitas yang berbeda dengan entitas yang lain. Mencari konsep akar, konsep fundamental, yang menjadi fondasi semua konsep tersebut butuh kecerdikan tersendiri.

Satu hal yang bisa dilakukan tentu adalah melihat dari yang paling primitif, yakni bilangan. Lagipula, ketika pertanyaan terkait objek dasar matematika diajukan, kemungkinan besar mayoritas orang akan cenderung memikirkan bilangan sebagai potensi jawaban. Terlepas dari matematika modern yang semakin lama semakin abstrak, satu hal yang tak akan pernah bisa lepas dari matematika adalah bilangan itu sendiri. Abstraksi yang dilakukan dalam matematika juga pada dasarnya berangkat dari bilangan, sehingga ketika diimplementasikan lagi ke beragam aplikasi dan penerapan, bilangan akan hadir kembali. Tentu dengan beragam konsep bilangan yang bertingkat, mulai dari bilangan asli, bulat, rasional, riil, dan kompleks, yang umum digunakan adalah bilangan riil sebagai bilangan "default" di realitas. Namun, bilangan riil ini sendiri bisa dikonstruksi atau dibangun dari bilangan yang lebih dasar. Bahkan, semua bilangan sebenanrya selalu bisa dimulai dari bilangan asli (dengan 0). Sedikit catatan, konsep dasar bilangan asli sebenarnya adalah bilangan yang berurut dan berawal, sehingga esensinya tidak harus selalu mulai dari 1 sebagaimana yang dipahami kebanyakan. Beberapa matematikawan bahkan menggunakan istilah bilangan asli untuk merujuk bilangan yang dimulai dari 0.

Apakah bilangan asli lantas menjadi objek dasar? Tentu terlalu cepat untuk mengatakan iya, karena masih banyak konsep lain di matematika yang belum tentu bisa dibangun oleh bilangan asli. Jika kita melihat konsep-konsep yang abstrak di matematika, seperti grup atau graf, maka akan sangat sukar melihat keterkaitan khusus dengan konsep bilangan asli. Kemungkinan yang dapat disimpulkan adalah bahwa baik bilangan asli maupun grup, graf, atau konsep lainnya masih sama-sama "cabang", sehingga terdapat konsep lain yang lebih fundamental dimana semua konsep-konsep ini bertemu.

Untuk melihat lebih jauh ke dasar, kita harus bisa mendeskrispsikan lebih rinci apa yang sebenanrya dimaksud sebagai bilangan. Perumusan definisi dari bilangan asli sudah mulai banyak dilakukan matematikawan dengan beragam pendekatan. Salah satu pendekatan bahkan bisa berangkat dari realita itu sendiri. Dalam praktik sehari-hari, bilangan asli diperuntukkan untuk membilang objek lain. Pembilangan ini memberi sifat atau ajektiva baru dari kata benda yang disematkan, yakni sifat kuantitas. Kata sifat menempel pada suatu kata benda untuk memberinya atribut yang bisa membedakannya atau menyamakannya dengan benda lain. Sebagai contoh, ketika kita katakan "sebuah bangunan tinggi", maka tinggi di sini adalah kata sifat, yang membedakan bangunan itu dengan bangunan lainnya yang lebih rendah. Selain itu, kata tinggi membuat kita bisa mengaitkan konsep itu pada hal-hal lain yang punya atribut yang sama, seperti gunung tinggi, menara tinggi, atau tiang tinggi. Dalam contoh ini, kita perlu sedikit hati-hati karena atribut tinggi adalah relatif, karena tidak ada patokan atau definisi khusus yang bisa membuat suatu hal dapat dikatakan tinggi. Uniknya, hal ini tidak berlaku pada atribut pembilangan atau atribut jumlah. Pada frase "dua sapi" misalkan, maka kata dua ini bermakna sama dengan dua pada frase "dua mobil". Tidak akan ada perdebatan, karena jumlah atau banyaknya suatu benda itu jelas dan eksak, kecuali pada benda-benda yang "tak terbilang", seperti air atau gas. Bahkan untuk benda tak terbilang sekalipun, selama takarannya jelas, pembilangan tetap dapat dilakukan secara eksak, seperti "dua galon air" atau "tiga tabung gas".

Dengan gambaran bilangan sebagai sifat atau atribut dari benda, maka kita pada dasarnya bisa membuat mendeskripsikan bilangan dalam bentuk atribut ini. Dengan mengumpulkan semua benda, abstrak atau konkrit, yang berjumlah suatu bilangan sebagai satu kesatuan, maka koleksi benda ini bisa definisi lain dari bilangan tersebut. Misal, bilangan 2 bisa dianggap sebagai kumpulan semua benda yang berjumlah dua, dari dua manusia, dua batu, dua negara, dan seterusnya. Tentu "kumpulan" yang dimaksud di sini tidaklah secara riil, namun kumpulan imajiner atau bayangan. Untungnya, dalam matematika, kumpulan atau koleksi benda merupakan objek tersendiri, yakni himpunan.

Himpunan sebagai Fondasi?

Meskipun gagasan sebelumnya terkesan aneh, hal tersebut menjadi inspirasi awal untuk penentuan konsep yang lebih dasar dari bilangan itu sendiri, yakni himpunan. Akan tetapi, matematika butuh definisi yang lebih rigid dan independen dari realita. Bilangan memang dikembangkan dari praktik riil membilang benda-benda nyata, tapi kemudian konsep ini diabstraksi sehingga tidak terkait lagi dengan realita, sehingga ketika dikatakan 1+1=2, itu sudah lepas dari entitas fisik apapun. Ketika kita katakan bilangan adalah himpunan, kita butuh melihat ini dengan lebih abstrak dan mengabstraksi diri dari realita. Akan tetapi, himpunan sendiri kan konsep yang membutuhkan objek lain, karena pada dasarnya ia adalah entitas kolektif, sedangkan kita mengharapkan sebuah entitas fundamental.

Sebuah langkah cerdik dapat dilakukan untuk mengatasi hal ini. Bayangkan, kira-kira apa yang ada pertama kali untuk mengawali semua entitas lainnya? Jika itu entitas fisis, maka kosmologi bisa memunculkan beragam teori tentang bagaimana partikel elementer lahir pertama kali membentuk semua hal yang ada di semesta ini. Bagaimana dengan entitas matematis? Apa bahan awal yang pertama kali kita bisa manfaatkan untuk membangun dan membentuk semua entitas lainnya? Kita bisa saja katakan tiba-tiba ada bilangan sebagai entitas paling primitif dan semua konsep lainnya lahir dari sini, tapi sebagaimana telah dibahas, banyak entitas lain di dunia matematika tidak bisa dikonstruksikan hanya dari bilangan. Kalaupun kita katakan himpunan, tapi himpunan butuh anggota karena himpunan pada dasarnya hanya konsep abstrak dari koleksi objek.

Jawabannya tidak ada.

Tidak ada? Ya, tidak ada yang bisa kita definisikan secara apriori di awal tanpa adanya konsep lain yang mendahului, selain ketiadaan itu sendiri. Untungnya, ketiadaan di matematika, adalah sebuah objek. Himpunan memang butuh anggota, tapi himpunan tanpa anggota tetaplah himpunan, maka yang paling bisa didefinisikan pertama kali adalah himpunan tanpa anggota, alias himpunan kosong ($\emptyset$), yang merepresentasikan ketiadaan itu sendiri. Lalu bagaimana? Himpunan kosong ini kita anggap sesuatu yang mengawali, maka kita namakan ia nol (0). Dari nol ini, kita bisa definisikan secara rekursif konsep penerus (*succession*), dimana bilangan asli bisa dibangun. Dengan konsep penerus, kita bayangkan bahwa 1 adalah penerus dari 0, 2 adalah penerus dari 1, dan seterusnya. Konsep penerus ini merupakan landasan abstrak dari pembilangan, dimana kita membilang banyaknya benda, dari satu bilangan ke bilangan berikutnya. Satu, dua, tiga, dan seterusnya hanyalah label atau nama, yang sebenarnya kita bisa namakan dengan banyak cara lainnya. Kita bisa membilang dengan label lain seperti I, II, III, atau a, b, c, atau !,@,# atau apapun itu selama konsep dasarnya sama, yakni barisan yang terurut dan berawal.

Karena yang kita punya adalah himpunan, maka mendefinisikan konsep penerus pun harus dengan sifat-sifat himpunan. Dalam kasus ini, dapat didefinisikan penerus dari a sebagai $a^+ = a \cup \{a\}$. Karena membangun a^+ hanya membutuhkan a, maka hal ini bisa dilakukan terus menerus secara rekursif berawal dari 0 hingga seluruh bilangan asli dibangun. Sebagai contoh karena $0 = \emptyset$, maka $1 = 0^+ = \{\emptyset\}$, $2 = 1^+ = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, dan seterusnya. Jadi dapat dikatakan bahwa seluruh bilangan asli, itu dibangun dari himpunan kosong. Semua bilangan pada hirarki berikutnya, seperti bilangan bulat, rasional, riil, dan kompleks, juga bisa dibangun secara bertahap dari bilangan asli, namun akan panjang untuk diulas semua di sini.

Pertanyaan selanjutnya, bagaimana dengan konsep-konsep matematis lainnya selain fungsi, matriks, atau ruang vektor? Sebelum terlalu jauh, sebenarnya konsep primitif berikutnya setelah bilangan adalah fungsi atau pemetaan. Operasi-operasi bilangan, seperti tambah, kurang, kali, dan bagi, adalah bentuk khusus dari fungsi. Banyak konsep dapat didefinisikan dari fungsi, seperti vektor atau matriks, yang mana merupakan pemetaan dari suatu indeks ke objek yang menempati indeks tersebut. Sebagai contoh, vektor $v = (a, b, c)$ dapat dipandang sebagai pemetaan dari himpunan {1,2,3} ke $\{a, b, c\}$, dimana $v(1) = a$, $v(2) = b$, dan $v(3) = c$. Struktur-struktur di aljabar, seperti grup atau ruang vektor, juga sebenarnya hanya merupakan suatu himpunan dengan suatu operasi yang memenuhi sifat-sifat tertentu. Jadi, selama kita bisa mendefinisikan apa itu fungsi dengan baik, maka sebenarnya semua (atau hampir semua) konsep lain di matematika bisa dibangun dari himpunan dan fungsi.

Ketika berbicara suatu hal yang fundamental, tentu saja kita ingin bentuknya sesederhana dan seminimal mungkin, namun cukup untuk bisa membangun konsep lainnya. Ketika kita sudah memiliki 2 konsep dasar yang fundamental, maka yang perlu kita curigai adalah apakah dua ini masih dapat direduksi lagi atau tidak. Jika kita telaah lebih lanjut terkait fungsi, definisi dari fungsi sebenarnya masih terlalu spesifik, karena fungsi mensyaratkan bahwa hasil pemetaan yang dilakukan itu unik (Cuma satu). Dalam fungsi, setiap x hanya bisa boleh dipetakan ke hanya satu y. Konsep fungsi dengan demikian dapat diperumum lagi menjadi apa yang dikenal sebagai relasi, dimana pemetaan yang dilakukan tanpa restriksi.

Relasi dapat dipahami sebagai pemasangan antara dua objek dari dua himpunan. Pemasangan ini memiliki arah, sehingga a dipasangkan ke b dengan b dipasangkan ke a adalah dua relasi yang berbeda. Karena berarah, relasi secara formal direpresentasikan dalam bentuk tupel biner. Sebagai contoh, relasi a ke b, dapat dituliskan sebagai (a,b). Akan tetapi, apa sebenanrya tupel? Jika ingin ketat, maka tupel bisa dianggap daftar yang terbatas dan terurut. Bisa kah kita membuat definisi yang lebih formal lagi dari tupel agar bisa kita kaitkan dengan entitas matematis lain? Tentu bisa. Tupel pada dasarnya hanya koleksi objek, seperti himpunan, tapi ia terurut. Masalahnya adalah bagaimana kita membangun keterurutan dalam himpunan, sedangkan himpunan sendiri jelas tidak mementingkan urutan. Untungnya, khusus untuk relasi, karena isinya Cuma dua, hal ini tidaklah rumit. Kita dapat definsiikan bahwa $(a,b) = \{a,\{b\}\}$. Dengan ini, jelas a dan b terurut dan tidak bisa ditukar. Karena kalau (b,a) harusnya menjadi $\{b,\{a\}\}$, yang jelas merupakan himpunan dengan anggota yang berbeda dengan $\{a,\{b\}\}$. Dengan ini, relasi, juga fungsi dan operasi, adalah himpunan.

Dengan bilangan dan fungsi sendiri dapat didefinisikan sebagai himpunan, maka kurang lebih semua objek matematika lainnya juga dapat dibangun dari himpunan. Dengan begitu, kita dapat cukup yakin bahwa himpunan adalah entitas dasar, batu bata dari bangunan matematika.

Teori Himpunan

Himpunan, meskipun merupakan konsep yang sangat sederhana, pada dasarnya baru memiliki landasan teoretis yang kuat di belakangan waktu, dengan cabang khusus di matematika yang dinamakan teori himpunan. Teori ini termasuk teori yang tergolong modern di dunia matematika. Ia baru mulai muncul pertama kali di akhir abad 19 ketika Georg Cantor meneliti tentang ketakterhinggaan. Sejak saat itu, berbagai pengembangan terkait teori himpunan mulai bermunculan di dunia matematika. Anggaplah teori himpunan seperti relativitas dalam dunia fisika, ia membuka gerbang baru paradigma berpiikir dalam matematika karena konsep yang dibawa lebih abstrak dari sekedar aritmatika ataupun geometri.

Munculnya teori himpunan sesungguhnya memunculkan beberapa perdebatan dalam dunia matematika. Hal ini disebabkan teori ini mengakar hingga ke metode berpikir yang digunakan dalam pengembangannya. Secara umum, dunia matematika sesungguhnya terbagi menjadi dua mahzab pemikiran. Yang pertama adalah konstruktivisme, dan yang kedua adalah yang non-konstruktivisme. Hal ini berhubungan dengan logika yang digunakan ketika berusaha membuktikan suatu pernyataan atau teorema.

Kaum konstruktivis berpendapat bahwa segala sesuatu, untuk bisa dibuktikan ada, harus bisa dikonstruksikan, atau dengan kata lain, kita harus bisa menemukan secara konkrit bahwa 'benda'-nya memang ada. Mereka cenderung menolak hukum eksklusivitas antara dalam teori dasar berpikir. Secara fundamental, ada 3 hukum dasar dalam berpikir yang dipegang dan diyakini sebagian besar orang hingga sekarang, yakni hukum identitas, bahwa jika sesuatu pernyataan mengatakan A, maka pastilah ia A, atau singkatnya "*whatever is, is*", yang kedua, hukum anti-kontradiksi, bahwa sesuatu tidak mungkin A dan tidak A sekaligus, dan yang terakhir, hukum eksklusivitas, bahwa sesuatu haruslah salah satu dari A atau tidak A. Hukum yang ketiga inilah yang ditolak oleh konstruktivis. Artinya, kita tidak bisa membutktikan bahwa sesuatu itu ada dengan mengandaikan bahwa tidak mungkin bisa tidak A, kita harus bisa menunjukkan kalau 'ada'-nya itu bisa dikonstruksikan atau dicari, atau paling tidak, dibuktikan secara langsung, bukan dengan membuktikan kontradiksinya.

Bagi para konstruktivis, sesuatu tak bisa dikatakan benar jikalaupun negasinya telah terbukti salah. Sesuatu tersebut hanya akan dikatakan *unprovable*. Apa yang dikemukakan Kurt Godel dalam teori ketidaklengkapannya pun sebenarnya hanya mengatakan bahwa dalam sebuah sistem aritmatika, maka selalu ada pernnyataan yang *unprovable*. Konsep mengenai *provability* dari suatu pernyataan ini lah yang kemudian menciptakan cabang ilmu baru bernama metamatematika, yang dicetuskan Hillbert pada abad ke-19. Metamatematika menciptakan teori mengenai teori matematika, dan dasarnya hanyalah logika dan teori himpunan.

Tentu saja untuk bisa melakukan pembuktian langsung bukanlah hal yang mudah. Ambillah contoh bilangan riil. Selama berabad-abad para fisikawan menggunakan bilangan riil tanpa sama sekali membuktikan bahwa bilangan riil itu ada. Kita hanya menggunakanya secara intuitif, bahwa ada konsep bilangan kontinyu yang bisa digunakan untuk melakukan pengukuran terhadap besaran apapun. Kalkulus dikembangkan oleh Newton dan Leibniz pada abad ke-17 sendiri pun hanya dengan anggapan bahwa bilangan riil itu memang ada. Barulah kemudian pada abad ke-19 lah konstruksi utuh dari bilangan riil bisa dilakukan, artinya, bilangan riil bisa dicari/dikonstruksikan keberadaannya dengan bilangan rasional.

Pada awal pengembangan teori himpunan oleh Cantor, sesungguhnya teori-teori yang dimunculkan masih cenderung konstruktif, seperti halnya ketika Cantor membuktikan bahwa bilangan riil itu tidak terhitung (ia mengonstrruksikan apa yang dikenal dengan diagonal Cantor, untuk menunjukkan bahwa mustahil bilangan riil dapat dihitung). Apa yang menjadi perdebatan di teori himpunan kemudian adalah ketika teori itu mulai tergali hingga ke arah yang aksiomatik. Langkah ini perlu ditempuh disebabkan berbagai cara untuk mendefinisikan apa itu himpunan selalu menemui paradoks. Cobalah bayangkan. Bagaimana mendefinisikan himpunan?

Awal pendefinisian himpunan sesungguhnya menggunakan apa yang disebut skema aksioma komprehensi, yang mana dikatakan, bahwa jika ada suatu sifat P, maka ada himpunan X yang terdiri dari kumpulan objek yang memenuhi P. Secara tidak langsung, dari situ didefinisikan bahwa himpunan merupakan kumpulan objek yang memenuhi suatu sifat tertentu, artinya, mengapa objak itu tergabung dalam himpunan bisa dijelaskan. Selama ada P yang menjadi syarat keanggotaan X, maka X ada. Sebagai contoh, himpunan laki-laki jomblo memiliki syarat keanggotaan laki-laki dan jomblo. Kalaupun tidak ada objek yang bisa ditemukan memenuhi P, maka X tinggal menjadi himpunan kosong. Tidak ada masalah ditemui. Namun kemudian, Bertrand Russel mencetuskan suatu paradoks dengan mengonstruksi suatu himpunan yang tediri dari objek yang bukan anggota himpunan tersebut. Secara matematis, dituliskan $X = \{x|x \notin X\}$. Konstruksi tersebut valid berdasarkan aksioma komprehensi, hanya saja, jelas itu menemukan kontradiksi. Lantas siapa anggota X? Paradoks lain yang dicetuskan Russell adalah pendefinisian himpunan dari semua himpunan, atau secara matematis, $X = \{Y|Y = Y\}$. Lantas siapa anggota X?

Sumber masalah dari hal ini adalah karena himpunan didefinisikan murni hanya dengan sifat P yang dipenuhi anggotanya, yang mana anggota ini bisa berupa himpunan juga. Apa itu himpunan menjadi hal yang tidak jelas tanpa hirarki yang spesifik. Himpunan bisa menjadi anggota dari himpunan lain, yang bisa juga jadi anggota himpunan lain, yang kemudian bisa juga jadi anggota himpunan lain. Rantai ini bisa tak punya ujung, atau bahkan memutar. Padahal, sebenanrya pendefinisian sesuatu yang baik adalah dengan adanya hirarki lingkup yang jelas. Ibarat ketika mendefinisikan kucing, kita sebut kucing adalah mamalia, hewan, atau makhluk hidup yang memiliki ciri-ciri bla bla bla. Mamalia, hewan, atau makhluk hidup adalah konsep yang lebih luas dari kucing, sehingga kita dapat mendefinisikan kucing dengan memperkecil lingkup pembicaraannya dengan memberi sifat-sifat spesifik. Jika kembali dalam konteks himpunan, apa entitas yang lebih luas dari himpunan? Jawaban atas hal ini, sebagaimana konsep-konsep lain di matematika, pada akhirnya dapat dibuat sebagai sebuah konsep baru.

Ketika menemui paradoks terkait himpunan, Russell mengajukan solusi dengan mendefinisikan entitas yang lebih luas dari himpunan, yang disebut "kelas". Kelas adalah konsep yang lebih umum dari himpunan yang memenuhi 2 aksioma, yakni (1) kelas dapat berisi himpunan namun (2) suatu kelas tidak berisi kelas lainnya. Suatu kelas bisa juga adalah himpunan, bisa juga tidak. Perluasan konsep ini memungkinkan paradoks Russel, baik dalam bentuk himpunan yang tidak mengandung dirinya sendiri, ataupun himpunan yang mengandung semua himpunan, terselesaikan dengan menggantinya menjadi kelas. Akan tetapi penyelesaian seperti ini sebenarnya hanya "tambalan" saja, yang mana tidak natural dan tidak menyelesaikan masalahnya secara tuntas. Sifat yang diberikan pada kelas seperti paksaan hanya untuk menghindari paradoksnya.

Landasan Aksiomatis

Paradoks-paradoks yang ditemui dalam pendefinisian himpunan memicu para matematikawan modern mencoba cara yang lebih 'deskriptif' ketimbang konstruktif. Kecenderungan untuk deskriptif inilah yang kemudian menjadi perdebatan di kalangan para konstruktivis. Sejauh ini, seperti halnya pendefinisian hal-hal mendasar lainnya, pendefinisian himpunan akhirnya aksiomatik, namun menggunakan banyak aksioma untuk melengkapi definsiinya tanpa memicu paradoks apapun. Salah satu yang diterima mayoritas hingga saat ini adalah aksioma Zermelo-Frankel, yang mendefinisikan himpunan menggunakan 9 aksioma, yakni:

1. *Extensionality*. Jika X dan Y memiliki elemen yang sama, maka X dan Y adalah himpunan yang sama.
   $\forall u(u \in X \equiv u \in Y) \Rightarrow X = Y$
2. *Pairing.* Untuk setiap a dan b, terdapat himpunan $\{a, b\}$
   $\forall a \forall b \exists c \forall x\big(x \in c \equiv (x = a \vee x = b)\big)$
3. *Separation* (nama lain aksioma komprehensi). Misal ϕ sebuah sifat dengan parameter p. Untuk setiap himpunan X dan p, ada Y yang berisi anggota X yang memenuhi ϕ dengan p.
   $\forall X \forall p \exists Y \forall u\Big(u \in Y \equiv \big(u \in X \wedge \phi(u, p)\big)\Big)$
4. *Sum Set / Union*. Untuk setiap X, terdapat himpunan Y yang merupakan gabungan dari semua elemen X.
   $\forall X \exists Y \forall u\big(u \in Y \equiv \exists z(z \in X \wedge u \in z)\big)$
5. *Power Set*. Untuk setiap X, terdapat $Y = P(X)$, yang merupakan himpunan dari semua subhimpunan dari X.
   $\forall X \exists Y \forall u(u \in Y \equiv u \subseteq X)$
6. *Infinity.* Terdapat himpunan tak berhingga.
   $\exists S\big[\emptyset \in S \wedge (\forall x \in S)[x \cup \{x\} \in S]\big]$
7. *Replacement*. Misal F sebuah pemetaan. Untuk setiap X, hasil peta F dari X juga adalah himpunan.
   $\forall x \forall y \forall z[\phi(x, y, p) \wedge \phi(x, z, p) \Rightarrow y = z] \Rightarrow \forall X \exists Y \forall y[y \in Y \equiv (\exists x \in X)\phi(x, y, p)]$
8. *Foundation / Regularity*. Setiap himpunan tak kosong memiliki sebuah elemen minimal.
   $\forall S[S \neq \emptyset \Rightarrow (\exists x \in S) S \cap x = \emptyset]$
9. *Choice*. Setiap himpunan dari himpunan tak kosong memiliki fungsi pilihan.
   $\forall x \in a \exists A(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x \in a\ A\big(x, y(x)\big)$

Kesembilan aksioma di atas kemudian lebih dikenal dengan sebutan ZFC (*Zermelo-Fraenkel with Choice*). Banyak konstruktivis tidak bisa menerima *axiom of choice* (AC), mengingat hal itu begitu intuitif, namun sayangnya telah banyak dipakai dalam pengembangan matematika. AC secara sederhana mengatakan bahwa dari koleksi himpunan tak kosong apapun, kita selalu bisa mengambil masing-masing darinya sebuah elemen. Jika koleksinya berhingga, tentu tidak akan ada masalah. Seperti misalnya kita memiliki himpunan A dan B, kita bisa mengonstruksi (memilih) satu elemen a dari A dan satu elemen b dari B untuk mengonstruksi pasangan (a, b). Tapi bayangkan jika koleksinya ada tak berhingga banyak, maka kita tidak bisa menjamin untuk bisa mengonstruksi semuanya secara bersamaan. Kalaupun mau dikonstruksi satu-satu, tidak akan pernah selesai, sedangkan kita tidak mesti bisa membuat suatu generalisasi pilihan untuk semua himpunannya. Inilah yang kemudian diberikan ''cuma-cuma" oleh AC yang mengatakan selalu ada fungsi pilihan (fungsi untuk memilih satu anggota dari tiap himpunan) pada semua koleks himpunan tak kosong. Beberapa konstrukstivis pun kemudian hanya memegang 8 aksioma dan menyebutnya ZF ketimbang ZFC. Meskipun 8 aksioma yang ada sendiri pun belum sepenuhnya konstruktif, sehingga beberapa konstruktivis bahkan memegang sistem aksioma lain yang dinamakan IZF (*Intuitionistic Zermelo-Fraenkel*).

Sistem aksioma harus merupakan sistem terkecil yang dapat dibentuk, sehingga adanya 9 aksioma ZFC tidak dapat direduksi lagi. Setiap aksiomanya diperlukan untuk membentuk suatu aspek di bangunan matematika. Anggaplah segala sesuatu itu bisa dipandang sebagai himpunan, mau himpunan kosong, mau himpunan dari himpunan, mau himpunan dari himpunan dari himpunan. Konstruksi himpunan tersebut dimungkinkan oleh adanya aksioma *pairing*, yang mana kita bisa selalu membentuk himpunan baru dari elemen-elemen yang ada. Dengan aksioma *ekstensionality*, kita hanya bisa membandingkan segala objek berdasarkan keanggotaannya, sehingga tidaklah selalu bahwa objek memiliki sifat, meskipun kemudian dengan aksioma *separation*, dari setiap sifat selalu dimungkinkan untuk membentuk sebuah himpunan. Mungkin untuk orang awam, sebagian askioma lainnya, seperti aksioma regularitas, kurang jelas penggunaannya dan kenapa diperlukan. Akan tetapi, semua aksioma ini dipastikan untuk dapat membangun matematika secara cukup, dimana satu aksioma tidak dapat diturunkan dari aksioma lainnya.

Cara aksiomatis membuat matematikawan secara deskriptif dapat mendefinisikan himpunan. Secara aksiomatis, cukup dapat dikatakan bahwa himpunan adalah sesuatu/entitas yang memenuhi 9 aksioma ZFC. Sesuatu ini apa, tidak ada cara untuk mengatakannya. Dalam ZFC, tidak dibutuhkan konsep yang lebih luas dari himpunan, seperti konsep kelas. Paradoks yang ditemui Russell diatasi dengan memperkuat aksioma komprehensi (separasi) sehingga ketika membuat himpunan baru dengan suatu sifat *P*, ia harus dipastikan berada dalam suatu lingkup himpunan lain dulu. Konstruksi himpunan yang tidak memuat dirinya sendiri tidak dimungkinkan dengan penguatan aksioma ini. Pada akhirnya, daripada menggunakan konsep kelas, aksiomatisasi lebih digunakan untuk mengatasi paradoks Russell. Walau kemudian sebenarnya beberapa ekstensi dari ZFC, seperti teori himpunan Neumann-Bernays-Godel (NBG), melibatkan konsep kelas dalam aksiomanya.

Teori himpunan, termasuk perumusan aksiomatik himpunan sebelumnya, kemudian dianggap sebagai *Foundations of Mathematics*, disebabkan hampir segala sesuatu dimatematika bisa direduksi hanya menggunakan teori himpunan. Dalam matematika klasik, kita memiliki banyak sistem matematika namun seakan-akan satu sama lain punya dasar yang terpisah. Teori himpunan pun menyatukan semuanya dalam satu konsep. Ia merupakan *Theory of Everything*-nya ilmu matematika. Sederhananya, segala objek abstrak matematis di semesta, bisa dianggap sebagai himpunan, bahkan fungsi sekalipun. Dalam himpunan, kita hanya cukup melihat sesuatu itu anggota atau bukan dengan melihat sifat-sifat yang mencirikan himpunan tersebut.

Batu Bata Sesungguhnya

Meskipun himpunan sendiri dapat dikukuhkan jadi fondasi dengan baik melalui aksiomatiasasi teori himpunan, kita dapat mempertanyakan aspek lain yang sebenarnya terlupakan. Ketika model standar dalam fisika mendeskripsikan materi fisis, deskripsi ini tentu tidak cukup untuk bisa menjelaskan fenomena alam, karena kita harus tahu bagaimana materi-materi ini berinteraksi atau berperilaku. Dalam konteks itu, fisika memiliki teori medan kuantum untuk menjelaskannya, sehingga akhirnya konsep-konsep lain dalam fisika bisa terbangun. Serupa dengan itu di matematika, ketika kita sudah punya himpunan, maka kita tetap perlu mengetahui bagaimana elemen dasar ini berperilaku atau berinteraksi. Syukurnya, dalam ZFC, deskripsi teori himpunan sudah mencakup bagaimana himpunan berperilaku. Akan tetapi, ketika teori medan kuantum pada dasarnya adalah model matematika, apa yang sebenarnya menjadi landasan ZFC? Ya, logika. Bahkan, ZFC sebenarnya memiliki bentuk formal berupa sebuah pernyataan logika. Lebih lagi, justru dengan logika lah ZFC dapat diimplementasikan untuk membangun konsep lain dan teorema di matematika.

Logika mungkin tidak bisa disebut “elemen dasar”, karena ia secar esensi adalah sekelompok aturan formal untuk melakukan inferensi atau pengambilan kesimpulan. Logika menjadi alat bagi himpunan untuk dapat berkembang dari aksioma-aksiomanya. Matematika tidak akan bisa bergeark kemana-mana jika logika tidak diterapkan pada aksioma-aksioma yang ada. Di sisi lain, kita bisa memandang aturan logika dengan teori himpunan itu sendiri. Misalkan, dalam logika sederhana, kita memiliki rangkaian pernyataan: Setiap manusia pasti bernafas; Socrates adalah manusia; (maka) Socrates bernafas. Dalam hal ini, kita bisa pandang bahwa kumpulan semua manusia merupakan sebuah himpunan yang termuat dalam himpunan makhluk yang bernafas. Karena socrates merupakan elemen himpunan manusia, Socrates juga merupakan elemen dari himpunan makhluk yang bernafas. Bisa dilihat bahwa konsep implikasi dalam logika sepadan dengan ketermuatan dalam himpunan. Bila aturan logika bisa direpresentasikan dengan mekanisme himpunan, apakah itu berarti himpunan benar-benar yang paling dasar bahkan mendahului logika? Sayangnya terlalu cepat untuk mengatakan demikian, karena yang terjadi adalah alur yang berputar. Kalaupun aturan logika dapat turun dari teori himpunan, sayangnya aksiomatisasi himpunan sendiri dituliskan dalam pernyataan logika.

Jika kita tinjau lebih teliti lagi, sesungguhnya, yang dimainkan oleh logika bukanlah himpunan, namun teori dari himpunan, yakni aksioma-aksiomanya, yang pada dasarnya adalah pernyataan. Hakikatnya, logika memang hanya berurusan dengan pernyataan formal. Dalam matematika, pernyatan formal ini punya banyak nama, yakni aksioma, lemma, proposisi, teorema, konjektur, dan juga akibat (*corollary*). Terlepas dari banyak namanya, terkadang semua ini disederhanakan menjadi aksioma dan teorema saja, untuk membedakan pernyataan awal, yakni aksioma, dengan pernyataan turunan, yakni teorema. Apa yang dilakukan oleh matematikawan dalam kesehariannya pada dasarnya adalah meneliti dan mengotak-atik teorema-teorema, bukan objek yang dijelaskan oleh teorema-teorema tersebut. Meski memang dalam berusaha memahami teorema, objek-objek spesifik juga dieksplorasi dan dikonstruksi. Lantas apakah kemudian batu bata dasar matematika adalah teorema?

Jawaban dari hal ini tentu saja masalah perspektif, apa yang kita maksud sebagai "batu bata dasar". Teorema adalah aturan yang menjelaskan bagaimana objek-objek matematika berperilaka. Jika kita revisi kesimpulan sebelumnya, kita bisa lebih spesifik mengatakan bahwa, himpunan (dan objek matmatika lainnya) diatur oleh beagam teorema, dan teorema itu sendiri diatur oleh logika. Dalam analoginya dengan sains, dapat dikatakan bahwa partikel elementer (atau materi lainnya) diatur oleh beragam teori fisika (termasuk teori medan kuantum), dan teori fisika itu sendiri diatur oleh matematika. Dari sini dapat terbayang hirarki ontologinya.

Pada akhirnya, apa yang menjadi elemen atau "batu bata" dasar dari matematika dirangkum dalam sebuah area besar fondasi matemaitka, yang dikenal sebagai "logika matematika". Area ini tersusun atas 3 sektor utama, yakni teori himpunan, teori model, dan teori pembuktian. Teori model menjelaskan bagaimana kaitan antara teorema dengan struktur yang ada di dalamnya, sedangkan teori pembuktian menjelaskan bagaimana struktur antar teorema itu sendiri membentuk pembuktian. Ada yang juga melibatkan sektor keempat dalam logika matematika, yakni teori komputabilitas, yang sebenarnya sangat spesifik untuk jadi fondasi. Teori komputabilitas berbicara tentang bagaimana suatu hal dapat dihitung atau tidak, juga kompleksitas perhitungannya. Teori ini lebih banyak terkait pada aplikasinya dalam sains komputasi.

Batas Reduksi

Himpunan mungkin dapat dikatakan sebagai entitas "terkecil" di matematika, karena ia tidak dapat dibagi atau bukan dibentuk dari elemen lainnya. Demikian halnya elektron, quarks, atau partikel elementer di model standar lainnya, yang merupakan entitas independen terkecil yang membentuk semua materi di semesta. Akan tetapi, dalam fisika pun, hal ini tidaklah bisa menghentikan penggalian lebih jauh, karena pada dasarnya pertanyaan yang sama akan terus muncul. Dari 16 partikel elementer di model standar, kita bisa terus bertanya bahwa apa yang membentuk 16 partikel tersebut. Elektron itu terdiri dari apa, quark itu disusun atas apa, dan seterusnya. Memang dalam teori medan kuantum, setiap partikel ini dianggap sebagai sebagai sebuah eksitasi (atau disebut juga kuanta) dari suatu medan kuantum. Sayangnya, kita juga masih bisa bertanya, apa sebenarnya medan kuantum itu. Apakah ia energi, atau entitas lain, atau apa, itu akan terus menjadi pencarian tersendiri. Riilnya, medan kuantum adalah model matematis yang belum tentu memiliki aspek atau representasi fisis. Dalam level yang lebih dalam, memang fisika teori menjadi sangat matematis karena keterbatasan eksperimentasi fisis, yang pada akhirnya menyisakan interpretasi dari model matematis itu sendiri. Salah satu yang cukup populer dalam reduksi ini adalah teori *string*, yang memodelkan adanya suatu objek satu dimensi seperti senar yang menjadi dasar segala sesuatu. Sayangnya, ini pun belum punya landasan atau interpretasi fisis yang memadai.

Salah satu kelebihan matematika adalah ia tak memerlukan representasi fisis, sehingga ketika kita definisikan suatu entitas dengan sifat-sifat tertentu, maka ia bisa ada selama sifat itu dipenuhi. Kalaupun kita harapkan matematika memiliki hubungan dengan dunia riil, maka itu menjadi misteri filosofis terpisah terkait apakah matematika diciptakan atau ditemukan. Jika matematika hanya ciptaan manusia, maka semua entitas yang ada di matematika hanya ada dari definisi, dan sebenarnya model bahwa himpunan menjadi landasan pun itu hanya ciptaan pikiran manusia. Terlepas dari hal itu, kita sebenarnya masih tetap bisa mempertanyakan hal serupa pada himpunan, yakni himpunan itu sebenarnya apa.

Di sisi lain, teorema-teorema matematika juga tidak lebih dari pernyataan-pernyataan formal yang berangkat dari aksioma, yang esensinya hanya asumsi yang dibuat untuk membangun suatu sistem tertentu. Hanya saja, kita buat asumsi ini sebisa mungkin mewakili aspek-sapek yang sesungguhnya dari apa yang ingin kita bangun. Yang membuat ini menarik adalah asumsi yang bersifat sangat abstrak dalam aksiomatisasi objek-objek matematika, tetap bisa berujung ketepatan dan kecocokan luar biasa di dunia riil pada implementasinya. Ini pun menjadi misteri tersendiri.

Di ujung pencarian ini, pada akhirnya kita bisa melihat bahwa mencari fondasi bukan hal yang mudah. Semangat mencari elemen terkecil ini, yang dikenal sebagai reduksionisme, belum tentu memiliki ujung. Dalam ilmu apapun, reduksi ini sebuah proses yang tak bisa berhenti, karena kita bisa selalu mempertanyakan apa yang lebih kecil dari sesuatu. Uniknya, di matematika, proses ini berhenti dengan sendirinya dengan begitu banyak paradoks dan masalah di fondasi. Tulisan ini bahkan belum menyinggung isu ketidaklengkapan Godel. Hasil akhir yang didapatkan selalu berupa koleksi konsep yang saling menjelaskan ketimbang konsep tunggal. Ini wajar, karena konsep tunggal akan tetap butuh konsep lain untuk menjelaskan konsep itu, yang akhirnya menjadi rantai tak berujung. Ini sebenarnya yang menjadi inti kritik terhadap reduksionisme, bahwa reduksi tidak bisa menjelaskan hubungan kompleks antar komponen. Ketika kita membongkar mesin, paradigma reduksionisme hanya melihat mesin-mesin itu terdiri atas komponen apa saja dengan fungsi masing-masing, melupakan bahwa yang membuat mesin itu bekerja justru adalah hubungan antar komponen itu sendiri. Ya, pada akhirnya, yang membangun seluruh konsep matematika bukanlah sekadar himpunan, namun juga teorema-teoremanya, dan tentu yang paling utama, logikanya.

(PHX)

Apa Jaminan Matematika itu Benar?

Seseorang memberi tahu kita bahwa saat ini hujan baru saja turun di luar. Bagaimana kita tahu ia benar? Tentu mudah, kita bisa langsung keluar dan melihat dengan mata sendiri bahwa hujan memang tengah turun, atau jika perlu, juga mengulurkan tangan untuk merasakan langsung tetesan airnya di kulit. Seseorang yang lain memberi tahu kita bahwa dilakukan upacara proklamasi kemerdekaan pada tanggal 17 Agustus tahun 1945. Bagaiman kita tahu ia benar? Juga mudah. Kita bisa cek foto atau dokumen yang menjelaskan kejadian itu. Bagaimana kita tahu foto atau catatan itu benar? Dengan konfirmasi dari sumber-sumber lainnya, seperti saksi atau catatan lainnya. Seseorang memberi tahu di dalam setiap materi ada partikel kecil bernama elektron. Bagaimana kita tahu ia benar? Dengan mencoba sendiri eksperimen yang membuktikan keberadaannya dan menyaksikan sendiri hasilnya.

Setiap pernyataan yang kita dengar, jika ia memang sebuah fakta atau kebenaran, tentu kita bisa pastikan atau justifikasi kebenarannya. Hal ini kontras berbeda dengan opini, klaim, atau dongeng, yang bersifat karangan. Sekarang, bagaimana kalau seseorang memberi tahu kita bahwa bilangan prima itu ada tak hingga banyaknya? Bagaimana kita tahu ia benar? Mungkin orang itu akan menunjukkan sebuah argumentasi *bukti* dari pernyataan itu, tapi bagaimana argumentasi itu bisa dianggap benar? Pada semua contoh sebelumnya, setiap bukti kebenaran itu bisa kita saksikan, baik langsung atau tidak langsung. Sayangnya, objek matematika bukanlah hal yang bisa "disaksikan". Keberadaannya bersifat abstrak. Lantas, apa yang kemudian bisa menjadi landasan kebenaran dari semua pernyataan di matematika?

Pembuktian Matematis

Matematika adalah ilmu yang tersusun atas teorema-teorema, yang mana setiap teorema ini mendeskripsikan bagaimana objek-objek matematis berhubungan dan berperilaku. Ini setara dengan "hukum" kalau dalam dunia fisika, seperti hukum Newton atau hukum Maxwell, yang dengannya fenomena fisis bisa dideskripsikan. Memang, setiap teorema ini memiliki "tingkatan" tertentu sehingga punya nama berbeda, seperti proposisi, lema, atau akibat (colloraly), akan tetapi pada dasarnya semua sama-sama teorema namun penggunaan atau pemosisiannya saja yang terkadang membuatnya berubah nama.

Teorema secara sederhana dipahami sebagai pernyataan yang sudah atau dapat terbukti benar. Kebenaran suatu teorema didapatkan melalui proses pembuktian dari teorema lain, yang juga sudah terbukti benar dari teorema lain lagi. Sebagai contoh sederhana, terdapat pernyataan bahwa setiap bilangan prima selain 2 tidak habis dibagi 2. Pernyataan ini bisa dibuktikan benar dari pernyataan lain bahwa setiap bilangan ganjil tidak habis dibagi 2, dan bahwa setiap bilangan prima selain 2 adalah bilangan ganjil. Dalam logika, proses pembuktian ini menggunakan aturan yang dikenal sebagai modus ponen, yakni bila diketahui benar "jika p maka q", dan juga bahwa "p" benar, maka dapat disimpulkan "q" juga pasti benar. Proses pembuktian adalah proses yang melibatkan aturan-aturan logika. Dengan ini bisa dikatakan perkembangan matematika hanya melibatkan teorema-teorema yang diolah mesin logika. Aturan logika menjadi justifikasi dan penentu apakah teorema-teorema tersebut benar. Logika menjadi jawaban paling mudah dan langsung atas pertanyaan terkait landasan kebenaran matematika. Akan tetapi, logika menjadi justifikasi kebenaran tidak hanya di matematika, namun juga di semua ilmu lain. Bahkan sebenarnya manusia berpikir dan menyimpulkan sesuatu selalu menggunakan logika, meski dalam ketetatan yang berbeda. Matematika hanya lebih ketat saja menggunakan logika secara totalitas. Karena matematika tidak mengandalkan realitas, maka logika menjadi satu-satunya alat yang matematika bisa gunakan menjustifikasi semua kebenaran teoremanya.

Di sisi lain, logika hanyalah alat, semacam mesin yang mengolah suatu masukan (premis) menjadi suatu luaran, yang mana luarannya adalah kesimpulan. Ia pada dasarnya bukan penjamin kebenaran, tapi ia memastikan bahwa kesimpulan yang diperoleh valid berdasarkan pernyataan masukan atau premis yang diberikan. Logika tidak bisa menjamin masukannya benar atau tidak, maka ia juga tidak bisa menjamin kebenaran luarannya. Yang ia jamin hanya validitas. Dalam konteks ini, "benar"-nya suatu pernyataan ditentukan oleh 2 hal, yakni proses logis yang menghasilkan pernyataan itu, dan juga kebenaran premisnya. Dalam dunia nyata, kebenaran premis bisa datang langsung dari observasi, yakni apa yang kita lihat atau cerap dari realita. Bahwa matahari bersinar adalah sebuah premis benar yang tidak memerlukan proses logika lagi untuk mengetahui kebenarnanya karena bisa disaksikan secara objektif. Sayangnya, matematika adalah ilmu yang independen dari realita, maka kebenaran premisnya tidak bisa diperoleh secara empirik (observasi/persaksian). Satu-satunya alat yang dimiliki matematika adalah logika, maka kebenaran premisnya harus juga ditentukan dari proses logis yang menghasilkannya. Seperti halnya contoh sebelumnya terkait bilangan prima dan bilangan ganjil, kita bisa terus bertanya bagaimana membuktikan bahwa setiap bilangan prima selain 2 adalah bilangan ganjil? Pada akhirnya, pembuktian akan menghasilkan rantai logika, dimana satu teorema dibuktikan oleh teorema lainnya, yang dibuktikan oleh teorema lainnya, yang kemudian dibuktikan oleh teorema lainnya lagi. Rantai ini tentu harus berhenti di suatu tempat, karena jika tidak, proses berantai ini tidak akan pernah berhenti dan itu mustahil. Untuk itu, perlu ada suatu pernyataan yang sudah bisa berstatus benar tanpa perlu dibuktikan. Akan tetapi, bagaimana mungkin kita bisa punya penyataan yang dapat diklaim begitu saja sebagai benar?

Yang Pasti Benar

Pada dasarnya, kita tidak perlu terkejut atau bingung pada adanya hal yang sudah pasti benar tanpa pembuktian, karena contohnya banyak dan mudah untuk dipahami. Contoh paling sederhana dari kalimat yang sudah pasti benar adalah "cuaca hari ini antara hujan atau tidak hujan". Kalimat ini dalam bentuk umumnya adalah "p atau tidak p" (p v -p), yang mana apapun isi pernyataan p, kalimat itu dipastikan benar. Kalimat-kalimat seperti ini dalam logika disebut tautologi, yakni kalimat yang selalu berstatus benar terlepas dari konten atau interpretasinya. Sebagai contoh, pernyataan "jika p maka q" sangat bergantung kebenarannya dari apa p dan apa q, tetapi pernyataan "jika p maka p" tidak bergantung pada apa isi p, karena ia selalu benar. Akan tetapi, tautologi mendapatkan kepastian kebenaran dari aturan logika itu sendiri, karena tautologi selalu terkait dengan formulasi dasar aturan logika. Sebagai contoh, kata penghubung "atau" pada dasarnya memilih satu dari dua pilihan, kalau tidak yang satu, berarti ya satunya lagi, maka kalimat "p atau tidak p" itu merepresentasikan makna logis dari aturan penghubung "atau". Karena ia terlepas dari komponen penyusunnya, bisa dikatakan tautologi tidak memberi informasi apa-apa, tidak mendeskripsikan apa-apa, selain validitas sebuah aturan logika. Memberi tahu orang bahwa seekor kucing itu kalau tidak hidup ya mati, tidak memberi informasi apa-apa, karena itu sebuah tautologi. Yang kita butuhkan adalah apa yang disebut sebagai pernyataan kontingen, yang status benar atau salahnya sangat bergantung kontennya.

Kalau bukan tautologi, lantas apa pernyataan yang bisa dianggap selalu benar tanpa perlu dibuktikan? Perhatikan kalimat ini, "kursi itu untuk duduk" atau "segitiga itu punya 3 sisi". Dua kalimat ini berstatus benar tanpa perlu dibuktikan. Kenapa? Karena kursi memang adalah alat yang digunakan untuk duduk dan segitiga jelas adalah bangun ruang yang punya 3 sisi. Kebenarannya datang dari definisinya sendiri. Kalimat yang mengandung definisi akan secara otomatis menjadi benar karena definisinya membenarkan itu. Beberapa contoh kalimat lain adalah, "hujan turun dari atas", "janda itu sudah pernah menikah", "mamalia menyusui anak-anaknya", atau "sisi lingkaran berjarak sama dengan pusatnya". Semua kalimat ini benar dari definisi. Kalimat-kalimat seperti ini lah yang kemudian sebenarnya menjadi titik-titik awal keberangkatan proses logis, karena deduksi serumit apapun, argumen secanggih apapun, haruslah kembali ke definisi. Semua konsep atau kata yang kita gunakan sangat bergantung pada definisi, maka definisi menjadi salah satu landasan kebenaran. Terlebih lagi, karena tidak bisa mengandalkan kebenaran empirik, matematika hanya bisa berangkat dari definisi, sehingga bisa dikatakan awal dari seluruh teorema adalah definisi.

Jika kita perhatikan lebih jauh lagi, bagaimana sebenarnya kita mendefinisikan sesuatu? Kita pasti berangkat dari suatu enitas dasarnya, kemudian mendeskripsikannya dengan ciri khas yang hanya dimiliki benda tersebut. Sebagai contoh, kita mendefinisikan kursi dengan berangkat bahwa kursi adalah sebuah alat atau instrumen, yang mana ciri khas utamanya adalah fungsionalitasnya yang diperuntukkan untuk duduk, sehingga secara sederhana definisi dari kursi adalah alat untuk duduk. Tentu saja terkadang definisi bisa beragam, karena ada yang menyebutkan bahwa ciri khas kursi adalah berkaki dan bersandaran, karena tumpukan kayu yang bisa digunakan untuk duduk tidak bisa disebut sebagai kursi. Keberagaman kemungkinan definisi ini terkadang disebabkan karena penggunaan bahasa yang juga beragam dan ditentukan banyak faktor, seperti budaya, pengalaman, dan lain sebagainya. Akan tetapi, di matematika, karena terlepas dari realita, definisi haruslah tunggal, jelas, dan tidak ambigu. Seperti halnya definisi pada umumnya, di matematika, definisi juga hanya membutuhkan entitas dasarnya dan juga deskripsi ciri-cirinya. Sebagai contoh, ketika kita mendefinisikan bilangan prima, maka entitas dasarnya adalah bilangan asli, dengan ciri bahwa ia tidak dapat habis dibagi dengan bilangan asli selain 1 dan dirinya sendiri. Pada contoh lain yang agak lebih abstrak, terdapat objek di matematika bernama grup yang merupakan himpunan dengan suatu operasi yang asosiatif, memiliki identitas, dan setiap elemennya memiliki balikan. Tidak perlu pusing dengan apa makna dari grup, namun ini hanya ilustrasi bahwa definisi grup sebenarnya hanya sebuah himpunan dengan ciri-ciri tertentu.

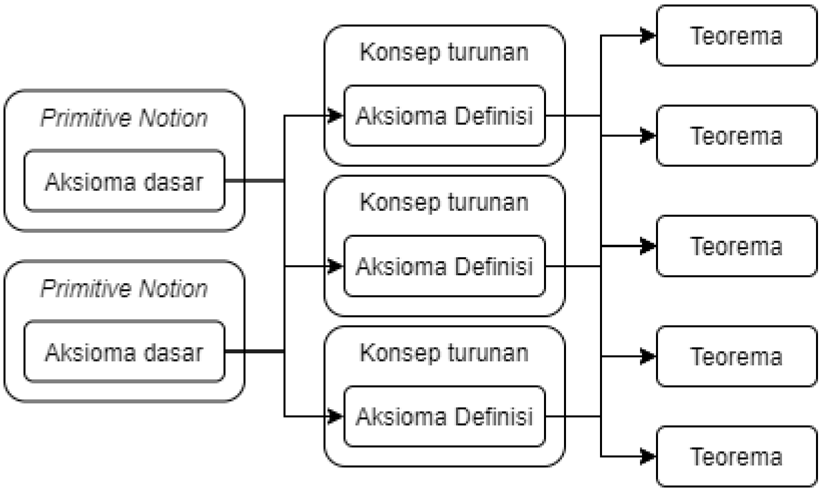
Konsep Primitif

Ketika kita mendefinisikan suatu objek di matematika, maka kita harus berangkat dari suatu entitas dasar, yang tentunya harus lebih abstrak dan general. Kita mendefinsikan bilangan ganjil dari bilangan asli, mendefinisikan segitiga dari garis, mendefinisikan grup dari himpunan. Entitas dasar yang lebih general ini dipersempit dengan ciri-ciri tertentu sehingga menghasilkan definisi entitas baru. Perhatikan bahwa ketika kita bergerak mundur, maka tentu harus selalu ada entitas dasar yang lebih abstrak untuk bisa mendefinisikan entitas yang baru. Hal ini tidak bisa terjadi terus menerus, sehingga harus berhenti pada suatu entitas yang paling abstrak. Entitas seperti ini disebut dengan *primitive notion* atau konsep primitif. Contoh sederhana konsep primitif adalah titik di geometri. Secara sederhana entitas primitif adalah entitas yang tidak bisa didefinisikan dari konsep yang telah terdefinisi sebelumnya. Jadi bisa dikatakan entitas ini harus sudah terdefinisi tanpa perlu didefinisikan. Sebelum kepala menjadi pusing, perlu diingat bahwa ketidakmampuan konsep primitif untuk didefinisikan adalah dari aspek entitas dasarnya, sedangkan sebelumnya telah kita bahas bahwa untuk mendefinisikan sesuatu kita perlu 2 aspek. Paling tidak, kita bisa manfaatkan aspek yang satu lagi untuk memberi sedikit basis definisi pada konsep primitif, yakni dengan mendeskripsikan ciri-cirinya. Pernyataan yang mendeskripsikan suatu konsep ini dikenal dengan nama aksioma.

Aksioma terkadang lebih dipahami sebagai "penyataan yang sudah diterima sebagai kebenaran", tapi bukankah itu hal yang kita cari sedari tadi? Dalam lebih detailnya, istilah aksioma dalam matematika sebenarnya digunakan dalam 2 bentuk yang berbeda, yakni aksioma logika dan aksioma non-logika. Aksioma logika itu serupa dengan tautologi yang telah dibahas sebelumnya. Bedanya, aksioma logika diusahakan seminimal mungkin sehingga dapat menjadi dasar untuk membuktikan tautologi lain yang lebih rumit. Tautologi itu bentuknya banyak, bisa karena yang penting dia bisa selalu bernilai benar secara logika terlepas dari masukannya apa, namun hanya beberapa tautologi yang minimal atau mendasar karena beberapa tautologi hanya turunan dari tautologi minimal ini. Sebagai contoh, "jika p atau q maka p atau q" adalah tautologi yang sebenarnya diturunkan dari "jika p maka p". Sekumpulan tautologi minimal ini lah aksioma logika.

Aksioma yang kedua, yakni yang non-logika, adalah apa yang digunakan untuk mendeskripsikan suatu konsep. Aksioma ini secara spesifik menyatakan ciri khusus atau struktur khusus dari suatu konsep. Sebagai contoh, dalam definisi sebuah grup, salah satu cirinya adalah operasinya asosiatif. Sifat asosiatif ini, yakni bahwa $(a+b)+c=a+(b+c)$, adalah sebuah aksioma non-logika. Dalam diskursus matematis, memang pada akhirnya aksioma non-logika disebut sebagai aksioma saja, atau bahkan terkadang disebut juga sebagai postulat. Ketika kita berangkat dari konsep primitif, maka konsep ini membutuhkan aksioma sebagai pengganti definisi, karena meskipun tidak bisa didefinisikan, konsep primitif tetap perlu bisa dideskripsikan agar kemudian bisa diturunkan jadi teorema-teorema. Pada akhirnya, yang secara formal diformulasikan adalah aksiomanya, sehingga ketimbang mengenal konsep primtiif sebagai awal proses pengembangan matematika, kita mengenal aksioma sebagai yang mengawali semuanya, sekaligus sebagai dasar atau fondasi matematika. Aksioma ini bukan lah pernyataan yang sudah pasti benar, karena selain tautologi itu mustahil bisa ada. Akan tetapi, aksioma adalah cara untuk mendeskripsikan entitas atau konsep primitif di matematika.

Saat ini, aksioma yang paling luas diterima sebagai fondasi matematika adalah aksioma ZFC atau *Zermelo-Frankel with Choice*. ZFC, yang terdiri dari dari 9 aksioma, pada dasarnya hanya mendeskripsikan bagaimana perilaku himpunan, karena himpunan adalah konsep primitif yang paling abstrak. Ia tidak bisa didefinisikan, jadi dideskripsikan dengan aksioma-aksioma. Terlebih lagi, semua objek matematika lain bisa diturunkan dari himpunan. Contoh yang lebih konkrit adalah bagaimana Euklid mempostulatkan 5 aksioma untuk mengembangkan geometri bidang datar. Lima aksioma ini pada dasarnya mendeskripsikan elemen-elemen dasar geometri, yakni titik dan garis. Salah satu aksiomanya, misalkan, berkata "satu garis lurus bisa dibentuk dari dua titik". Aksioma ini berbicara tentang garis dan titik karena keduanya adalah konsep primitif.



Konsistensi dan Kelengkapan

Jika kita tinjau lagi, berarti matematika sejauh ini adalah apa yang dikembangkan dari konsep-konsep primitif yang direpresentasikan dengan sekumpulan aksioma, yang dari situ beragam teorema diturunkan. Pertanyaan dasarnya mungkin tetap tidak berubah. Apa yang menjamin kebenaran semua ini? Jika semua hanya bergantung pada sekumpulan aksioma yang manusia sendiri formulasikan, apa yang membuat ia menjadi benar?

Pada dasarnya matematika dalam bentuk murninya memang tidak terlalu fokus pada "benar" sebagai sebuah status absolut. Apa yang menjadi perhatian khusus matematika adalah validitas logika, karena logika satu-satunya alat yang dimiliki matematika. Pernyataan-pernyataan (teorema-teorema) di matematika selalu teruji validitasnya. Hal lebih lanjut yang menjadi perhatian matematikawan kemudian adalah bagaimana kumpulan teorema ini memang saling terkait satu sama lain validitasnya sebagai sebuah sistem. Hal ini karena kita tidak menginginkan kemudian ada kontradiksi dalam sistem, atau pernyataan yang saling bertentangan satu sama lain. Secara sederhana, apa yang dijabarkan matematika haruslah konsisten, karena kalau sampai ada yang saling berkonflik, maka kebenaran matematika bisa tidak tunggal.

Matematika tidak punya aspek-aspek seperti verifikasi empirik pada sains. Suatu teori sains selalu bisa diuji dengan beragam observasi atau eksperimentasi untuk memperkuat basis kebenarannya. Karena matematika tidak punya basis empirik, maka satu-satunya tempat matematika bersandar adalah logika. Namun, karena logika sendiri hanyalah alat, satu-satunya cara untuk memverifikasi kebenaran pernyataan matematika adalah dengan pernyataan lainnya, yakni dengan memastikan semuanya terkait tanpa ada yang bertentangan. Konsistensi menjadi inti aspek dalam kebenaran matematis. Selain itu, ada lagi aspek utama dalam perkembangan matematika selain konsistensi, yakni kelengkapan. Ketika sains ingin bisa selengkap mungkin mengungkap alam semesta, maka sains bisa terus menerus melakukan observasi dan eksplorasi dengan beragam metode dan instrumen yang dikembangkan. Di matematika hal yang sama juga berlaku, matematikawan menginginkan untuk terus bisa menemukan teorema baru. Akan tetapi, apa jaminannya bahwa setiap teorema di matematika memang bisa dideduksi atau dibuktikan dari teorema yang sudah ada? Belum tentu ada. Aspek ini yang kemudian ditelaah lebih lanjut, bahwa bagaimana sebuah sistem logika seperti matematika dapat lengkap. Sayang memang kemudian dibuktikan bahwa sistem matematika tidak bisa konsisten dan lengkap sekaligus, melalui sebuah teorema yang dikenal sebagai teorema ketidaklengkapan Godel. Secara sederhana

Secara sederhana teorema ini mengatakan bahwa konsistensi dari sistem itu tidak akan bisa dibuktikan dari dalam sistem itu sendiri. Konsekuensinya, kita akan selalu butuh sesuatu di luar sistem untuk bisa menjamin bahwa sistem itu konsisten, tapi jika demikian, maka itu berarti sistemnya tidak lengkap. Ini merupakan salah satu implikasi langsung dari ketertutupan sistem matematika. Ketika ia hanya bisa menjamin kebenaran di dalam sistem itu, ia tidak bisa sekaligus menjamin konsistensinya. Pada akhirnya, yang terpenting di matematika adalah paling tidak pada lingkup tertentu, dia masih terlihat konsisten, meskipun tidak lengkap.

Koherensi vs Korespondensi

Kelengkapan mungkin bukan aspek yang benar-benar perlu di matematika, karena ketika teorema ketidaklengkapan dipublikasikan pun, matematika tetap berlanjut seperti biasa tanpa terpengaruh. Hal ini karena aspek konsistensi jauh lebih diutamakan, karena jika sampai ada bagian di matematika yang kontradiksi atau tidak konsisten, maka keseluruhan bangunan berpotensi turut runtuh bersamanya, mengingat setiap aspek di matematika terhubung melalui validitas logika. Meskipun begitu, ketika matematika hanya memegang aspek konsistensi, tetap ada yang terasa kurang pas. Aspek konsistensi membuat matematika seakan adalah sebuah sistem tertutup yang kebenarannya terdefinisi sendiri di dalamnya. Matematika jadi seakan sebuah sekte yang mana setiap anggotanya bisa saling membenarkan satu sama lain, tapi tidak pernah menerima kebenaran dari luar. Terlebih lagi, seseorang bisa dengan mudah mengubah aksioma dan mengganti keseluruhan sistem bukan? Apa yang menjadi landasan bahwa sistem tertutup matematika ini tidak hanya valid, tapi memang benar juga secara mutlak?

Masalah ini sebenarnya adalah masalah filosofis, terkait dengan teori kebenaran. Pada dasarnya, apa yang bisa disebut "benar" tidak memiliki kesepakatan tunggal. Pandangan umum yang diterima terkait kebenaran adalah apa yang dikenal sebagai teori korespondensi, yakni bahwa suatu suatu hal itu benar jika ia berkorespondensi dengan sesuatu yang nyata ada di dunia. Basis kebenaran dalam teori korespondensi jelas, yakni dunia ini sendiri. Apa yang ada secara nyata di dunia menjadi satu-satunya pegangan. Sesuatu itu benar ya jika kita bisa merumuskan korespondensi dengan hal yang nyata. Di sisi lain, hal ini sukar berlaku untuk matematika, yang seakan tidak berkorespondensi dengan realita. Dalam konteks ini, matematika cenderung memakai 3 teori lain, yakni teori semantik, teori pragmatik, dan teori koherensi. Teori semantik berkata bahwa kebenaran itu murni berasal dari semantik kalimat itu sendiri. Pengembang teori ini adalah seorang matematikawan sendiri bernama Alfred Tarski. Ia memang lebih menekankan pada kebenaran matematis, yang mana ia pandang kebenarannya hanya bergantung secara formal pada validitas pernyataannya. Teori ini dalam bentuk originalnya tidak terlalu berkembang jauh karena Tarski sebenarnya hanya model logika di matematika, yang tidak berbicara kebenaran secara lebih luas, namun teori ini pada dasarnya menjadi gagasan awal teori kebenaran lain. Teori pragmatik secara filosofis tidak terlalu punya landasan. Ia hanya berbicara bahwa sesuatu itu benar karena secara praktis bermanfaat atau "cukup memuaskan untuk diyakini". Demikian juga matematika benar karena ia bisa digunakan secara efektif untuk banyak aplikasi. Kemampuan matematika untuk mendeskripsikan dan memformulasi hukum-hukum alam cukup untuk membuatnya menjadi kebenaran, terlepas dari apa landasan matematika itu.

Yang menjadi perdebatan dengan teori korespondensi seringkali adalah teori yang terakhir, yakni teori koherensi. Teori ini bisa disebut sebagai lawan dari teori korespondensi. Ketika teori korespondensi berbicara kebenaran sebagai relasi dengan realita, maka teori koherensi hanya berbicara terkait hubungan antar kebenaran. Teori koherensi hanya fokus pada konsistensi sistem. Bangunan kebenaran haruslah saling mendukung dan mevalidasi satu sama lain, sehingga kokoh dan kuat, maka yang menjadi perhatian utama adalah koherensi antar pernyataan di dalam sistem kebenaran itu. Suatu hal dianggap benar kalau dia menjadi bagian koheren dari sistem kebenaran. Ini sangat sejalan dengan paradigma matematis yang mengutamakan konsistensi dalam validitas logika. Akan tetapi, sebagaimana yang kita lihat, koherensi hanya akan membuat matematika menjadi sebuah sistem tertutup. Karena matematika tidak terlalu berkoherensi dengan kebenaran-kebenaran di luar matematika.

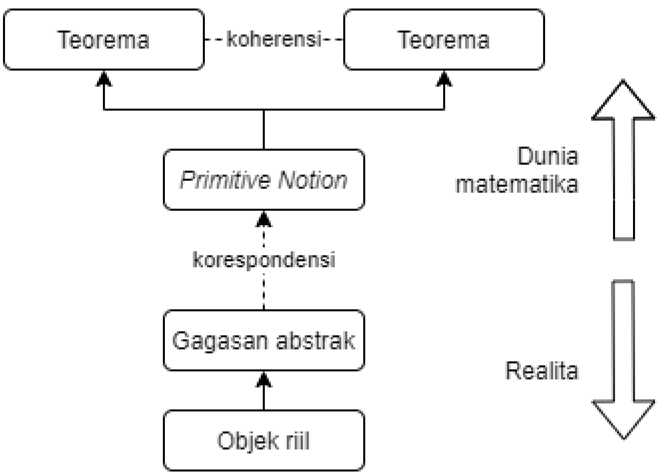
Ketimbang melihat koherensi dan korespondensi sebagai dua hal yang bertentangan, kita bisa mengambil keduanya sebagai perspektif yang ada secara bersamaan, paling tidak di matematika. Dalam wilayah filosofis, kedua hal ini sering dipertentangkan karena secara metafisis ada dua pandangan yang berbeda dalam melihat alam. Ada yang melihat dunia atau realita ini sebagai satu-satunya hal yang bisa dipegang, dan ada yang melihat bahwa di balik dunia atau realita ini, ada dunia ideal abstrak yang menjadi landasan segala sesuatu. Yang jelas, koherensi diadopsi kuat oleh matematika, sehingga pertanyaan lebih lanjutnya ketika ingin menjembatani dua pandangan ini adalah, bagaimana memastikan matematika memang memiliki korespondensi dengan realita.

Realisme Matematika

Untuk melihat sepenuhnya hal ini, kita perlu melihat bagaimana matematika berkembang di awal waktu. Konsep-konsep matematis pada mulanya muncul dari masalah-masalah riil praktis dalam kehidupan sehari-hari, seperti aritmatika dan geometri. Dalam berpikir, manusia biasa memperumum sebuah konsep bila memiliki kesamaan sifat atau atribut. Sebagai contoh, ketika manusia memahami apa itu kuda dan kemudian memahami apa itu sapi, serta melihat semua sifat dan atributnya, maka akan lebih mudah bila kemudian menciptakan konsep yang lebih umum, seperti mamalia. Dengan adanya konsep yang lebih umum, eksplorasi pemahaman dapat lebih mudah dilakukan. Proses seperti ini manusia lakukan hampir pada setiap hal, bagaimana kemudian kita memiliki konsep binatang, tumbuhan, alam, udara, kehidupan, dan lain sebagainya itu adalah dari kemampuan menggeneralisasi konsep. Dalam melakukan generalisasi, terkadang konsep yang terbangun menjadi abstrak dan tercabut dari aspek fisiknya di dunia nyata. Sebagai contoh, ketika manusia mulai hidup berkelompok, muncul konsep komunitas dan suku. Konsep ini masih memiliki rujukan fisik, yakni sekumpulan orang yang berinteraksi. Dengan berkembangnya peradaban, konsep komunitas juga berkembang menjadi jauh lebih kompleks hingga akhirnya kita mengenal negara. Konsep negara sudah menjadi konsep yang abstrak, yang tidak hanya berarti sekelompok orang hidup bersama dan berinteraksi di suatu daerah, tapi juga berarti sebuah sistem, pemerintahan, tata aturan, dan juga identitas. Meskipun punya representasi fisik, tapi negara bukanlah sepenuhnya apa yang terlihat secara fisik.

Proses generalisasi konsep ini juga terjadi dalam konsep-konsep matematis. Awalnya yang muncul adalah konsep membilang (menghitung/mencacah) untuk bisa membandingkan jumlah suatu barang, sehingga proses ekonomi seperti tukar menukar atau jual beli bisa dilakukan dengan tepat. Ketika konsep ini digeneralisasi untuk semua benda, maka konsep ini menjadi abstrak dan tercerabut dari aspek fisik, yakni menjadi konsep bilangan. Dari konsep bilangan ini kemudian berkembang aritmatika dan teori bilangan lainnya. Bisa dikatakan dengan ini, dalam matematika, bilangan (khususnya bilangan asli) adalah konsep yang fundamental atau primitif. Kita pun saat ini mengetahui 1+1=2 sebagai kebenaran final tanpa pernah ada yang mempertanyakan keabsahan atau kebenarannya. Teorema-teorema pun berkembang dari situ secara independen dari realita dengan cukup memanfaatkan aturan-aturan logika.

Ketika menjadi abstrak, konsep bilangan dan aritmatika seakan berdiri sendiri, tapi sebenarnya ia memiliki akar konsep dari realita. Ada gagasan nyata yang mendasarinya, yakni gagasan terkait pencacahan, atau bahkan lebih mendasar lagi, gagasan terkait *succession* (bingung bahasa Indonesia yang sepadan apa, karena tidak bisa diterjemahkan begitu saja menjadi keberturutan). Dalam kehidupan sehari-hari, kita selalu bisa membuat daftar atas segala sesuatu, baik itu waktu, ruang, aktivitas, benda, dan lain sebagainya. Pembuatan daftar (*listing*) ini hal yang sangat primitif, berakar dari gagasan *successive* tadi, bahwa setelah sesuatu, ada sesuatu yang lain lagi, menciptakan daftar atau barisan. Gagasan ini mendasari konsep bilangan karena pada dasarnya bilangan hanyalah cara untu melabeli daftar itu, menjadi suatu proses yang dikenal dengan enumerasi. Label-label ini kita ketahui sebagai satu, dua, tiga, dan seterusnya, tapi tentu tidak harus seperti itu. Label ini bisa apapun karena sebenarnya hanya nama atau simbol. Label dua dalam konsep *succession* merupakan *successor* atau penerus atau setelah satu. Maka satu ditambah satu sama seperti mencari label untuk successor pertama setelah label satu, yakni dua. Kalau labelnya kita ganti, misal bahwa setelah satu itu sebenanrya tiga, ya 1+1=3. Dengan ini, seakan matematika itu begitu eksak dan mutlak, sehingga apapun yang terjadi 1+1=2. Padahal, yang mutlak adalah gagasan yang lebih mendasar di balik itu, yakni gagasan terkait *succession*. Gagasan ini bersumber dari realita. Maka pada dasarnya, bilangan itu sangat berkorespondensi dengan dunia nyata. Ini baru satu contoh, tapi pada dasarnya, setiap objek matematika bisa ditelusuri korespondensinya ke realita, meskipun jauh, karena terkadang semakin kompleks matematika, semakin abstrak objek yang dikembangkan.



Jika kita kembali ke pertanyaan awal, apa sebenarnya landasan kebenaran matematika? Jawaban singkatnya memang validitas logika, tapi lebih dalam dari itu, matematika benar karena ia merupakan bentuk ideal dan abstrak dari realita itu sendiri.

(PHX)

Apakah ini berakhir di sini? Tentu saja tidak. Masih terhampar luas ruang tak bertepi penuh enigma bernama matematika ini. Masih banyak yang dapat dipertanyakan, masih luas yang bisa ditelusuri, masih dalam yang dapat digali. Entah sampai kapan. Entah apakah memang ada jawaban ultima atas semua ini. Namun, sebagaimana yang akan selalu kita katakan pada ketidaktahuan: “kita hanya bisa terus mencari”

(PHX)