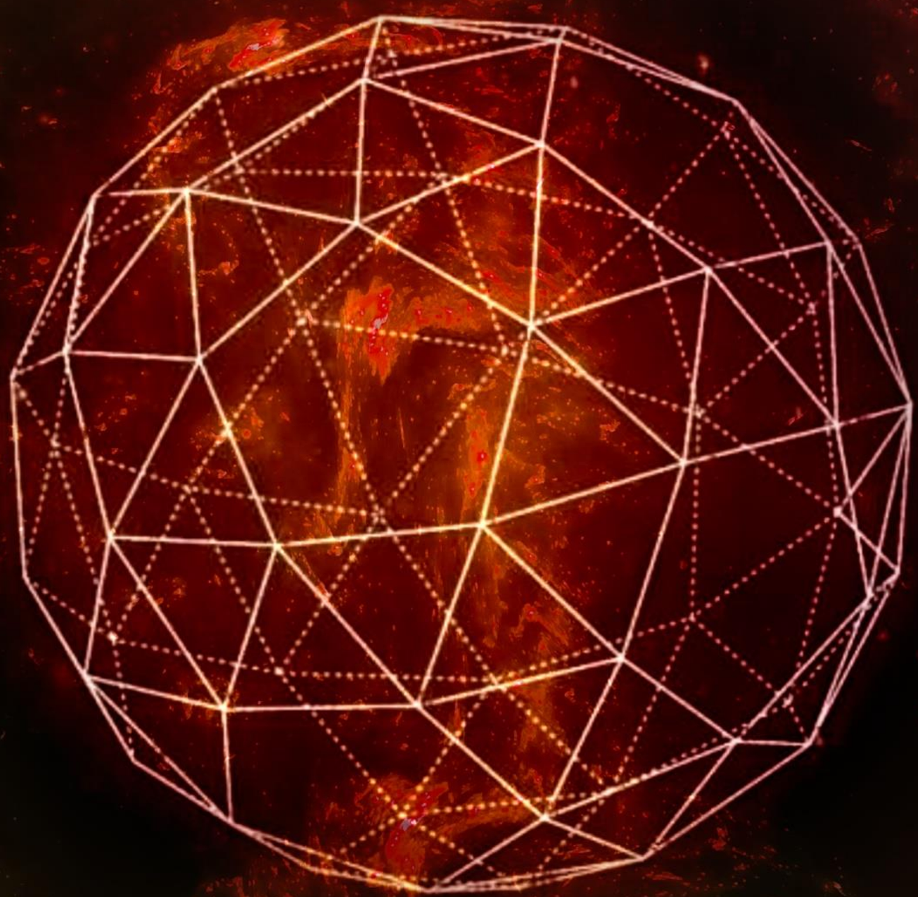


booklet phx #40

Meta-matika

part III

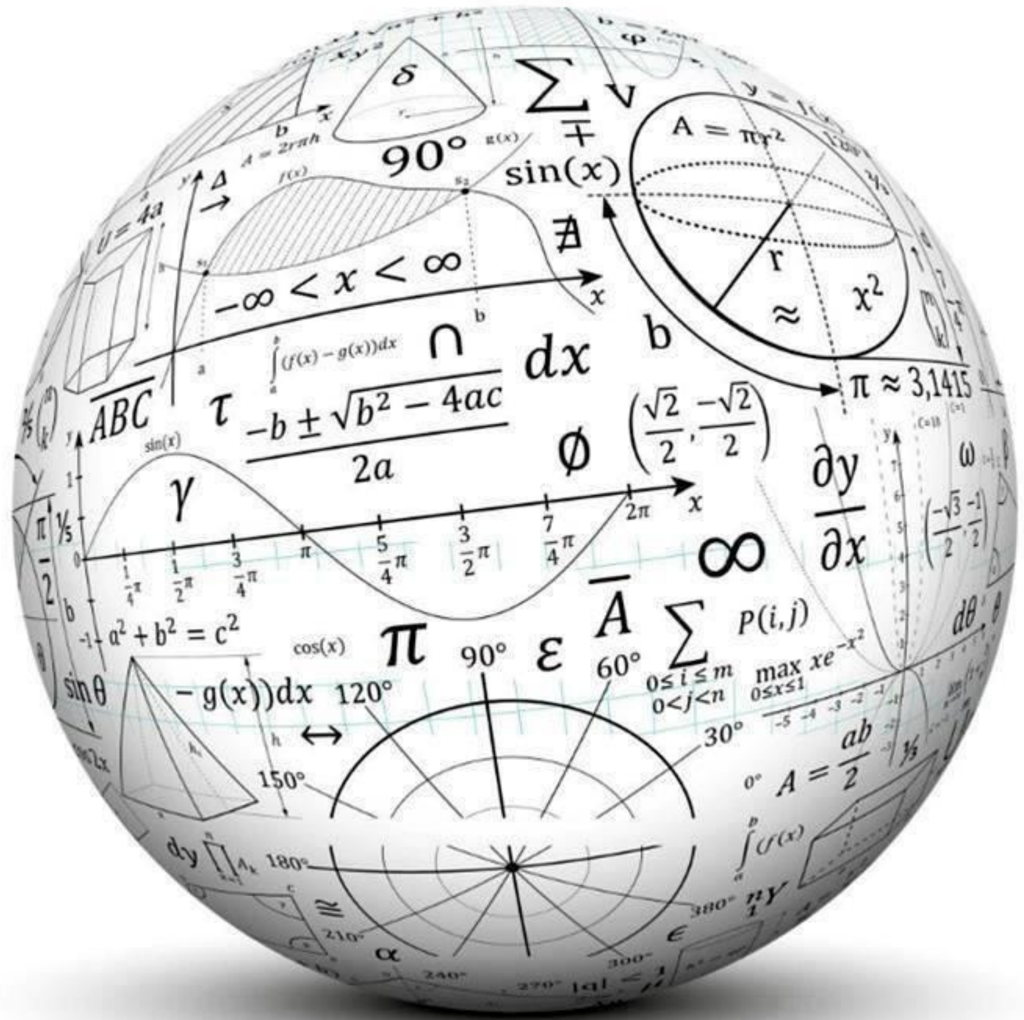
Booklet Seri 40

Metamatika III

Oleh: Phoenix

Semakin dalam matematika dijelajahi semakin seakan tidak ada batas dan ujungnya. Apa yang dijelajahi juga sebenarnya pun tidak dapat diputuskan eksistensinya. Ibarat menjelajahi pikiran sendiri, sukar menentukan yang mana imajinasi dan yang mana memori, yang mana angan-angan dan yang mana kenyataan. Matematika lebih seperti bahasa, yang digunakan, tapi tidak benar-benar ada. Atau, kalaupun ada, yang jelas bukan secara fisik, namun hanya dalam dunia abstrak platonic entah dimana. Bak menelusuri semesta, semakin jauh pencarian semakin banyak hal mengejutkan, kalau tidak bisa disebut memusingkan.

(PHX)

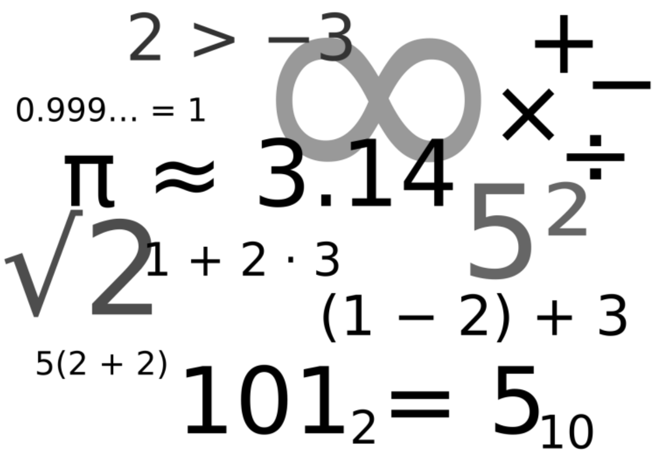

90°
sin(x)
A = πr²
−∞ < x < ∞
r
≈
x²
dx
b
π ≈ 3,1415
ABC
τ
−b ± √b² − 4ac
2a
∅
∂y
∂x
γ
2π
x
∞
a² + b² = c²
cos(x)
π
90°
ε
Ā
60°
P(i,j)
max xe
sinθ
− g(x))dx
120°
30°
150°
A = ab/2
180°
α

Teruntuk

Semua mahasiswa matematika di seluruh Indonesia,

Dan siapapun yang mengagumi keindahan angka

Daftar Konten



Matematika dan Krisis Rasionalitas

Kata rasionalitas bukan hal yang asing di telinga. Apalagi, ia bahkan menjadi simbol yang merepresentasikan intelektualitas, kedewasaan, atau bahkan hal semendasar derajat manusia. Ya, rasionalitas dianggap hal yang sangat membedakan manusia dengan makhluk hidup lainnya, karena manusia dikatakan bertindak berdasarkan rasio, bukan sekadar hasrat fisiologis atau insting bertahan hidup. Dalam beberapa konteks, terutama di dunia ilmu pengetahuan, bahkan rasionalitas bagaikan kredo luhur yang tidak boleh diganggu gugat, yang tanpanya tidak ada benar-salah yang bisa disematkan. Rasionalitas adalah kebanggaan manusia modern.

Akan tetapi, apakah memang rasionalitas seagung itu? Ratusan tahun perjalanan panjang modernitas sebagai entitas yang dibangun olehnya pada akhirnya mulai harus menemui kebuntuan, atau bahkan jurang kejatuhan, sejak awal abad ke-20. Uniknya, keruntuhan itu seakan merupakan orkestra besar yang tidak hanya melibatkan satu-dua entitas, namun berbagai komponen dan sector dari modernitas itu sendiri. Namun, apakah semua itu hanya terjadi pada bangunannya, atau justru fondasinya sendiri, rasionalitas itu sendiri, turut retak bersamanya?

Perjalanan mencari kemutlakan

Rasionalitas memang bukan hal yang baru karena pada dasarnya rasionalitas ada selama manusia berpikir, namun kapan ia mendapatkan posisinya di peradaban belum lah lama. Rasionalitas baru mulai mewujud secara sederhana ketika filsafat Yunani klasik tumbuh pada abad ke-5 sebelum masehi. Pada titik itu, penolakan terhadap mitos dan kepercayaan melalui observasi lebih mendalam pada hal fisis maupun metafisis mulai dilakukan. Masa itu tidak berlangsung lama, karena Ketika romawi mulai menguasai Yunani, pertumbuhan filsafat ini terhenti. Namun, warisan yang ditinggalkan sangatlah berpengaruh, hampir di semua peradaban. Ketika peradaban islam mulai tumbuh pada abad ke-6 masehi, karya lama yang tenggelam ini mulai diangkat kembali melalui proses penerjemahan, penafsiran, dan adaptasi ulang dengan menyesuaikan prinsip-prinsip Islam. Hal ini membuat perkembangan ilmu pengetahuan pada masa itu tetap terkendali meskipun berkembang sangat pesat. Satu milenia kemudian, peradaban barat turut mengikuti jejak yang sama namun dengan semangat yang sama sekali berbeda. Ya, pada abad ke-16 peradaban barat menghidupkan kembali khazanah filsafat Yunani dan kemudian mengawali sebuah era yang dikenal sebagai *Aufklarung* (pencerahan).

Era ini terinisiasi dengan adanya *Renaissance* yang berawal dari bidang seni hingga menyenggol wilayah pemikiran. Berbeda dengan peradaban Islam, dimana agama menjadi pendukung berkembangnya ilmu, yang terjadi pada peradaban barat justru terjadi sebaliknya. Kekuasaan gereja, sebagai otoritas keagamaan terbesar di Eropa kala itu, digugat, baik secara material, pemikiran, hingga kuasa religi. Era pencerahan pun menandai lahirnya suatu konsep penting yang masih ada hingga saat ini: modernitas. Ciri khas dari modernitas adalah refleksi besar-besaran terhadap apa yang ada pada era sebelumnya. Refleksi ini terjadi secara menyeluruh pada semua bidang, menciptakan "pembaharuan" atas segala konsep yang diyakini sebelumnya. Rene Descartes (1596-1650), sosok yang dianggap sebagai "bapak filsafat modern", menginisiasi cara berpikir 'modern' yang ditandai dengan *radical skepticism* atau keragu-raguan radikal. Secara sederhana, sikap ini menanggap bahwa segala sesuatu hanyalah tipuan, dan bahwa segala sesuatu harus diragukan kecuali bisa dipahami secara jelas. Sikap ini memulai sebuah perjalanan untuk mencari ulang kebenaran yang "sesungguhnya", karena dianggap kebenaran yang dipegang pada masa itu sudah banyak terkontaminasi oleh hal-hal yang tidak rasional.

Perjalanan ini berkembang kemana-mana, ke hampir semua sektor ilmu. Dengan berbekal rasionalitas yang dimurnikan dan empirisme yang dibakukan, ilmu pengetahuan berkembang pesat dengan lebih menyeluruh dan fundamental. Mencari kebenaran yang lengkap, mutlak, dan tunggal menjadi impian terbesar. Bahkan Ketika fisika klasik mulai mapan pada abad ke-17, impian ini berbuah pada determinisme dimana para saintis mulai sangat yakin bahwa seluruh semesta ini bisa diprediksi masa depannya selama diketahui kondisi awalnya.

Untuk mencari system kebenaran selengkap mungkin, maka sudah tentu penggalian sedalam mungkin ke fondasi adalah langkah paling tepat. Ketika dasar ilmu pengetahuan dapat dicapai, maka semua yang berada di atasnya bisa dirumuskan dengan mudah. Oleh karena itu perjalanan menggali ke dasar menjadi *zeitgeist* perkembangan ilmu pengetahuan. Di biologi, pencarian atas unsur terdasar kehidupan dilakukan. Di fisika, pencarian atas elemen terkecil penyusun materi dilakukan. Di kosmologi, sebab pertama alam semesta dieksplorasi. Di kimia, unsur-unsur paling dasar setiap zat didata dan dipetakan. Ketika hal-hal mendasar itu berhasil di rumuskan, maka dengan itu ilmu pengetahuan akan lebih mudah terpetakan dan dikembangkan. Meskipun usaha-usaha mencari "dasar" ini terlihat menjanjikan, pada akhirnya pertanyaan-pertanyaan yang bersifat ultima dan semi-metafisis seperti "elemen terdasar" bukanlah pertanyaan yang bisa memiliki pemberhentian. Misal, kita tahu segala sesuatu tersusun atas atom, dan atom terdiri atas electron dan inti (nucleus). Inti atom sendiri tersusun atas proton dan neutron. Ditemukan kemudian bahwa proton dan neutron sendiri terdiri atas elemen yang lebih dasar yakni quark. Lebih jauh lagi, quark sendiri merupakan manifestasi dari fluktuasi medan kuantum. Bahkan dalam teori string, semua partikel elementer, termasuk quark, tersusun atas *string* yang berosilasi di dimensi yang lebih tinggi. Kita akan terus bisa bertanya, lantas *string* ini tersusun atas apa? Pertanyaan ini akan bisa terus terajukan tanpa henti, namun kita tidak akan bahas ke sana, karena di tempat lain ada masalah yang lebih serius.

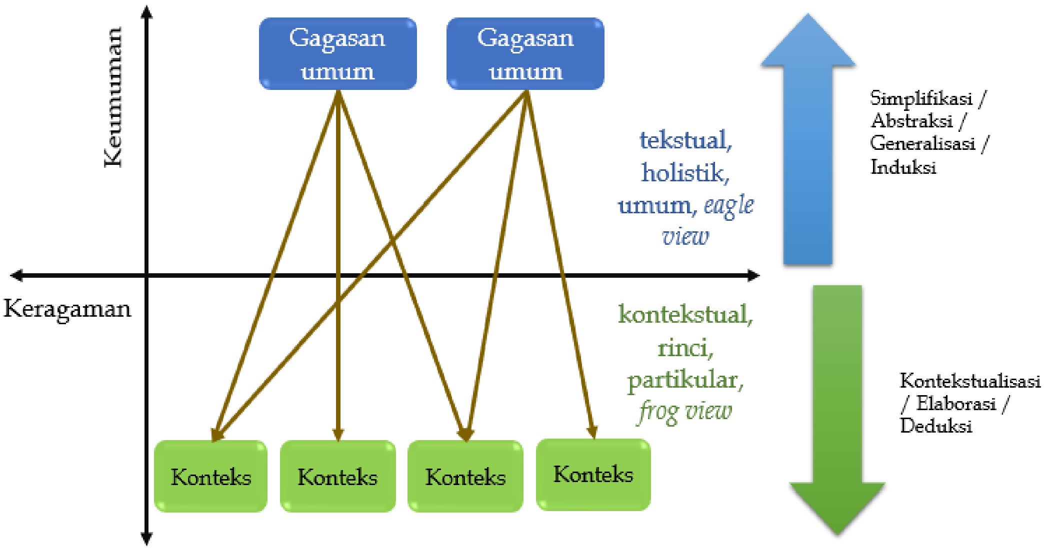
Sayangnya, semua ilmu di atas adalah ilmu-ilmu “riil”, dalam artian terkorelasikan dengan suatu wujud nyata pada realita (empiris), sehingga mencari sesuatu terkecil atau terdasar adalah sebuah usaha yang jelas. Bagaimana dengan hal yang tidak terkait dengan realita seperti rasionalitas? Apakah ada dasar dari rasionalitas itu sendiri? Bagaimana mungkin kita tahu yang mana rasional mana yang tidak bila kita sendiri tidak paham dasar dari rasionalitas?

Bentuk terideal rasionalitas

Rasionalitas tidak lebih dari suatu konsep yang melihat keterkaitan antara suatu hal dengan alasan (*reason*) yang membersamai atau menyertainya. Hal ini secara tidak langsung memang mengimplikasikan bahwa konsep rasionalitas secara khusus hanya dimiliki manusia karena hanya manusia yang bisa memberikan alasan atas apa yang ada pada dirinya, baik itu lisan, tindakan, atau bahkan sekadar keyakinan. Namun, kata “alasan” sendiri bukanlah hal yang mudah untuk dimaknai atau didefinisikan. Ia merupakan konsep yang luas dan longgar, karena ia bisa berbentuk apapun dan bersumber darimanapun. Terlepas dari itu, alasan harus punya atribut yang tetap, yakni bahwa ia harus bisa menjustifikasi hal yang ia sertai, dan proses justifikasi ini yang kemudian memiliki standar yang lebih kuat, yakni logika.

Logika pada dasarnya bahkan bertindak lebih dari itu. Logika bisa mendobrak alasan sendiri untuk memastikan bahwa alasan itu cukup kuat untuk menjadi landasan. Dengan kata lain, logika memastikan proses justifikasi yang dilakukan berada pada alur yang paling tepat, dan dengan itu membantu mencari basis alasan yang lebih kuat. Sehingga, memang bisa dikatakan bahwa rasionalitas tidak lebih dari proses justifikasi berdsaarkan logika yang rigid dan objektif.

Ketika logika berusaha untuk membongkar atau menggali sumber alasan yang lebih kuat, maka prosesnya bisa dikatakan sebuah proses abstraksi. Sebaliknya, ketika logika menyediakan jalur dari sumber alasan ke suatu pernyataan akhir, maka prosesnya bisa dikatakan sebagai sebuah proses deduksi atau kontekstualisasi. Konsep ini berlaku secara umum, karena pada dasarnya semakin mendasar suatu alasan, semakin abstrak dan umum ia.



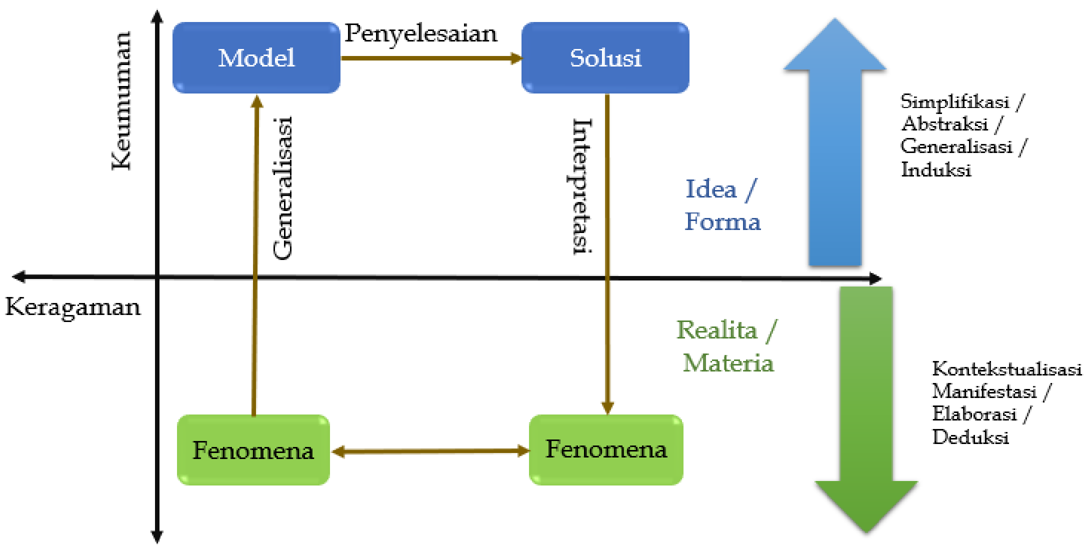
Rasionalitas pada hakikatnya adalah bagaimana akal manusia bergerak secara lincah dengan jalur yang rigid antara dunia abstrak dan dunia konteks. Kita bisa katakan suatu hal itu rasional atau tidak, jika terdapat suatu alasan mendasar yang kuat yang bisa memberikan penjelasan secara logis akan hal tersebut. Dalam riilnya, tentu semua proses ini melibatkan informasi empiris, asumsi-asumsi, keyakinan, stigma lingkungan, dan sebagainya. Namun, jika kita secara murni melihat rasionalitas itu hanya sebagai sebuah konsep, atau prinsip, maka ia hanya melibatkan satu hal, yakni logika.

Logika punya banyak bentuk, namun sebagaimana rasionalitas, ia memiliki bentuk termurni, yang sering disebut sebagai logika formal. Logika dalam bentuk formal secara ketat menentukan atribut benar-salah dalam suatu pernyataan melalui aturan-aturan standar. Dalam khazanah pengetahuan, ilmu yang secara murni menggunakan logika adalah matematika, sehingga sering dikatakan matematika adalah ilmu paling rasional, atau bahkan, matematika adalah bentuk terideal rasionalitas. Matematika bahkan secara khusus, untuk memastikan objektivitas dan kemurnian dari keabsahan logika itu sendiri, menggunakan logika secara simbolik, sehingga tidak ada ambiguitas pemaknaan ataupun interpretasi.

Esensi Matematika

Matematika merupakan ilmu yang cukup sukar didefinisikan, karena cakupannya sangat luas dan ciri-cirinya relatif longgar. Matematika secara awam bisa dipahami sebagai ilmu untuk berhitung. Sederhananya, selama ada angka, maka disitu ada matematika. Itu tidak salah, namun pada dasarnya, berhitung hanyalah satu tingkat dari beragam tingkat keabstrakan yang terkandung dalam khazanah matematika. Maksudnya apa? Ketika seorang anak TK menghitung 2 apel ditambah 2 apel sama dengan 4 apel, maka apakah ia harus harus selalu memahami perhitungan tersebut untuk setiap benda? Itulah kemudian pada tingkat berikutnya dilakukan abstraksi sehingga objek tidaklah penting, bahwa 2+2=4, apapun objek yang disematkan padanya. Abstraksi kemudian dapat dilanjutkan untuk objek yang beragam, dengan selalu menjadikan aturan dasarnya tetap hanya berlaku pada satu objek yang sama, sehingga ketika ada apel dan mangga, maka 2 apel + 3 mangga + 1 apel + 5 mangga adalah (2+1) apel + (5+3) mangga = (3) apel + (8) mangga. Abstraksi ini dapat berlanjut terus sampai akhirnya berkembang konsep persamaan linear, matriks, dan aljabar.

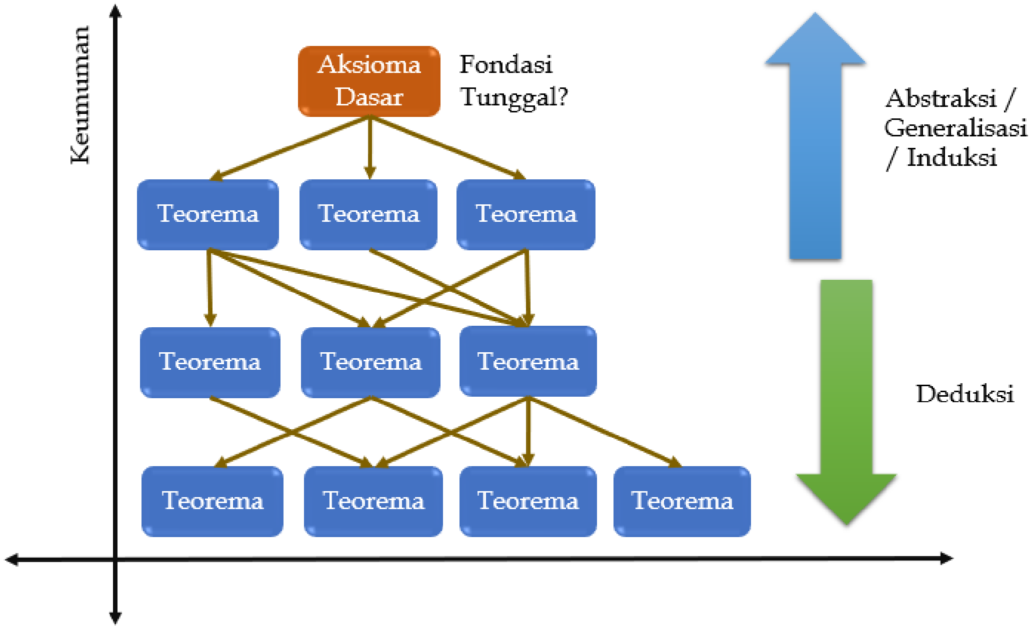
Hal yang sama berlaku untuk semua konsep-konsep lainnya, seperti geometri, kalkulus, statistika dan sebagainya, dimana bermula dari hal-hal riil dan kemudian diabstraksi menjadi konsep yang lebih umum. Melalui konsep yang lebih umum, proses balikannya dapat dilakukan untuk memberi justifikasi terhadap berbagai keabsahan perhitungan-perhitungan riil, dan bahkan memberi solusi pada masalah riil baru yang lebih luas.



Dengan proses terjadi dua arah tersebut matematika berkembang luas. Di wilayah teoretis, abstraksi tiada henti dilakukan untuk mencapai titik terdalam, terinti, terdasar dari matematika. Di wilayah aplikatif, implementasi terus dilakukan untuk terus menghasilkan berbagai solusi-solusi beragam dari berbagai permasalahan riil yang variatif. Semua proses ini dilakukan hanya dengan menggunakan satu set prinsip, yakni logika, bahkan dalam bentuk yang sangat ketat.

Proses ini merupakan proses standar penggunaan rasionalitas dalam pengembangan ilmu pengetahuan. Akan tetapi, kebanyakan ilmu memiliki prosedur tambahan, yakni metode ilmiah yang bersifat empiris. Pengetahuan empiris bersifat induktif ketimbang logika yang bersifat deduktif. Namun, bisa dikatakan matematika dalam hal ini merupakan bentuk paling murni dari rasionalitas. Kenapa paling murni?

Matematika selalu berhasil mengisolasi konsep-konsep abstrak dari pengaruh realita sebersih mungkin, sehingga segala kemungkinan bias tertutup rapat. Hal ini tidak selalu bisa dilakukan pada khazanah pengetahuan lain, dimana terkadang logika tidak dapat kabur sepenuhnya dari bias-bias kognitif. Bahkan, dalam bentuk paling abstraknya, matematika itu sendiri berusaha membongkar dan menyusun ulang logika, tentu saja secara simbolik. Cabang matematika yang secara spesifik meneliti "model logika" dikenal sebagai teori model.



Krisis Fondasi matematika

Sekarang mungkin baru kita bisa bertanya, jika matematika bisa merepresentasikan bentuk termurni dari rasionalitas, apa landasan dari matematika itu sendiri? Menjawab pertanyaan ini tidak semudah menjawab apa unsur penyusun materi sebagaimana sains, ataupun menjawab apa dasar dari makhluk hidup, karena objek matematika bahkan tidak nyata, abstrak, dan bersifat gagasan ketimbang wujud konkrit. Pertanyaan ini sebenarnya mungkin memiliki jawaban sederhana bagi kebanyakan matematikawan: yakni bahwa landasan dari matematika adalah logika. Hanya murni dengan logika matematika berkembang, tanpa butuh eksperimen, pengamatan, ataupun verifikasi empiris. Tapi tidakkah kemudian kita bisa bertanya, apa landasan dari logika itu sendiri? Terlebih lagi, logika pada dasarnya adalah aturan-aturan, ia tidak merepresentasikan suatu entitas, sama halnya bahwa teori mekanika kuantum ataupun teori realtivitas bukanlah entitas dasar semesta. Pertanyaan mengenai fondasi matematika mulai mengganggu sebagian matematikawan pada akhir abad ke-18. Banyak mulai menggali, mengeksplorasi, dan merumuskan apa yang sebenarnya menjadi landasan matematika.

Dalam proses penggalian ini, matematikawan pada masa itu terbelah menjadi 3 kelompok pemikiran, yakni logisisme, intusionisme, dan formalisme. Detail perbedaan 3 pemikiran tersebut tidak akan penulis bahas detail, karena perbedaannya bisa dikatakan terlalu abstrak untuk masuk dalam cakupan tulisan ini. Apa yang penulis jelaskan setelah ini merupakan simplifikasi dan rangkuman dari 3 pemikiran tersebut.

Matematika sendiri pada dasarnya tersusun atas teorema dan definisi. Tidak lebih. Definisi sendiri sebenarnya pun bisa dianggap sebagai teorema, namun untuk kali ini kita bedakan ia. Apabila terlalu abstrak, maka untuk memudahkan, teorema bisa dibayangkan sebagai kaidah yang sudah terbukti kebenarannya. Contoh yang paling terkenal adalah teorema Phytagoras, teorema yang menyatakan bahwa kuadrat panjang sisi miring suatu segitiga siku-siku adalah jumlah dari kuadrat dua sisi lainnya. Teorema ini telah dibuktikan melalui prinsip logika yang sahih dan dengan itu dianggap sebagai suatu kebenaran. Banyak contoh teorema lainnya, seperti teorema dasar aljabar atau teorema ketidakrasionalan akar dua, dan lain sebagainya. Tentu saja teorema ini dalam bentuk formalnya tidak dikenal secara awam, namun setiap teorema pada dasarnya memiliki bentuk formal simbolik yang mudah dimanipulasi dengan logika.

Suatu teorema dibuktikan dari teorema-teorema lainnya yang telah dibuktikan kebenarannya. Hal ini karena logika memang hanya media, alat, katalis, yang selalu butuh masukan untuk bisa menghasilkan suatu atribusi kebenaran. Kita tidak bisa serta merta langsung membuktikan suatu pernyataan benar atau tidak tanpa menggunakan pernyataan lain yang memang sudah diketahui kebenarannya. Sebagai contoh, kita bisa katakan bahwa "Soekarno bernapas ketika hidup" adalah pernyataan yang benar karena kita bisa simpulkan dari pernyataan lainnya, yakni "Soekarno adalah manusia" dan "setiap manusia bernapas ketika hidup". Kita pun bisa memandang bahwa logika tidak lain merupakan cara untuk menyimpulkan.

Bangunan matematika kemudian bisa dipandang sebagai rantai, atau bahkan jejaring, teorema yang dirajut oleh benang-benang logika. Setiap teorema ini bisa saling dikombinasikan untuk menghasilkan teorema lain. Akan tetapi kemudian muncul pertanyaan, tentu rantai ini tidak akan memanjang tanpa batas, maka dimana kah ujung atau titik awalnya? Titik awal ini berarti merupakan pernyataan yang sudah memiliki atribut benar tanpa harus dibuktikan. Dalam matematika, pernyataan-pernyataan seperti ini disebut sebagai aksioma. Perjalanan para matematikawan pada akhir abad ke-18 untuk mencari fondasi pada dasarnya merupakan perjalanan merumuskan suatu sistem aksioma. Disebut sistem karena berisi beberapa aksioma dasar. Karena sistem aksioma ini akan menjadi dasar atau fondasi seluruh bangunan teorema matematika, maka ia tentu harus lengkap dan konsisten. Lengkap dalam artian setiap teorema matematika harus bisa ditarik mundur ke salah satu aksioma tersebut, tidak ada yang terlewat. Semua teorema harus tercakup dalam satu fondasi yang sama. Jika ternyata kelak ditemukan suatu hal yang dianggap benar namun gagal dibuktikan dari sekumpulan aksioma tersebut, maka ada kemungkinan system tersebut tidak lengkap. Konsisten dalam artian bangunan matematika yang dibangunnya harus saling membenarkan satu sama lain, tanpa menemui kontradiksi. Dengan kata lain, misal suatu teorema dapat dibuktikan dengan beberapa aksioma. Jika ternyata menggunakan beberapa aksioma lainnya dari sistem yang sama justru menafikan teorema tersebut, maka dikatakan sistem tersebut tidak konsisten.

Sudah banyak formulasi aksiomatik yang telah dirumuskan oleh berbagai matematikawan. Salah satu yang terkenal adalah aksioma ZFC (Zermelo-Frankel with Choice) yang berisi 9 aksioma dasar dengan berpegang pada konsep himpunan. ZFC memandang bahwa segala objek matematika harus berasal dari himpunan. Sedangkan himpunan sendiri dianggap sebagai objek *as it is*, yang tidak perlu didefinisikan lagi. Selain itu banyak lagi system aksiomatik lainnya.

Akan tetapi, beberapa aksioma seperti ZFC sudah dianggap sebagai bagian dari logika apa adanya. Artinya, logika sudah secara inheren menjadi bagian dari system. Dalam level yang lebih abstrak lagi, logika itu sendiri harus dicari juga akar aksiomanya. Artinya, kaidah logika seperti silogisme (jika p maka q dan jika q maka r, maka jika p maka r) juga merupakan teorema yang harus dibuktikan kebenarannya. Maka dari itu, muncul juga istilah aksioma logika, yakni aksioma-aksioma yang menjadi dasar untuk membangun kaidah logika lainnya.

Aksioma dasar matematika tidak lah unik. Selain ZFC, terdapat beberapa system aksioma lainnya yang telah dirumuskan bisa digunakan untuk membangun matematika. Hal ini memungkinkan karena yang dibutuhkan dalam suatu system sebenarnya hanyalah konsistensi. Implikasinya, pluraritas fondasi bukanlah hal yang mustahil. Matematika tidak punya dasar tunggal, karena apapun bisa dikonstruksi untuk menjadi sebuah bangunan matematika yang sama selama ia konsisten. Matematika secara fundamental relatif, tidak pernah absolut. Satu-satunya kemutlakan yang dimiliki matematika hanyalah konsistensi itu sendiri.

Tidak dapat ditemukannya suatu fondasi yang tunggal dan tetap dikenal sebagai *foundational crisis of mathematics*. Awal mula istilah ini lahir dari perbedaan pendapat antara logisis, intuisionis, dan formalis. Yang kemudian pada akhirnya ketiganya menemui tembok kegagalan yang sama sehingga pada akhirnya krisis ini tetap tidak memiliki solusi. Tidak ada yang menyukai fakta bahwa system matematika tidak punya landasan tunggal, namun tidak banyak yang bisa dilakukan, sehingga banyak yang membiarkan itu sebagai aib di bawah tanah yang tidak akan mempengaruhi bagaimana matematika dapat bermanfaat untuk banyak hal. Ketika ketiga pemikiran mengenai fondasi matematika tersebut masih sibuk berdebat, muncul lagi masalah lain yang dating dari arah yang tak terduga, memberi hantaman ultimat kepada semua usaha untuk mencari fondasi matematika.

Ketidaklengkapan

Beberapa usaha mencari fondasi matematika sempat menemui banyak harapan dengan dirumuskannya beberapa system aksioma yang menjanjikan seperti Principia Matematica atau ZFC. Namun semua harapan itu sirna dengan datangnya Godel bersama 2 teoremanya. Godel, atau lengkapnya, Kurt Godel, merupakan seorang matematikawan Austria yang pada tahun 1931 mempublikasikan makalah yang cukup mengguncang para matematikawan saat itu, minimal para matematikawan fondasi. Makalah yang ia publikasikan berisi 2 teorema yang dikenal sebagai Teorema Ketidaklengkapan Godel (*Godel's Incompleteness Theorem*). Meskipun namanya teorema ketidaklengkapan, pada dasarnya teorema ini juga berbicara mengenai inkonsistensi. Apa yang membuat teorema ini begitu fenoemnal?

Pada bagian sebelumnya telah kita bahas mengenai bahwa aksioma dasar yang membangun suatu sistem matematika (yang diharapkan) haruslah memenuhi dua kriteria, yakni lengkap dan konsisten. Lengkap berarti mencakup seluruh pernyataan atau teorema yang beratribut benar dapat dibuktikan di dalam system tersebut. Konsisten berarti setiap pernyataan atau teorema tidak saling kontradiksi di dalam system tersebut. Ketika pencarian atas aksioma dasar ini menjadi tren, dua hal ini menjadi focus utama. Sayang, Godel merusak semuanya melalui dua teoremanya.

Teorema yang pertama mengatakan bahwa suatu system matematika yang aksiomatik, tidak akan pernah bisa lengkap dan konsisten sekaligus. Jika ia lengkap, maka mustahil ia konsisten. Jika ia konsisten maka mustahil ia lengkap. Satu teorema ini saja cukup menyakitkan! Artinya sudah pupus setiap harapan matematikawan untuk menemukan suatu aksioma dasar yang lengkap dan konsisten. Hal ini disempurnakan lagi dengan teoremanya yang kedua, yang mengatakan bahwa suatu system aksiomatik tidak akan pernah bisa membuktikan konsistensi dirinya sendiri. Artinya, untuk bisa membuktikan apakah suatu system itu konsisten atau tidak, maka kita butuh "melihat" dari system lain. Sebagaimana seseorang tidak bisa mengatakan apakah ada noda hitam di wajahnya tanpa melalui sesuatu di luar dirinya sendiri, entah orang lain yang melihatkannya atau menggunakan cermin.

Bila dilihat seksama, pada dasarnya teorema kedua ini mengambarkan secara langsung bagaimana teorema pertama bekerja. Untuk mengatakan suatu system itu konsisten, kita tentu harus membuktikannya. Teorema kedua mengatakan hal itu tidak bisa dilakukan dengan system itu sendiri, sehingga pasti butuh aksioma lain atau teorema lain di luar system untuk bisa membuktikan konsistensi dari system tersebut. Padahal, adanya teorema lain di luar system sudah jelas menunjukkan bahwa system itu tidaklah lengkap, karena lengkap berarti seluruh teorema haruslah berada dalam system.

Implikasi dari teori ini sebenarnya sederhana, namun merobek sebuah lubang besar dalam fondasi ilmu pengetahuan, karena teori ini akan mengatakan bahwa matematika tidak akan pernah bisa menjadi perangkat yang rigid dan lengkap. Ia menjadi fondasi yang berlubang dan instrumen yang rapuh. Lantas, bagaimana? Jika ini memang 'benar', maka hampir semua bangunan sains akan roboh, karena disambing eksperimentasi, matematika adalah salah satu fondasi terkuat sains. Terlebih lagi, sebagaimana disinggung sebelumnya, matematika adalah bentuk termurni dari rasionalitas, dimana logika terutilisasi secara total tanpa intervensi. Lantas, apa artinya semua ini pada rasionalitas itu sendiri?

Implikasi pada rasionalitas

Apa yang ada di fondasi matematika seakan seperti hanya keributan kecil segelintir orang. Sampai detik ini pun tidak banyak yang peduli dengan hal seperti itu. Di sisi lain memang teorema Godel termasuk rumit, bahkan bagi matematikawan sendiri. Godel adalah Einstein-nya matematika, dan sebagaimana memahami relativitas umum secara utuh bukan hal yang mudah dilakukan bahkan bagi fisikawan sendiri, maka demikian jug ahalnya dengan teorema Godel. Hal ini sedikit ironis, karena pada dasarnya apa yang terjadi pada fondasi matematika mencerminkan banyak hal pada sifat alami sesungguhnya rasionalitas.

Mengingat alat yang digunakan sama, yakni logika, maka tidak ada alasan untuk tidak memandang bahwa mekanisme yang terjadi di matematika juga terjadi pada pengetahuan secara umum. Hanya ada satu perbedaan mendasar, bahwa seluruh pernyataan yang ada pada system kebenaran matematika, merupakan entitas yang terisolasi dari realita, yang tidak punya wujud selain gagasan itu sendiri. Secara praktikal, tentu saja banyak pernyataan yang justru hadir dari realita, dan mendapatkan atribut kebenarannya dari metode lain, yakni pengamatan empiris. Akan tetapi, hasil pengamatan empiris tetaplah objek yang sama bagi logika, sebuah pernyataan yang memiliki atribut kebenaran. Jika kita masukkan semua hasil pengamatan empiris dalam suatu system, maka kita akan miliki suatu system kebenaran sebagaimana system aksiomatis matematika. Perbedaan kedua system tersebut adalah system keberanan yang riil tidak hanya bersumber dari sekumpulan aksioma sebagai titik awal berangkat berlogika, namun juga realita itu sendiri.

Tentu empirisme sendiri punya banyak masalah, yang rinciannya di luar cakupan tulisan ini. Maka di sini kita asumsikan semua fakta empiris sudah pasti benar. Bagaimana pegetahuan berkembang berikutnya adalah bagaimana kita menggunakan rasionalitas untuk mengombinasikan semua fakta-fakta empiris tersebut menjadi sebuah system kebenaran. Apakah fakta empiris cukup? Tentu tidak. Akan selalu ada hal-hal yang tidak dapat dibuktikan secara langsung oleh fakta empiris. Maka dari itu, generalisasi dan abstraksi sering juga dilakukan sebagaimana di matematika, untuk mendapatkan hukum dan teori yang bisa menurunkan kebenaran-kebenaran baru secara lebih umum. Sebagaimana teorema matematika, proses abstraksi ini harus berujung pada suatu titik. Jika dalam matematika kita menyebutnya aksioma, maka dalam konteks riil, ia lebih dikenal sebagai asumsi metafisis atau keyakinan awal. Penulis sebut asumsi metafisis karena ia asumsi primitif yang diluar realita fisis. Apapun namanya, ia adalah sekeolompok pernyataan yang telah diyakini benar tanpa perlu dibuktikan lagi dengan cara apapun.

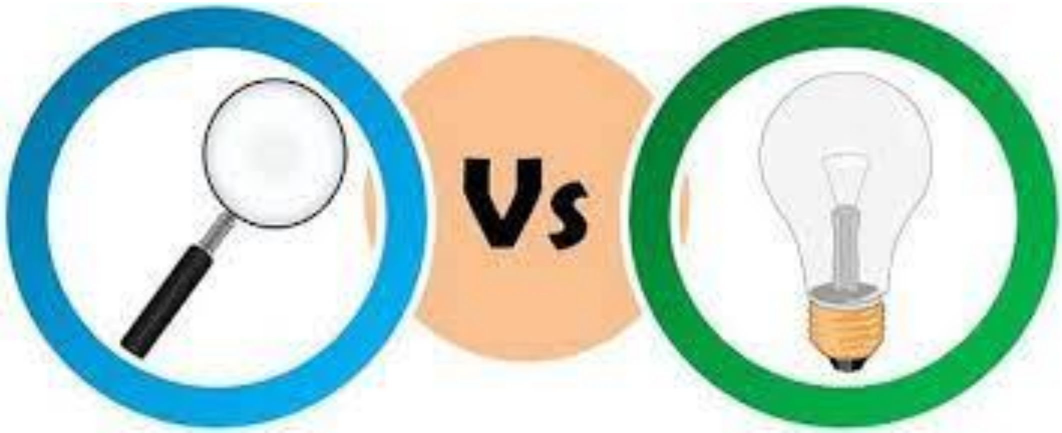
Asumsi metafisis ini bisa berbentuk apapun, bisa berupa apapun, sebagaimana matematika bisa dibangun dengan aksioma dasar apapun, selama memenuhi satu syarat penting: konsisten. Siapapun bisa memulai membangun system kebenaran dengan asumsi apapun yang ia gunakan di awal, selama kelak tidak ada kontradiksi yang ditemui. Sayangnya, asumsi ini tidak akan pernah bisa dihindari. Rasionalitas hanya membantu pembuatan jalur, dan setiap jalur butuh titik awal, sedangkan tidak semua hal bisa diamati secara empiris.

Terlebih lagi, tidak ada alasan untuk tidak mengaplikasikan teorema Godel secara lebih umum. Objek dari teorema Godel adalah system apapun yang bisa ditulis secara formal. Dengan kata lain, secara universal kita tidak akan pernah bisa membangun system kebenaran yang lengkap dan konsisten sekaligus, dan juga setiap system kebenran itu pun tidak akan pernah bisa kita buktikan konsistensinya melalui dirinya sendiri. Rasionalitas tidak akan pernah menjadi alat tunggal yang cukup untuk membangun sebuah system kebenaran. Hal ini belum ditambah dengan krisis pada empirisme sendiri.

Selain itu, rasionalitas secara umum tidak pernah bisa serigid matematika. Dalam teori model, matematika membangun suatu model aksiomatik dengan bahasa yang didefinisikan sejelas mungkin, sehingga tidak ada celah kesalahan interpretasi. Bahkan interpretasi itu sendiri merupakan pemetaan/fungsi antara bahasa dan modelnya. Akan tetapi, hal sekaku ini tidak akan bisa diterapkan secara umum pada rasionalitas. Bahasa manusia sudah punya batasannya sendiri, bagaimana ia rentan terhadap bias, stigma, dan penafsiran. Ketika kita berpikir dalam konteks umum menggunakan rasio, maka sering banyak pernyataan-pernyataan tersembunyi yang turut mempengaruhi proses deduksi. Pernyataan tersembunyi ini bisa berupa asumsi metafisis ataupun interpretasi baru tehradap fakta empriris yang ada.

Tentu banyak sebenarnya masalah pada rasionalitas, yang bersama dengan krisis lainnya dalam system pengetahuan mengantarkan peradaban pada era posmodern, era yang menjadi anti-tesis atau kritik terhadap modernitas itu sendiri. Rasionalitas sebagai mahkota modernitas dituntut dan dikudeta atas kegagalannya menunjukkan kemajuan dari peradaban itu sendiri. Semua itu jelas merupakan akumulasi banyak factor, namun satu hal yang jelas, bahwa rasionalitas memang sedari awal memiliki lubang kelemahan.

(PHX)



Matematika, Antara Ciptaan dan Penemuan

Dalam perkembangan ilmu pengetahuan, khsusnecessary sains, penggunaan matematika semakin tidak bisa dilepaskan. Fenomena alam satu per satu dideskripsikan dengan persamaan-persamaan matematis. Dari kejadian makroskopis seperti terbentuknya bintang hingga hal mikroskopis seperti perilaku electron, semua dapat dideskripsikan dengan ketepatan yang begitu dekat. Begitu akuratnya matematika dapat menggambarkan dan merepresentasikan realita membuat kagum sekaligus bingung, mengingat matematika sendiri merupakan ilmu yang hanya berupa gagasan-gagasan terstruktur atas objek-objek abstrak. Dalam perkembangan sains itu sendiri, posisi matematika memang tak lebih dari sekedar alat yang digunakan secara efektif untuk memanipulasi dan mengeksplorasi secara rigid hukum-hukum, objek-objek, dan fenomena alam.

Dalam bentuk primitifnya pun, matematika tidak bisa lepas dari realita karena matematika itu sendiri masih merupakan representasi abstrak dari realita. Memang kemudian, dalam era modern, abstraksi yang dilakukan oleh matematika sudah semakin kabur dan jauh dari konsep-konsep di realita. Meskipun demikian, dalam penerapannya, matematika justru semakin handal dalam mengaproksimasi realita itu sendiri. Semua hal ini memunculkan pertanyaan yang akhir-akhir ini semakin marak di era modern, yakni apakah matematika itu diciptakan (invented) atau ditemukan (discovered)? Bila matematika itu diciptakan, kenapa ia bisa begitu efektif mendeskripsikan realita? Bila matematika itu ditemukan, kenapa ada begitu banyak konsep-konsep matematis abstrak yang tidak punya hubungan sama sekali dengan realita? Selain itu, apa yang ditemukan dari matematika? Pertanyaan ini terkesan dilematis dan pada akhirnya memberi misteri tersendiri, sehingga jawabannya pun beragam. Kita perlu melihat lebih dalam dari pertanyaan ini sendiri untuk memahami semua kemungkinan jawabannya.

Akar Misteri

Matematika bukan ilmu yang mudah didefinisikan. Garis batas atau demarkasi dari keilmuan matematika sangat kabur, apalagi pada wilayah-wilayah aplikatif. Di era modern, ruang lingkup keilmuan matematika sudah sangat luas dan rumit, merentang dari yang sangat abstrak dan fundamental seperti teori model dan teori himpunan, hingga ke yang konkrit dan terapan seperti sistem dinamik dan optimisasi. Terlebih lagi, objeknya pun beragam, dari yang konkrit seperti bentuk-bentuk geometeri Euklides, hingga yang abstrak seperti ruang topologi. Mengingat luasnya ilmu ini, terkadang seseorang bisa bias ketika berada di dalamnya dan seringkali melihat hanya pada satu persepektif. Hal ini bisa dilihat dari bagaimana matematikawan terbagi ke dua tipe besar, dari bagaimana ia bermatematika itu sendiri.

Ada matematikawan yang begitu senang dengan hal-hal abstrak, terpesona dengan beragam misteri dan teka-teki yang mengasah logika. Bermatematika hanya menjadi seperti seni, yang mana dilakukan hanya karena memang itu menyenangkan dan bisa dinikmati. Ibarat sekadar bermain tebak-tebakan atau mengisi sudoku, matematika hanya menjadi pemuas pikiran. Beragam teorema dibuktikan, konsep-konsep dibangun, pengandaian-pengandaian abstraksi terus dilakukan, namun tanpa ada orientasi untuk mengaitkan dengan realita. Setiap kali suatu teorema dibuktikan, pengandaian berikutnya akan terus menjadi teka-teki baru. Sebagai contoh, ketika himpunan bilangan riil dibuktikan lebih besar dari himpunan bilangan asli, maka segera muncul pertanyaan berikutnya, yakni apakah ada himpunan yang lebih besar dari bilangan asli namun lebih kecil dari bilangan riil. Pertanyaan yang kemudian dikenal sebagai *continuum hypothesis* ini salah satu contoh sederhana bagaimana kita selalu dapat terus mengajukan pertanyaan atas berbagai kemungkinan di dunia abstrak. Bahkan, bisa dikatakan, eksplorasi yang dilakukan bisa seakan tanpa batas karena tidak terbelenggu keterbatasan-keterbatasan empiris.

Matematika menjadi dunia tersendiri. Teori kategori, teori grup, teori modul, dan semacamnya. Kalaupun kelak kemudian ada salah satu aspek dari teori-teori yang berkembang itu menemukan aplikasinya di dunia nyata, itu hanya menjadi semacam *happy coincidence* yang memang tidak diniatkan. Akan tetapi, perlu dilihat bahwa bertemunya teorema dengan aplikasi ini proporsinya relative sedikit dibandingkan keseluruhan teori abstrak yang dikembangkan. Sebagian besar teorema di matematika murni belum punya korelasi pada realita. Beberapa matematikawan di wilayah abstrak ini terkadang juga memiliki keyakinan bahwa suatu saat, entah 10 tahun lagi, 30 tahun lagi, atau 100 tahun lagi, setiap teorema matematika pasti akan menemukan jalannya ke aplikasi riil. Abstraksi hanya butuh waktu untuk bisa terejawantah dalam representasi yang lebih konkrit.

Di sebrang yang lain, ada juga matematikawan yang bahkan menganggap matematika hanyalah alat untuk mengungkap realita. Bahkan, beberapa pandangan mengatakan bahwa matematika hanyalah cabang dari fisika, yang berarti matematika memang dikembangkan khusus untuk membantu ilmu-ilmu riil dalam mengungkap lebih banyak prediksi dan deskripsi terhadap fenomena alam. Matematika sendiri dalam sejarahnya banyak termotori oleh kebutuhan praktis dari ilmu lain, khususnya fisika, dimana banyak fenomena alam butuh diformulasikan dengan kompleksitas tertentu oleh matematika. Sebagai contoh, ilmu kalkulus berkembang dari kebutuhan Newton untuk memformulasi gerak benda, dimana konsep perubahan pada setiap waktu perlu didefinisikan secara rigid. Topik-topik di matematika seperti statistik, geometri diferensial, atau sistem dinamik berkembang dari tuntutan riil, sehingga dalam konteks ini matematika hanya seperti *toolbox* yang eksistensi dan kecanggihan alatnya bergantung keperluan. Karena itu, beberapa teknik dari matematika sendiri memang menyesuaikan masalah yang dihadapi penggunanya, bukan serta merta diterima apa adanya karena memang sebagai sesuatu yang sudah ada.

Bahwa kemudian matematika secara menakjubkan memperlihatkan keterhubungan banyak hal meski berkembang secara terpisah-pisah lebih disebabkan pada sifat inheren dari matematika itu sendiri, yakni harus konsisten. Matematika berkembang harus dalam alur deduksi yang valid, sehingga konsistensi dan ketertutupan menjadi prinsip yang terjaga di dalam matematika, sehingga bila kemudian berbagai topik di matematika, yang awalnya memang hanya kumpulan alat-alat, terhubung satu sama lain secara cantik, maka itu adalah sebuah implikasi logis.

Selain dua ekstrim di atas, tentu saja ada banyak tipe matematikawan lain yang semuanya bisa melihat matematika dengan cara yang berbeda. Ada yang kemudian melihat matematika secara particular bukan sebagai teka-teki ataupun sebagai alat, namun selayaknya semesta yang memang perlu diidentifikasi dan dieksplorasi. Ada juga yang kemudian melihat matematika bukan hanya sebagai alat untuk mengeksplorasi realita, namun sebagai cara untuk merepresentasikan realita itu sendiri, seperti barisan kode program komputer yang bisa mengonstruksi sebuah simulasi. Dalam sudut yang lain, matematika bahkan dipandang sebagai satu-satunya yang "riil" di semesta ini. Artinya, yang ada hanya bilangan dan teorema-teorema matematis, selebihnya hanya konsekuensi dan manifestasi dari itu.

Bagaimana matematika secara berbeda dipandang oleh orang yang berbeda ini menghasilkan cara pandang yang berbeda dari bagaimana melihat esensi dari matematika itu sendiri. Pertanyaan-pertanyaan filosofis terkait matematika, atau mungkin bisa disebut metamatematika, menjadi pertanyaan yang jawabannya sangat bergantung bagaimana matematika itu sendiri diposisikan. Termasuk juga pertanyaan terkait apakah matematika diciptakan atau ditemukan, pertanyaan seperti ini membutuhkan kejelasan dari definisi dan posisi matematika yang dipandang, mengingat matematika secara keseluruhan merupakan ilmu yang sangat luas.

Dikotomi Palsu

Pertanyaan mengenai apakah matematika diciptakan atau ditemukan mengandung ambiguitas terhadap jawaban yang diharapkan. Dalam hal ini, pertanyaan itu seakan mengimplikasikan pilihan yang eksklusif, artinya harus salah satu, dan menutup kemungkinan jawaban yang inklusif. Jika tidak diciptakan, maka ditemukan, atau sebaliknya. Padahal, mengingat aspek matematika begitu luas, jawabannya mungkin tidak bisa dipukul rata untuk keseluruhan bangunan raksasa matematika. Terlebih lagi, konsepsi terkait penciptaan (*invention*) dan penemuan (*discovery*) bukan sebuah hal yang bisa dikorelasikan secara langsung pada matematika, karena objek yang ditelitinya bukanlah entitas materiil.

Konsep invensi sering terkait dengan metodologi atau teknologi, yang dikembangkan, dirumuskan, dibangun, untuk mencapai suatu tujuan tertentu. Sehingga, apapun yang dikorelasikan dengan invensi akan serta merta diposisikan sebagai alat, yang memang secara spesifik terkait dengan suatu kebutuhan tertentu. Konsep penemuan, di sisi lain, terkait dengan sesuatu yang memang sudah "ada" di realita, yang kemudian dicari melalui suatu proses terentu dan berhasil ditemukan. Dari sini, yang disebut penemuan itu cenderung merupakan hal-hal yang memang berkorelasi langsung dengan realita, seperti fosil atau hukum-hukum alam. Keberadaannya bukan diakibatkan dari usaha manusia, namun sudah hadir di realita oleh akibat-akibat lainnya. Manusia hanya menemukan apa-adanya, tidak berkontribusi apapun atas keberadaannya. Kontras dengan invensi yang jelas keberadaannya diakibatkan oleh manusia.

Jika melihat dua konsep ini, maka akan sangat sulit menentukan ilmu seperti matematika pada keduanya. Yang paling mungkin untuk berkorelasi justru adalah konsep invensi, dimana matematika pada aspek tertentu jelas adalah sebuah metode yang diformulasikan untuk menyelesaikan masalah-masalah di realita. Matematika dengan ini dapat diposisikan sebagai alat yang diciptakan (*invented*) para saintis agar dapat mendeskripsikan dan mengeksplorasi realita. Akan tetapi, penjelasan ini akan sulit menjaga relevansinya jika sudah bergerak pada topik-topik matematika yang lebih murni dan abstrak. Meskipun matematika yang sangat teoretis dan abstrak pada akhirnya tetap secara logis dan terstruktur berhubungan dan terkait dengan matematika terapan, namun apakah ketika matematika di wilayah terapan itu "diciptakan", maka matematika yang lebih abstrak juga "diciptakan". Kalau melihat cara pengembangan matematika itu sendiri, jelas semua dirumuskan dengan cara yang sama. Maka, jika seharusnya perumusan matematika di bidang terapan itu dikatakan sebagai penciptaan, maka demikian juga matematika di bidang apapun yang lain, meskipun posisinya sebagai "alat" sudah tidak relevan, dalam arti matematika murni tidak punya peruntukan khusus dalam suatu tujuan riil.

Di sisi lain di wilayah terapan sendiri, meskipun sebagian saintis melihat matematika hanya seperti alat, beberapa di antaranya terkesima dengan bagaimana matematika yang "diciptakan" bisa begitu kompak, efektif, dan elegan. Hal ini disebabkan banyak formulasi hukum alam memiliki bentuk matematis yang relatif sederhana, tidak membutuhkan ratusan persamaan yang kompleks. Hal ini bahkan menjadi sebuah slogan *unreasonable effectiveness of mathematics*, yang diperkenalkan oleh Eugene Wigner sebagai judul bukunya. Kita bisa lihat bagaimana hukum-

hukum besar fisika seperti hukum Newton, hukum Maxwell, mekanika kuantum, ekivalensi massa-energi, dan relativitas umum, begitu ringkas dan padat sekaligus fundamental. Tentu kemudian dalam perhitungan riilnya, berbagai konsep kompleks diperlukan untuk memahami dan menerapkan semua hukum dan teori tersebut, namun bahwa akar teorinya sendiri dapat begitu ringkas menjadi kekaguman tersendiri untuk para saintis. Perspektif seperti ini yang kemudian membuat matematika Kembali dipertimbangkan sebagai sebuah penemuan ketimbang invensi, karena bagaimana mungkin invensi manusia bisa mengungkap alam semesta seefektif itu.

Sementara itu di wilayah abstrak, tidak ada tolok ukur pasti apa yang bisa disebut efektif atau tidak. Apa yang diungkapkan dalam matematika murni hanya sebatas korelasi atau hubungan antar konsep yang dibangun secara bertahap dan konsisten. Memang kemudian, pada beberapa kasus, teorema dan konsep yang dihasilkan bisa juga dikatakan "mengagumkan" dan "elegan", meskipun bisa jadi itu hanya implikasi langsung dari konsistensi antar konsep di matematika. Tentu saja, menilai matematika dengan cara seperti ini terlalu subyektif dan parsial, karena perspektif terhadap "keindahan" matematika hanya bisa dirasakan oleh orang tertentu dan juga tidak mencakup keseluruhan matematika. Kita tidak bisa menafikan bahwa banyak konsep di matematika juga terbilang rumit dan membingungkan. Terlebih lagi, aspek indah bukanlah atribut yang terukur, apalagi untuk menjadi premis untuk menyimpulkan matematika adalah hal natural yang ada di alam, atau dengan kata lain, matematika adalah penemuan.

Matematika bila dilihat dari produknya akan selalu bias perspektif, karena apa yang dihasilkan matematika begitu beragam. Lebih lebih kalau yang dilihat adalah atribut-atribut yang sebenarnya tidak punya tolok ukur yang mutlak, seperti "efektivitas", atau "keindahan", matematika semakin ambigu bila dilihat dengan cara demikian. Untuk bisa menjawab pertanyaan-pertanyaan yang terkait matematika sebagai satu keutuhan, maka kita perlu melihat aspek tunggal dan universal dari matematika, ketimbang melihat produknya. Formulasi yang padat dari hukum-hukum alam dengan mateamtika hanyalah produk dari matematika itu sendiri. Kalau melihat matematika secara parsial, maka pertanyaan simalakama dilematis antara penemuan atau ciptaan ini tidak akan pernah bisa memberi jawaban tunggal. Setiap wilayah punya aspek tertentu yang bisa kita pandang sebagai ciptaan atau penemuan. Akan tetapi, melihat matematika sebagai satu keutuhan pun belum tentu mempermudah jawabannya, karena pertanyaan dikotomis seperti itu menyempitkan kemungkinan pilihan jawaban.

Bias Saintis

Pertanyaan apakah matematika diciptakan atau ditemukan pada dasarnya baru mulai berkembang belakangan ini, paling tidak sejak sains modern mulai tumbuh. Bahkan, pertanyaan ini kurang bergema di dunia matematika sendiri. Ini adalah pertanyaan yang secara spesifik dipermasalahkan oleh orang-orang di dunia sains, atau malah secara spesifik fisika. Dalam perspektif matematika sendiri, konsep-konsep yang ada di matematika itu selalu merupakan sebuah penemuan karena matematikawan tidak pernah menganggap produk matematika sebagai sebuah alat. Mungkin beberapa matematikawan yang banyak terlibat dalam dunia terapan masih melihatnya demikian, namun secara umum, matematika secara independent adalah suatu hal yang terus dieksplorasi dan ditemukan, bukan diciptakan untuk suatu keperluan tertentu.

Di dunia sains sendiri, pada dasarnya paradigma dasarnya adalah bahwa matematika hanyalah alat. Pertentangan muncul ketika semakin banyak saintis yang melihat bahwa formulasi matematis dari alam semakin lama selalu terlihat kompak. Sefundamental apapun itu, persamaan yang bisa mendeskripsikan alam hanya tertulis seperlunya dalam jumlah yang cukup, hingga muncul perasaan bahwa "tidak mungkin bisa lebih ringkas lagi dari ini". Dengan mulai banyaknya saintis yang menggunakan perspektif seperti ini, semakin paradigma bahwa matematika hanya alat diragukan. Akan tetapi, perlu dilihat bahwa dalam konteks ini, kita perlu melihat bahwa yang menciptakan keraguan bahwa matematika bukan sekadar invensi adalah persamaan-persamaan yang mendeskripsikan realita, yang sebenarnya hanya produk, dari matematika. Ilmu matematikanya sendiri di balik itu bisa jauh lebih rumit. Matematika yang menjadi landasan persamaan-persamaan yang mendeksripsikan realita itu sendiri mungkin saja justru adalah invensi dari manusia, semacam cara manusia untuk melihat semesta saja. Hal ini karena tidak menutup kemungkinan ada cara lain untuk melihat semesta yang "lebih efektif".

Pandangan yang melihat matematika sebagai semacam "mukjizat" karena *unreasonably effective* tidak lepas dari kritik. Salah satu yang tidak sepakat dengan ide tersebut adalah Richard Hamming, dimana ia mengajukan 4 proposisi. Hal pertama yang ia ajukan adalah bahwa kita cenderung melihat apa yang kita memang cari. Dalam hal ini, muncul bias yang akan secara spesifik membuat perhatian kita tertuju hanya pada apa yang sesuai dengan harapan dan secara tidak sadar melakukan seleksi atas apa yang kita ingin kembangkan. Masih senada dengan yang pertama, Hamming kemudian mengajukan bahwa kita cenderun memilih matematika seperti apa yang kita cari. Salah satu ujung tombok perkembangan matematika adalah kebutuhan praktis di wilayah terapan, sehingga kita cenderung hanya akan mengembangkan matematika yang memang secara praktikal dapat digunakan. Ketika sesuatu terlalu rumit untuk diaplikasikan, maka akan segera diabaikan.

Munculnya persamaan-persamaan yang kompak dan ringkas bisa mungkin merupakan hasil dari seleksi ini, bahwa persamaan-persamaan yang rumit cenderung dipandang sebelah mata. Bahkan, secara spesifik terkadang saintis sudah punya preferensi yang menganggap kalau suatu teori terlalu rumit maka kemungkinan besar salah. Apalagi, secara filosofis, perkembangan ilmu kita banyak dipengaruhi oleh konsep Occam's razor yang secara sederhana mengatakan bahwa penjelasan yang paling ringkas adalah yang paling mungkin benar. Selanjutnya, Hamming mengajukan bahwa apa yang berhasil dijelaskan oleh sains relatif sangat sedikit dibandingkan keseluruhan fenomena yang ada di semesta ini, sehingga terlalu dini untuk mengatakan realita dapat direpresentasikan secara efektif oleh matematika. Masih banyak kemunginan dimana apa yang belum kita ketahui justru tidak dapat dideskripsikan oleh matematika, apalagi secara efektif. Terakhir, Hamming menekankan bahwa ada kemungkinan bagaimana kita memikirkan realita termausk produk dari evolusi. Seleksi alam telah secara tidak langsung memastikan bahwa yang bisa berpikir sebagaimana kita pikirkan terhadap matematika dan sains saat ini adalah yang bisa bertahan hidup. Proposisi terakhir Hamming ini tidak terkait langsung dengan matematika itu sendiri, namun lebih ke spekulasi dari bagaimana secara natural kita berpikir.

Proposisi ketiga Hamming dapat kita tinjau lebih dalam. Jika kita lihat dalam perspektif yang lebih luas, melihat matematika begitu anggun dan efektif mendeskripsikan realita sayangnya terlalu terbatas pada kalangan fisikawan. Realita yang diamati fisika memang realita dasar yang melihat objek-objek di semesta dalam hubungan-hubungan yang sederhana. Ketika kita bergerak ke ilmu yang lebih kompleks, biologi misalnya, maka kefektifan matematika menjadi sama sekali tidak relevan. Fenomena dan sistem biologis terlalu rumit untuk dideskripsikan secara matematis. Jika matematika begitu efektif menjadi representasi realita, kenapa matematika tidak mampu mendeskripsikan bagaimana otak bekerja? Hal yang sama juga dapat kita lihat pada banyak bidang ilmu lainnya, seperti ekonomi, psikologi, ataupun sosiologi. Semua ilmu ini terlalu kompleks untuk bisa dimodelkan secara matematis, sehingga pada akhirnya kapabilitas matematika untuk menjadi representasi realita sangat terbatas pada fenomena-fenomena alam langsung. Keindahan mateamtika pun hanya menjadi bias dikalangan saintis sendiri, atau secara spesifik fisikawan, karena pada dasarnya pengalaman matematis ilmuan di bidang lain sangatlah berbeda. Bahkan di fisika sendiri pun, bentuk-bentuk ringkas hanyalah penyederhanaan dari fenomena riil yang sesungguhnya. Bentuk sederhananya bertahan hanya pada kasus-kasus ideal. Ketika persamaan-persamaan ini diterapkan, apalagi untuk masalah yang besar, maka beragam kompleksitas pun juga akan keluar.

Kita tidak bisa membayangkan lebih dari apa yang sudah kita ketahui. Seperti halnya kita akan selalu membayangkan alien dengan gambaran yang tidak jauh dari makhluk hidup bumi meskipun masih banyak kemungkinan bentuk alien yang mungkin, maka kita pun juga akan gagal membayangkan bentuk matematika lain yang mungkin dari yang sudah pernah kita temui. Tidak ada jaminan bahwa matematika yang dikembangkan manusia saat ini merupakan satu-satunya matematika karena itu merupakan entitas alami dari realita atau hanya salah satu kemungkinan matematika yang bisa diciptakan. Dengan demikian, apapun yang kita coba telusuri dari kemungkinan-kemungkinan atas entitas matematika, akan selalu terbiaskan oleh persepsi kita sendiri.

Platonisme Matematika

Meskipun pertanyaan apakah matematika diciptakan atau ditemukan itu sendiri agak bermasalah, bukan berarti tidak pantas untuk dijawab. Sekarang, kita perlu secara hati-hati melihat sifat dasar dari matematika itu sendiri. Apa yang diteliti matematika adalah aspek abstrak dari realita, yang secara umum dapat dilihat dalam 4 kategori, yakni bilangan, struktur, ruang, dan perubahan. Empat hal ini menjadi dasar objek atas berbagai subbidang matematika, dari aljabar hingga analisis.

Dalam bentuk primitifnya, matematika hanya berurusan dengan bilangan dan ruang. Konsep ruang di sini sendiri berawal dari geometri klasik. Dua objek ini merupakan abstraksi paling dekat dengan realita, dimana bilangan sendiri merupakan abstraksi terkait ukuran dan urutan, dan ruang sendiri merupakan abstraksi terkait bentuk. Ketika abstraksi ini dilakukan, kita seakan seperti berusaha melihat apa yang ada di balik realita dalam bentuk yang idealnya. Misal, ketika kita melihat beberapa benda berbentuk bulat, maka kita ekstraksi kesamaan dari benda-benda tersebut untuk mendapatkan bentuk lingkaran yang ideal, meskipun sebenanrya secara riil, lingkaran ideal itu hampir mustahil. Dalam konsep bilangan, ketika kita melakukan pengukuran dengan melihat misal banyaknya sapi di ladang. Kita tahu adanya dua sapi itu lebih banyak dari satu sapi, dan itu bisa kita terapkan pada benda-benda riil lainnya. Konsep ini kemudian diabstraksi menjadi suatu urutan simbol (bilangan) yang bisa menjadi label untuk ukuran banyak. Pertanyaan selanjutnya adalah apakah hasil abstraksi ini merupakan eksitensi tersendiri, sesuatu yang hadir dan ada, atau hanya konstruksi pikiran dan bahasa manusia. Apakah bilangan itu merupakan hal yang manusia definisikan sendiri, atau memang entitas tersendiri yang ada pada suatu dunia non-materiil dimana manusia hanya memberi label atau konsep terhadapnya?

Terkait bagaimana matematika melakukan abstraksi ideal dari yang riil ini memberi kemungkinan bahwa apa yang diabstraksikan sebenarnya sudah ada dalam suatu dunia sendiri. Sebagai contoh, ketika kita mengabstraksi bentuk-bentuk bulat ke konsep lingkaran ideal, maka bentuk lingkaran ideal ini sebenarnya sudah ada dalam suatu dunia ide, namun seakan ketika pikiran kita memikirkan konsep terkait suatu lingkaran, pikiran kita melakukan ekstraksi atau *recall* dari dunia ide. Teori atas realita seperti ini dicetuskan oleh Plato, dimana ia menganggap bahwa di balik realita materiil yang kita persepsikan, ada realita lain yang ia sebut sebagai *Forms* atau *Ideas* yang mencakup esensi dari semua benda. Benda-benda fisik semata-mata hanya semacam imitasi atau proyeksi dari dunia ide ini. Ketika kita melihat benda-benda fisik yang indah dipandang, maka pikiran kita membentuk konsep indah, yang sebenarnya merujuk pada suatu ide tentang indah dalam dunia ide. Apa yang digagas oleh Plato ini begitu mempengaruhi banyak pemikiran-pemikiran selanjutnya, bahkan sampai sekarang. Semua cara berpikir yang secara tidak langsung menganggap adanya suatu dunia lain, realita lain, atau entitas lain yang terlepas dari realitas fisik-materiil ataupun kesadaran namun mencakup konsep-konsep ideal dinamakan Platonisme.

Melihat gagasan Plato dan sifat dasar dari matematika sendiri, maka penjelasan paling dekat atas esensi matematika adalah bahwa objek-objek matematika sebenanrya ada di dunia ide, bukan sekadar konstruksi pikiran manusia. Proses bermatematika dengan demikian adalah proses eksplorasi dan menemukan (*discover*) apa yang ada di dunia abstrak ini, mulai dari bentuk-bentuk geometris, bilangan-bilangan, struktur aljabar, hingga persamaan-persamaan fisis. Hampir sebagian besar matematikawan bisa dianggap platonis, apalagi mereka yang berada di wilayah murni. Dalam paradigma platonistik, maka jelas bahwa matematika merupakan penemuan, sama sekali bukan invensi. Kita bisa ambil aspek-aspek ideal dari matematika untuk secara jelas menunjukkan eksistensi dunia Platonik matematika, seperti eksistensi bilangan *pi* ataupun bangun platonic (*Platonic solids:* tetrahedron, kubus, dll). Di sisi lain, tidak semua saintis beraliran Platonik, bahkan bisa dikatakan hanya sebagian kecil yang demikian. Sains berlandaskan prinsip empiris sehingga cenderung lebih melihat realita apa adanya, bahwa dunia fisik-material adalah satu-satunya realitas, bukan sekadar proyeksi atau manifestasi dari semacam dunia abstrak ideal. Hal ini juga yang mendorong sebagian besar saintis melihat matematika pun hanya sebatas alat ketimbang sebuah entitas independen.

Metafora Kognitif

Keberadaan dunia platonik yang abstrak dan ideal sebagai esensi dari realita pada dasarnya sangat sulit untuk dibuktikan. Konsep "ada" yang dimaksud pun perlu banyak penyesuaian, dimana keberadaan objek abstrak tidak seperti objek materiil yang bisa diuji dengan pengamatan. Pembuktian keberadaan objek immaterial hanya bisa dilakukan melalui penyimpulan deduktif yang sayangnya banyak bergantung asumsi yang digunakan. Dalam titik ini, ide platonik ini kurang bisa menjadi dasar untuk menjawab jawaban atas posisi matematika sebagai invensi atau penemuan.

Ada satu perspektif lain untuk melihat masalah ini, yakni melihat bagaimana kita sendiri berpikir. Kita tidak bisa menafikan bahwa matematika adalah produk pikiran. Yang jadi masalah adalah produk ini merupakan hanya konstruksi pikiran manusia atau merupakan ide murni yang ditemukan oleh pikiran. Salah satu aspek menarik dari pikiran adalah teori "metafora kognitif" yang dicetuskan oleh George Lakoff. Teori ini menjelaskan bahwa pikiran manusia memahami suatu hal berdasarkan pemahaman hal lain. Kebergantungan suatu pemahaman terhadap pemahaman lain ini yang Lakoff sebut sebagai metafora. Teori ini merupakan ekstensi dari konsep metafora dalam bahasa, dimana kita dapat menyebut atau menarasikan sesuatu dengan membandingkan atau merujuk ke hal lain. Konsep ini diekstensi ke semua hal kognitif secara keseluruhan, bahwa kalau kita memikirkan suatu konsep pasti melalui metafora terhadap konsep lain. Sebagai contoh, kita sering memahami konsep waktu sebagai suatu komoditas yang habis, sehingga termanifestasi dalam bahasa ketika kita mengucapkan "aku menghabiskan waktu bersamamu". Dalam contoh lain, konsep jabatan menjadi metafora terhadap suatu tempat yang lebih tinggi dari yang lain, sehingga termanifestasi dalam bahasa ketika kita mengucapkan "dia naik-turun jabatan".

Dalam metafora kognitif, setiap konsep berada dalam suatu domain kognitif atau domain konseptual. Domain sendiri merupakan pengaturan mental atas pengalaman manusia. Hubungan antar konsep dibangun dengan adanya pemetaan antar domain. Metafora kognitif memperlihatkan bagaimana bahwa pikiran manusia merupakan jaring-jaring konsep yang saling terhubung. Dalam suatu pemetaan metafora, ada domain sumber yang menjadi ekspresi metaforanya dan domain target sebagai domain konsep yang ingin dipahami. Sebagai contoh, ketika mengatakan "kesuksesan adalah perjalanan" maka konsep perjalanan sebagai domain sumber dipetakan ke konsep kesuksesan sebagai domain target. Domain sumber selalu menjadi domain yang lebih abstrak dan domain target adalah domain yang lebih konkrit. Dalam peta domain, ada domain-domain yang paling konkrit, yakni domain yang dipahami secara langsung tanpa melalui metafora, tapi dari pengalaman langsung yang jelas, melalui persepsi ruang, gerak tubuh, dan lain sebagainya. Pemetaan antar domain pun berarah dan bertingkat, dimana membentuk hirarki abstraksi dari domain konkrit ke domain-domain abstrak.

Matematika, sebagai buah dari perangkat kognisi manusia, juga harus dipahami dalam metafora kognitif. Yang membuat matematika berbeda adalah matematika bisa menciptakan Menara domain dengan tingkat abstraksi yang sangat tinggi. Satu konsep matematika bisa berdiri satu tingkat lebih abstrak dari domain lain, sehingga jaraknya ke domain konkrit bisa sangat jauh. Namun perlu dipahami, sebagaimana dilihat dalam sejarah perkembangan matematika sendiri, matematika tetaplah terbangun dari domain-domain konkrit. Ketika suatu konsep tentang bangun datar seperti segitiga atau lingkaran dibentuk, maka manusia sedang melakukan pemetaan metaforis dari pengalaman langsung terhadap benda-benda atau ruang-ruang riil ke domain target yang lebih abstrak dan ideal. Yang dilakukan matematika adalah membangun suatu konsep yang lebih abstrak di atas konsep lain tanpa perlu melihat jauh ke asal domain konkritnya. Hal ini berbeda dengan ilmu-ilmu lain yang setiap konsep-konsep abstrak selalu bisa ditemukan jalur pemetaan lain yang tetap dekat dengan domain konkrit. Teori ekonomi, biologi, psikologi, sosiologi, antropologi, kimia, dan lain sebagainya cenderung memiliki pemetaan domain yang menyebar ketimbang menumpuk, sehingga keterhubungan domain-domain abstrak dengan domain riil tetap terjaga.

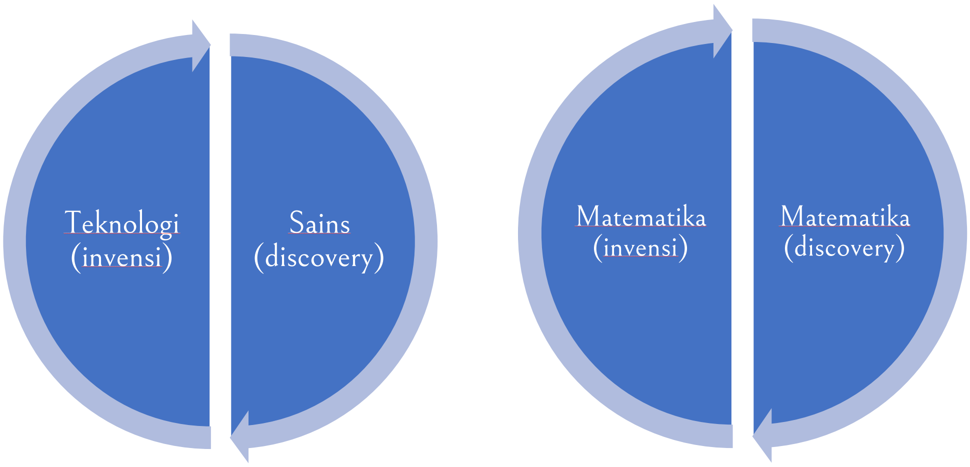
Resolusi

Dengan semua pemaparan ini, lantas apa jawaban dari masalah invensi atau penemuan dari matematika? Kita dapat melihat pertama kali bahwa matematika tetaplah merupakan entitas yang keberadaannya paling pasti ada dalam pikiran. Yang paling utama sekarang adalah mengetahui kemana pikiran kita merujuk ketika memikirkan matematika. Dalam teori metafora konseptual, dapat terpetakan dengan mudah bagaimana konsep-konsep matematika terpahami melalui metafora satu dengan yang lainnya. Banyak konsep di matematika merupakan ekstensi, genrealisasi, ataupun adaptasi dari konsep lain. Akan tetapi, perlu dilihat bahwa seabstrak apapun itu konsep matematika, ia tetap pertama kali berangkat dari domain konkrit dasar yang berasal dari pengalaman langsung, seperti persepsi terhaadap koleksi objek, urutan, perbandingan, pergerakan, dan lain sebagainya. Sebagai contoh, bilangan adalah garis panjang yang menentukan lokasi. Kita dapat membandingkan lokasi suatu benda terhadap benda lainnya relatif terhadap suatu gairs. Positif-negatif dipetakan dari lokasi relatif. Kontinuitas bilangan riil dipetakan dari persepsi terhadap sesuatu yang *gapless* seperti air.

Dalam melakukan pemetaan-pemetaan ini, matematika sebagai ilmu butuh menjaga satu prinsip dasar, yakni konsistensi, maka digunakanlah logika formal sebagai cara untuk mendefinisikan domain-domain konsep secara rigid. Eksplorasi dan pemahaman konsep di matematika mungkin hanya sekadar menggunakan metafora-metafora konsep yang longgar, namun logika akan menjamin keketatan konsep yang bisa diterima secara selektif. Logika itu sendiri merupakan bahasa yang diformulasikan manusia untuk menciptakan sebuah sistem yang secara internal valid. Konsep sistem yang valid secara logis merupakan murni ciptaan manusia, namun ia menjadi perantara agar setiap matematika juga terbangun secara konsisten. Bahkan, penggunaan logika formal dalam matematika tergolong baru jika dibandingkan dengan keseuluruhan umur matematika itu sendiri. Dalam masa klasiknya, matematika terhubung satu sama lain dengan konsep-konsep metaforis, seperti bagaimana solusi persaman kuadrat diformulasikan oleh al-Khawarizmi dengan pemetaan terhadap manipulasi bangun persegi pada domain geometri.

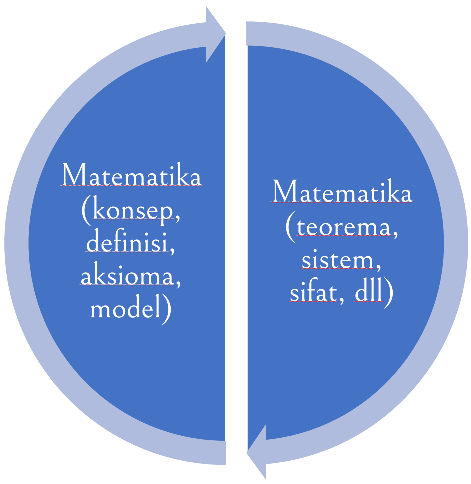
Kita bisa mulai dengan domain-domain konkrit yang jelas “ditemukan” di realita langsung. Ketika konsep-konsep dasar matematika terbangun dari domain-domain konkrit, maka konsep-konsep dasar matematika ini masih tergolong “ditemukan” karena sebenarnya hanya konseptualisasi abstrak dari domain konkrit. Kemudian, karena matematika bergerak dalam dunia ideal dan abstrak, kita menggunakan bahasa-bahasa formal untuk mengungkapkannya. Sebagai contoh, ketika konsep tentang geometri terbangun, maka muncul aksioma-aksioma dan definisi yang berusaha mendeskripsikan konsep-konsep seperti garis sejajar, segitiga, dan seterusnya, secara lebih rigid. Aksioma dan definisi ini merupakan “ciptaan” manusia, yang kemudian membentuk sistem aturan sendiri yang dengannya konsep serupa bisa dieksplorasi lebih jauh. Eksplorasi yang dilakukan akan mengungkapkan konsep-konsep baru, seperti teorema Phytagoras. Teorema Phytagoras, merupakan sifat yang secara fundamental ada di segitiga dalam ruang datar, sehingga ia bisa dikatakn “ditemukan”, tapi dengan alat-alat (aksioma, definisi, perangkat logika) yang “diciptakan”. Mekanisme seperti ini terus berlanjut sampai ke level domain yang lebih abstrak. Hal ini memang secara tidak langsung mengasumsikan kebenaran dari eksistensi dunia platonik, sebagai tempat dimana domain-domain abstrak ditemukan. Tidak mungkin kita mengatakan bahwa teorema Pythagoras ditemukan tanpa adanya dunia ide, karena pasti untuk bisa ditemukan, teorema ini harus ada dulu di suatu tempat bukan?

Analogi yang bisa membantu membayangkan mungkin adalah bagaimana hubungan antara teknologi dengan sains. Teknologi merupakan hal yang jelas diciptakan oleh manusia. Akan tetapi, penciptaan teknologi didasarkan dari temuan-temuan sains. Secara siklis, teknologi kemudian juga membantu untuk penemuan lebih lanjut eksplorasi sains. Hubungan timbal balik antara teknologi sebagai “ciptaan” dan sains sebagai “penemuan” ini sebenarnya terjadi juga di matematika. Sayangnya, yang membuat bingung, adalah yang diciptakan dan yang ditemukan sama-sama disebut matematika, sehingga tercampur aduk dua entitas ini dalam satu bangunan. Sebagian dari matematika diciptakan, sebagian lagi ditemukan, dan dua-duanya secara siklik saling berhubungan untuk terus mengembangkan matematika. Banyak definisi dan aksioma formal diciptakan oleh manusia untuk kemudian dapat menemukan teorema-teorema fundamental. Bisa dikatakan definisi dan aksioma adalah "teknologi" manusia yang khusus diperuntukkan untuk mengeksplorasi dunia ide. Analogi lain yang lebih abstrak adalah bahasa itu sendiri. Bahasa, itu jelas ciptaan manusia, namun bahasa bisa jadi alat untuk menemukan ide-ide.



Kita tidak bisa menafikan bahwa banyak hal di matematika itu bersifat independent dari manusia. Contoh paling fundamental adalah bilangan itu sendiri, atau mungkin agar lebih speisifk, bilangan pi. Bilangan pi yang bernilai eksak 3.1415… terungkapkan secara mutlak sebagai rasio antara keliling lingkaran dan diameternya dan konsepsi lingkaran sendiri sudah sangat ideal, jauh dari konstruksi manusia, sehingag bisa diyakinkan bahwa makhluk cerdas lainnya pasti akan mendapatkan nilai "pi" yang sama meskipun namanya beda. Akan tetapi, kita juga tidak bisa menafikan banyak juga hal di matematika yang bersifat konstruktif, seperti aksioma himpunan, definisi limit, konstruksi bilangan riil, dan lain sebagainya. Konstruksi-konstruksi ini tidak unik dan memiliki banyak pendekatan lain, sehingga jelas merupakan sesuatu yang diciptakan. Banyak orang terlalu mendikotomikan dua konsep ini, ciptaan dan penemuan, sehingga lupa dua-duanya ada di matematika dalam satu bangunan yang sama. Kita hanya perlu melihat bahwa setiap bagian matematika memiliki perannya sendiri. Beberapa hal diciptakan untuk membantu eksplorasi lebih lanjut, dan beberapa hal ditemukan sebagai teorema yang fundamental.

Secara lebih tepat, bisa dipilah bahwa yang merupakan ciptaan di matematika adalah definisi dan aksiomanya, yang memang merupakan konsepsi buatan manusia untuk membahasakan atau mendeskripsikan objek-objek matematis. Definisi ada karena manusia menamai secara khusus atau mengategorikan objek-objek matematika yang berbeda dengan suatu identifikasi yang ketat. Adapun aksioma ada karena suatu konsepsi butuh pernyataan-pernyataan yang menjadi syarat keberadaannya. Aksioma pasti ada di balik suatu konsep, seperti aksioma himpunan, aksioma ruang vector, dan lain sebagainya. Bahkan, bisa dikatakan aksioma hanyalah bentuk lain dari definisi. Selebihnya, definisi dan aksioma menjadi semacam bahasa dasar matematikawan untuk menelusuri lebih lanjut dunia matematika. Dengan definisi dan aksioma yang diciptakan, barulah kemudian bisa dieksplorasi beragam teorema matematis. Definisi dan aksioma menjadi semacam mikroskop, teleskop, atau instrument-instrumen teknis yang membantu untuk pengungkapan lebih lanjut dunia matematika. Apa yang diciptakan dalam dunia matematika sebenarnya juga tidak terbatasi pada definisi dan aksioma, namun bisa juga dalam bentuk asumsi-asumsi, atau model-model. Sebagian teorema yang diturunkan dari aksioma atau model yang dibangun mungkin masih hanya merupakan implikasi langsung dari konsep yang diciptakan, sehingga agak kabur untuk bisa dikatakan suatu penemuan independen. Artinya, suatu sistem aksioma yang berbeda mungkin akan menghasilkan teorema dalam bentuk yang berbeda. Akan tetapi pada suatu titik, eksplorasi ini akan mencapai teorema-teorema yang semua sistem aksioma sepakat, sesuatu yang independen. Pada titik inilah terjadi penemuan matematis.



Pertanyaan apakah matematika diciptakan atau ditemukan terkadang terlalu dilatarbelakangi banyak asumsi dan bias, sehingga membuat pertanyaan yang sebenanrya bisa dijawab dengan sederhana menjadi masalah yang kompleks. Pada akhirnya, matematika adalah keduanya sekaligus bukan keduanya.

(PHX)

Di Balik Ketakterhinggaan

Mari kita berhitung, 1, 2, 3, …, 9, 10. Ada apa setelah 10? Oh masih ada 11, 12, 13, …, 98, 99, 100? Masih bisa lanjut? Oh ya tentu saja, masih ada 100, 101, …, 998, 999, 1000. Apakah masih ada lanjutannya? Jelas! Masih ada 1001, dan seterusnya sampai 1 juta. Bagaimana setelah 1 juta? Baik, 1 milyar. Setelah itu, masih ada triliun (10^{12}), quadriliun (10^{15}), quintiliun (10^{18}), hingga bahkan googol (10^{100}) dan googolplex (10^{googol}). Setelah itu? Mungkin masih saja dapat kita lanjutkan terus, namun sampai mana? Sejauh apa bilangan itu terus bisa ditambah?

Mari sekarang kita bayangkan lingkungan kita ini. Kita ketika kecil hanya mengenal daerah sekitar rumah kita, tapi apakah itu berarti tidak ada apa-apa di luar area itu? Tentu ada kota, hingga provinsi tempat kita tinggal. Apakah ada sesuatu di luar provinsi itu? Tentu ada provinsi-provinsi lain, yang membentuk negara Indonesia. Bagaimana dengan di luar Indonesia? Oh ya masih ada negara-negara lain, yang tergabung di atas permukaan Bumi. Apakah hanya Bumi dunia tempat kita tinggal? Oh ternyata di luar Bumi masih ada ruang berisi planet-planet lain, yang kemudian disebut tata surya. Di luar tata surya masih ada ruang lagi? Iya, masih ada galaksi yang berisi jutaan sistem serupa tata surya, setelah itu ada klaster galaksi yang terdiri dari jutaan galaksi. Bagaimana dengan di luar klaster itu? Masih ada ruang! Sampai kapan ruang itu terus bisa diekstensi? Kalaupun sekarang manusia sudah mampu mencapai batas semesta yang terobservasi, kita masih dapat bertanya, ada apa di luar batas tersebut?

Bagaimana bahwa setelah suatu bilangan selalu mungkin ada bilangan lain lagi, dan bahwa di balik batas suatu ruang selalu mungkin ada ruang lain, itu membawa pada rantai pertanyaan yang tidak bisa berhenti, tanpa batas, tanpa ujung. Sesuatu yang berlanjut terus menerus tanpa henti ini yang kemudian menghasilkan konsep tersendiri, yang menjadi satu entitas khusus, meskipun sebenarnya sukar didefinsikan atau bahkan sukar terbayangkan. Konsep ini punya banyak nama, seperti tak terbatas (*limitless*, *boundless*), tak berujung (*endless*), atau tak terhingga (*infinite*), yang sebenarnya secara esensi sama. Konsep tak terhingga merupakan konsep yang bisa dikatakan aneh, misterius, dan membingungkan, namun justru menjadi aspek penting dalam khazanah pemikiran manusia, karena konsep tak terhingga memainkan peran penting dalam hal-hal yang memang tidak terjangkau oleh pikiran manusia itu sendiri.

Asal Mula

Dari banyak hal yang bisa dipikirkan manusia, selalu semua hal tersebut berada dalam suatu jangkauan tertentu. Apapun itu yang dapat terpikirkan, baik itu berupa ruang, waktu, jumlah, konsep, ukuran, dan lain sebagainya, pasti bisa terjangkau dalam suatu batas. Memikirkan melewati satu batas, akan menemui batas lainnya.

Sebagai contoh, ketika kita memikirkan waktu, maka dalam suatu konteks mungkin kita hanya dapat berpikir dalam lingkup usia manusia yang sekitar puluhan tahun. Apa yang ada setelah puluhan tahun tidak akan terbayangkan sampai kita memikirkan konteks yang lebih besar, misal usia peradaban, yang sekitar ribuan tahun. Mengekstensi hal tersebut ke konteks lainnya, seperti usia bumi, akan membawa pikiran kita ke batas yang lebih besar. Batas yang kita buat tidak pernah bisa berupa batas yang benar-benar mutlak, kecuali keterbatasan pikiran itu sendiri. Setiap kali kita merasa sudah cukup mencapai suatu batas, maka tidak pernah tertutup kemungkinan untuk adanya ekstensi lebih lanjut.

Konsep-konsep seperti ini mungkin hanya akan muncul ketika pikiran kita benar-benar berada dalam level abstraksi yang tinggi. Dalam keseharian, sebenarnya kita tidak pernah memunculkan aspek-aspek yang harus menuntut pikiran kita bergerak ke luar batas. Kita hidup cukup memikirkan aspek waktu yang kita jalani, yang jelas terbatas, lingkungan tempat kita berada, yang juga terbatas, atau barang-barang yang kita punya, yang juga terbatas. Apapun itu, dunia keseharian kita adalah hal-hal yang segala sesuatunya bisa dihitung, dibilang, diukur secara jelas.

Konsep ketakterhinggaan muncul ketika manusia mulai berpikir melampaui dan melebihi dari kehidupan fisik. Salah satu kapabilitas pikiran mental kita adalah mengonstruksi dan menciptakan imaji atas apa yang awalnya berasal dari realita. Imaji ini, karena tidak membutuhkan koneksi lagi ke realita, dapat diekstensi lebih jauh, sehingga dunia mental kita pada dasarnya jauh lebih luas dibandingkan realita. Ketika kita sehari-hari hanya berpikir sebatas waktu dari lahir hingga meninggal dunia, maka dengan pikiran kita mampu mencipta imaji atas apa yang mungkin sebelum lahir atau setelah mati. Ekstensi ini sayangnya tidak punya batas natural, karena konstruksi pikiran sendiri sifatnya sudah terlepas dari realita.

Salah satu contoh versi primitif dari konsep tak terhingga diilustrasikan dengan paradoks Akhiles dan Kura-kura yang dikemukakan oleh Zeno pada abad ke-5 sebelum masehi. Zeno mengilustrasikan seorang tokoh perang bernama Akhiles yang tengah berlomba lari dengan seekor kura-kura. Akhiles berangkat belakangan, memberi kura-kura tersebut beberapa jarak mendahului di depan Akhiles (sebutlah di titik A). Ketika Akhiles berangkat dan sampai ke titik dimana kura-kura itu berada saat Akhiles berangkat (titik A), kura-kura tersebut tentu sudah berpindah maju (sebutlah di titik B). Ketika kemudian Akhiles maju lagi dan sudah mencapai titik B, tentu kura-kura tersebut sudah maju lagi dan mencapai suatu titik C. Hal ini bisa diteruskan hingga dapat disimpulkan Akhiles tidak akan pernah bisa mengejar si kura-kura. Walaupun Zeno sebenarnya bukan ingin mengungkapkan konsep ketakterhinggaan, konsep suatu langkah yang bisa diulang terus menerus tanpa henti ini menjadi bentuk awal ketakterhinggaan. Dalam bentuk berpikir abstrak, proses argumentasi secara berulang tanpa henti ini juga kemudian disebut sebagai "*infinite regress*". Tentu istilah ini baru ada di era modern, namun cara berpikir demikian sudah ada dalam bentuk sederhana sejak era klasik. Salah satu *infinite regress* sederhana yang terkenal adalah teka-teki ayam atau telur. Ayam lahir dari telur, dan telur dihasilkan oleh ayam. Proses ini dapat terus diulang hingga akhirnya menjadi tidak jelas keseluruhannya ini dimulai dari ayam atau telur. *Infinite regress* sendiri pada dasarnya adalah salah satu bentuk paradoks, dimana logika tidak dapat diaplikasikan dengan semestinya. Paradoks menghasilkan kemustahilan dalam mendapatkan kesimpulan yang tunggal dan jelas. Hal ini disebabkan karena memang konsep ketakterhinggaan sendiri bukan hal yang bisa ditangani dengan baik oleh pikiran.

Kedua contoh yang dipaparkan, baik paradoks Zeno maupun teka-teki ayam atau telur, hanya dapat dimungkinkan oleh ekstensi konstruksi mental pikiran manusia. Dalam realita, kita akan melihat bahwa seseorang berlari mengejar kura-kura tanpa perlu dapat dipecah menjadi langkah-langkah yang tidak berujung, ataupun kita melihat bahwa siklus ayam dan telur terjadi paling tidak selama kita mengamatinya dalam hidup. Pikiran kita mengekstensi proses di realita ke hal yang jauh melampaui batas yang kita miliki di dunia riil. Dengan itu, ketika pikiran mulai mencapai titik dimana batas itu sendiri mengabur, perlu ada suatu konsep yang bisa "membungkus" ketidakterbatasan itu sendiri. Ketika kita misal membayangkan suatu garis lurus, maka ketika ujung dari garis itu sendiri selalu bisa diekstensi, maka kita akan cukup menciptakan batas kabur dan menganggap "ujungnya ada di jauh sana" sebagai sebuah konsep tunggal ketakterhinggaan. Ibarat misal kita membayangkan umur semesta ini, maka sejauh kita berpikir ke masa depan, selama masih ada mungkin waktu setelah itu, maka kita cukup mengambil "jauh di masa depan" itu sebagai sebuah konsep tunggal ketakterhinggaan.

Dengan ini pun, sebenarnya konsep ketakterhinggaan berawal dari bayangan sesuatu yang sangat besar atau sangat jauh sehingga pikiran sudah tidak sanggup lagi membayangkan, namun karena sesuatu yang sangat besar atau sangat jauh itu tidak punya ukuran spesifik, maka itu seperti batas berbayang yang kabur, seperti sebuah jalan lurus di tempat berkabut, yang kita merasa jalan itu masih ada lanjutannya, namun ujungnya tidak terlihat. Konsep ketakerhinggaan pun kerap dikaitkan dengan konsep-konsep yang ultima, seperti Tuhan, Semesta, dan Waktu. Konsep yang ultima ini, serupa dengan konsep tak terhingga, bagaikan sebuah aspek yang tak terjangkau oleh pikiran manusia, yang mana semakin kita pikirkan, semakin mungkin untuk lebih dari itu.

Dalam perkembangannya, semakin manusia berpikir abstrak, juga semakin manusia memiliki pemahaman dan pengetahuan yang lebih lengkap atas dunia, konsep tak terhingga ini kemudian ditangani secara lebih rinci ketimbang menjadi konsep yang mengabur.

Aktual vs Potensial

Salah satu asal mula konsep ketakterhinggan muncul adalah suatu proses yang dapat diulang terus menerus. Sebagaimana telah diilustrasikan sebelumnya, munculnya ketakterhinggaan dalam beragam aspek berawal dari perulangan atau iterasi yang tidak dapat berhenti. Di satu sisi, kita dapat melihat bahwa dalam lingkup kecil, segala sesuatu itu terbatas. Tubuh itu terbatas, waktu itu terbatas, setiap panjang terbatas, setiap bilangan itu terbatas. Segala sesuatu terbatas, karena semua dapat diukur, dapat dibilang. Akan tetapi, di sisi lain, dalam setiap aspek yang terbatas itu, kita selalu dapat membayangkan suatu proses yang bisa diulang tanpa batas. Segmen panjang apapun dapat kita duplikasi atau kita perpanjang, atau sebaliknya, dapat kita bagi secara terus menerus tanpa batas. Waktu pun demkian, selalu mungkin diekstensi ke kedua arah (masa depan dan masa lalu), dan juga dapat dibagi secara terus menerus tanpa batas. Tentu ini menghasilkan ketidakjelasan atau kekaburan konsep.

Jika kita lihat seksama, semua proses iteratif tanpa henti selalu hanya terjadi dalam pikiran. Karena mustahil juga kita dapat menyaksikan, mengalami, atau melakukan secara langsung proses iteratif tanpa henti karena hidup kita sendiri terbatas. Sehingga, memang konsep ini tidak dapat dibuktikan atau diamati secara empiris dengan cara apapun. Akan tetapi, karena dapat kita pikirkan, konsep ini tidak bisa serta merta ditolak. Dengan itu, berkembanglah konsep "ketakterhingaan potensial" (*potential infinity*), yang berarti bahwa ketakterhinggaan waktu, panjang, bilangan, atau apapun yang dihasilkan dari proses iteratif tanpa henti, itu berpotensi jadi tak terhingga, namun ketakterhingaan itu sendiri belum dicapai. Ketakterhinggaaannya bersifat potensial, karena berawal dari proses iteratif. Proses iteratif ini sendiri disebut sebagai induksi. Kita hanya tahu bahwa setiap bilangan selalu bisa ditambah 1 terus menerus, tapi kita tidak tahu sebenanrya bilangan itu beneran tak terhingga banyaknya atau tidak. Yang kita tahu adalah bahwa bilangan berpotensi untuk menjadi tak terhingga dengan diinduksi oleh proses penambahan terus menerus tanpa henti tersebut. Hal yang sama juga berlaku untuk aspek-aspek lainnya, seperti panjang dan waktu. Waktu berpotensi untuk menjadi tak terhingga karena setelah esok selalu ada esoknya lagi, dan setelah detik ini selalu ada detik berikutnya. Apakah kelak waktu itu sendiri akan ada ujungnya, kita tidak tahu, tapi ada potensi bahwa waktu itu menjadi tak terhingga.

Lawan dari ketakterhinggaan potensial, adalah ketakterhinggaan aktual, yakni bahwa ketakterhinggaan itu memang tercapai. Memang lantas konsep seperti ini akan menimbulkan pertanyaan, bagaimana yang potensial itu dapat menjadi aktual? Perbedaan mendasar dari dua konsep ini adalah konstruksinya. Ketakterhinggaan potensial berasal dari proses yang berulang, sehingga ketakterhinggaannya terbangun dari potensi perulangan itu. Akan tetapi, dalam konsep ketakterhinggaan actual, ketakterhinggaan tidak dibangun secara bertahap melalui proses perulangan, tapi memang ada begitu saja, memang dianggap sedemikian adanya. Ketakterhinggaan aktual didapat dengan langsung menyebut “seluruh bilangan”, ketimbang memikirkan atau menghitung satu per satu bilangan tersebut. Mengatakan “seluruh bilangan” akan secara otomatis merujuk pada keseluruhan bilangan yang mungkin ada, tanpa perlu disebutkan atau dipikirkan setiap bilangannya. Demikian juga ketika kita cukup mengatakan “sepanjang waktu”, maka itu akan mencakup keseluruhan mungkin waktu yang ada meskipun tak terhingga tanpa harus melalui proses iteratif tanpa henti.

Ketakterhinggaan aktual mungkin terasa seperti “cara curang” untuk menghindar dari masalah yang dibawa oleh ketakterhinggaan potensial, namun itu salah satu yang di paling bisa dilakukan jika memang ingin menerima adanya ketakterhinggaan. Masalah yang ditemui konsep ketakterhinggaan potensial bisa disebabkan oleh keterbatasan manusia dalam melakukan proses berulang tanpa henti, maka salah satu jalan keluar mengatasi masalah tersebut adalah dengan tidak melihat prosesnya namun langsng merujuk pada ketakterhinggaan itu sendiri. Meskipun masalah proses berulang teratasi, ketakterhinggaan aktual bukan bebas dari masalah. Konsep ketakterhinggaan aktual berdiri atas asumsi yang dari awal sudah dipegang bahwa ketakterhinggaan itu sendiri sudah pasti ada. Kita langsung anggap bahwa memang ada tak hingga banyaknya bilangan tanpa harus merisaukan setiap detail dari bilangan tersebut. Karena berdiri atas asumsi, konsep ketakterhinggaan aktual bisa dikatakan lemah. Meskipun begitu, itu satu-satunya cara agar ketakterhinggaan tetap bisa dipertahankan.

Pada awal berkembangnya konsep ketakterhinggaan, konsep ketakterhinggaan aktual ini memang terasa aneh dan sukar untuk dipahami. Ketakterhinggaan potensial menjadi cara paling paling sederhana dan mudah diterima untuk bisa menjangkau ketakterhinggaan, karena berasal dari proses-proses kecil yang bisa dibayangkan dan dipikirkan. Ketakterhinggaan potensial juga mengambil posisi aman dengan secara kabur menerapkan status “potensial” yang secara gambling bermakna “mungkin”, sehingga ketakterhinggaan itu tidak perlu diperjelas ada tidaknya, cukup diterima sebagai sesuatu yang mungkin. Seiring dengan berkembangnya pengetahuan di era modern, terutama matematika yang bermain dengan konsep-konsep secara rigid dan ketat, ketakterhinggaan aktual mulai diperhatikan lebih khusus. Ketakterhinggaan, yang awalnya sedari awal peradaban hanya mainan asing para pemikir yang kurang kerjaan, pada abad ke-19 mulai mendapatkan tempat sebagai sebuah entitas khusus matematis, karena akhirnya matematika modern yang punya cukup abstraksi untuk bisa menjinakkan konsep tak terhingga.

Perspektif Awal Matematis

Di antara semua cabang ilmu pengetahuan, hanya matematika yang akhirnya mengambil peran bermain dengan ketakterhinggaan. Tidak seperti ilmu lain yang dalam beberapa aspek terkait dengan dunia riil, matematika memiliki dunia idealnya sendiri, membuat konsep konstruktif seperti ketakterhinggaan menjadi objek yang bisa dibicarakan. Meskipun demikian, konsep ketakterhinggaan benar-benar secara fokus diteliti tidak lama ini, ketika matematika itu sendiri sudah hampir masuk era modern, sekitar abad ke-19. Sebelumnya, ketakterhinggaan sebenarnya sudah digunakan dalam pengembangan kalkulus pada abad ke-17, namun masih secara implisit karena mereka tidak benar-benar memperlakukannya sebagai sebuah entitas tersendiri. Kalkulus pada perkembangan awalnya berurusan dengan konsep yang serupa dengan ketakterhinggaan namun secara bentuk berbeda, yakni *infinitesimal* (sayangnya istilah ini tidak punya padanan bahasa Indonesia yang pas).

Sebelum pengembangan kalkulus, matematika masih terbatas pada aljabar dan geometri, yang notabene hanya mengurus hal-hal yang sifatnya berhingga. Dalam aspek geometri sendiri, konsep ketakterhinggaan hanya muncul sepintas secara tidak langsung dengan aksioma-aksioma geometri yang disusun oleh Euklides (*Euclid*). Salah satu dari aksioma tersebut mendeskripsikan bahwa dua garis lurus yang sejajar tidak akan pernah berpotongan. Secara implisit, ini mengimplikasikan ketakterhinggaan potensial karena kita harus melihat dua garis lurus ini sebagai objek yang bisa terus kita telusuri dan melihat bahwa mereka memang tidak akan bisa berpotongan. Penelusuran ini akan menghasilkan ketakterhinggaan potensial. Di sisi lain, aksioma ini bisa dipandang juga sebagai ketakterhinggaan aktual dengan secara utuh menganggap garis lurus itu memang tak berujung. Berhubung memang dalam konteks ini kita berbicara aksioma, maka keberadaan garis lurus yang tak berujung dan tidak pernah berpotongan dengan garis yang sejajar dengannya merupakan sebuah hal yang "dianggap ada", karena aksioma ini sebenarnya mendefinisikan apa yang dimaksud sebagai sebuah garis lurus dalam geometri. Jadi, seperti halnya ketakterhinggaan aktual yang memang seperti mengasumsikan adanya ketakterhinggaan itu sendiri, maka aksioma garis lurus ini mengasumsikan bahwa garis yang merentang tak berhingga ujung ke ujung itu ada, dan kalau itu ada, ia akan mematuhi sifat-sifat yang dideskripsikan oleh aksioma tersebut. Meski dapat dipandang sebagai ketakterhinggaan potensial, sebenarnya aksioma ini lebih secara langsng menyatakan ketakterhinggaan actual. Induksi yang menghasilkan ketakterhinggan potensial tidak menjadi perhatian utama.

Contoh lain munculnya konsep ketakterhinggaan secara implisit dalam geometri klasik adalah apa yang dikenal sebagai sifat Archimedes (*Archimedean property*). Sifat Archimedes menyatakan bahwa kalau kita punya 2 panjang yang berbeda, kita selalu bisa menemukan kelipatan yang satu sehingga melebihi yang lain. Artinya, kalau ada bilangan positif x dan y, selalu ada kelipatan n sehingga $nx > y$. Hal ini berlaku dua arah, sehingga ada juga m sehingga my > x. Sifat ini sebenarnya tercakup juga pada aksioma Geometri Euklides, namun dikemudian hari ditemukan bahwa Archimedes juga pernah menuliskannya, maka sifat ini dinamakan sifat Archimedes. Meskipun konteks awalnya adalah geometri, namun sifat ini mengimplikasikan bahwa tidak ada batas atas dari bilangan, karena sifat ini menyatakan setiap bilangan selalu bisa diperbesar. Kita ambil bilangan berapapun, kita selalu bisa menemukan bilangan yang lebih besar dari itu (dengan mengambil kelipatan dari bilangan lain). Dalam arah sebaliknya, sifat ini juga mengimplikasikan bahwa tidak ada bilangan positif terkecil. Untuk memahami hal ini, perlu sedikit mengubah pernyataan sifatnya menjadi bahwa kalau kita ambil suatu bilangan positif x, maka selalu ada n sehingga $nx > 1$ atau $\frac{1}{n} < x$. Jika kita lihat bentuk ini baik-baik, maka ini berarti bilangan positif x sekecil apapun, selalu tetap ada bilangan positif lain yang lebih kecil dari itu. Kita akan lihat bahwa di kemudian waktu, sifat ini sangat krusial dalam diskursus ketakterhinggaan. Sifat Archimedes menyatakan 2 hal sekaligus, bahwa himpunan bilangan positif tidak punya elemen terkecil sekaligus tidak punya elemen terbesar. Mengalikan dan membagi bilangan positif bisa dilakukan tanpa henti. Implikasi ini pada awalnya kurang memberi dampak apa-apa, namun kelak menjadi komponen penting dalam pengembangan kalkulus, yang secara perlahan memberi gambaran lebih jelas ketakterhinggaan.

Selain contoh-contoh ini, objek matematika pada awalnya jarang bersentuhan dengan konsep ketakterhinggaan. Terlebih lagi, matematika pada awal perkembangannya masih merupakan alat yang sifatnya aplikatif, sehingga lebih banyak terkait dengan objek-objek riil, yang jelas pasti berhingga. Selama manusia masih hanya berurusan dengan aspek-aspek langsung dari realita keseharian, maka sebenarnya konsep tak terhingga tidak akan pernah terurus dan hanya menjadi diskursus wilayah metafisis yang abstrak. Baru ketika sains berkembang dan muncul kebutuhan untuk mendefinisikan konsep perubahan secara lebih sistematis, konsep ketakterhinggaan mulai disinggung. Konsep perubahan pada dasarnya bukan hal yang mudah untuk diformulasikan. Perubahan hanya dapat diukur dalam suatu interval, karena apa yang berubah akan baru terasa bila diukur atau diamati pada waktu yang berbeda. Yang menjadi masalah kemudian adalah, bagaimana cara mengukur perubahan di suatu waktu. Sebagai contoh, kita dapat mengukur kecepatan suatu mobil dengan melihat perpindahannya pada suatu selang waktu. Ketika mobil tersebut menempuh jarak 5 meter dalam 5 detik, maka kita katakan kecepatannya 1 meter per detik. Akan tetapi, bagaimana cara mengukur kecepatan mobil itu pada suatu waktu yang instan? Bukankah mobil bergerak kalau kita potret dengan suatu kamera pada suatu waktu terlihat seperti diam saja? Kita baru tahu mobil itu bergerak ketika diamati sepanjang suatu durasi.

Masalah ini, yang dikenal sebagai perubahan instan, memaksa Newton dan Leibniz pada abad ke-19 untuk menyinggung konsep ketakterhinggaan secara tidak langsung dan melahirkan kalkulus.

Kalkulus dan Infinitesimal

Perubahan memang hanya bisa didefinisikan dalam suatu interval waktu. Masalah perubahan instan adalah kita ingin dapat mengukur perubahan dalam waktu yang instan, alias interval waktunya nol. Padahal, ketika interval waktunya nol, maka perubahanannya menjadi tidak terdefinisi, karena secara konsep tidak ada perubahan dalam waktu yang diam, dan secara matematis pun pembagian terhadap nol itu dilarang. Karena melihat perubahan pada waktu yang instan adalah mustahil, maka kita sebenarnya cukup melihat perubahan tersebut pada suatu interval waktu yang sangat singkat. Untuk mengakali hal tersebut, kita dapat mengukur perubahan yang terjadi dengan terus mengecilkan interval waktu pengamatan. Proses pengecilan ini harus dipastikan sedekat mungkin dengan nol, tapi jangan sampai mencapai nol. Bagaimana melakukannya? Ya, dengan pembagian. Membagi bilangan secara bertahap akan terus menghasilkan bilangan yang lebih kecil. Mekanisme lainnya, kita bisa terus perlahan memperbesar pembaginya, sehingga lama kelamaan pasti dapat bilangan yang mengecil dan membentuk barisan berikut $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots.$

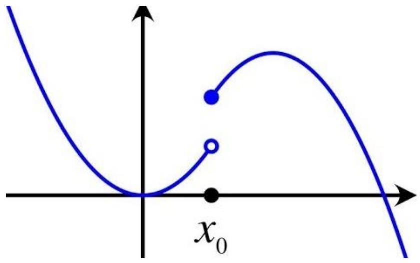
Pengecilan dalam bentuk pembagian ini menjadi semacam proses tunggal yang diulang secara terus menerus tanpa henti. Akibatnya, konsep ketakterhinggaan tidak bisa dihindari, paling tidak dalam bentuk ketakterhinggaan potensial. Proses ini menjadi cikal bakal konsep limit dalam kalkulus, yang secara sederhana bisa dipahami sebagai cara mendekati suatu nilai tanpa harus benar-benar mencapai nilai tersebut. Untuk bisa demikian, kita hanya memerlukan proses "pendekatan" yang tidak pernah berhenti. Ketakterhinggaan potensial dalam hal ini tidak akan pernah bisa jadi ketakterhinggaan actual karena tujuan dari konsep limit adalah agar keaktualan itu memang tidak pernah tercapai. Karena matematika selalu berusaha memiliki konsep yang jelas terdefinisi, maka proses seperti ini pun diformulasikan dengan baik. Definisi limit diformulasikan sedemikian rupa sehingga pendekatan yang dilakukan tidak perlu melalui proses induksi tak terhingga. Ketika konsep limit ini digunakan untuk perhitungan perubahan instan, lahirlah konsep turunan atau derivaitif.

Limit dan turunan menjadi pijakan awal area baru matematika yang sebelumnya tak pernah terjelajahi, yakni area infinitesimal, yang kemudian akan berkembang menjadi cabang matematika analisis dengan kalkulus sebagai pintu gerbangnya. Pada titik ini, matematika belum bersentuhan secara langsung dengan konsep tak terhingga, namun pada dasarnya konsep infinitesimal sendiri sudah memberi jejak awal penanganan tak terhingga di matematika. Infinitesimal sebenarnya secara sederhana dapat dipahami sebagai bilangan yang sangat kecil, sangat dekat dengan nol. Akan tetapi, konsep seperti ini membutuhkan proses tanpa henti yang memicu ketakterhinggaan potensial. Infinitesimal menjadi konsep awal dari ketakterhinggaan.

Salah satu aspek penting yang muncul dari konsep infinitesimal adalah seberapa kecil jarak antar dua nilai bisa dikecilkan. Akan tetapi, konsep ini justru memang memastikan bahwa jarak itu bisa menjadi sekecil mungkin, namun tidak benar-benar ketemu. Konsep infinitesimal sebenarnya telah ada cukup lama, namun dalam bentuk paradoks dan sebatas ide-ide abstrak. Salah satu kemunculan awal gagasan infinitesimal adalah paradoks Zeno, yang telah diilustrasikan sebelumnya. Zeno pada dasarnya memiliki banyak paradoks dan semua merupakan gagasan tidak langsung dari konsep infinitesimal. Salah satu bentuk lain dari paradoks Zeno adalah paradoks dikotomi, yang mengilustrasikan seseorang, sebutlah Atlanta, yang berusaha untuk menempuh suatu jalan A ke suatu tempat X. Untuk bisa ke X, Atlanta tentu harus menempuh setengah jalan A. Untuk bisa mencapai setengah A, Atlanta tentu harus menempuh juga setengah dari setengah A, atau seperempat A. Proses ini dapat diulang terus hingga untuk bisa mulai jalan, Atlanta harus menempuh langkah seperdelapan X, seperenambelas X, dan seterusnya. Namun proses membagi dua jarak ini bisa dilakukan terus menerus. Induksi ini berakibat Atlanta harus menempuh tak hingga banyaknya "langkah", yang membuat Atlanta tidak pernah bisa berangkat atau mencapai X. Paradoks ini, maupun paradoks Akhiles dan Kura-kura, mengimplikasikan suatu proses pengecilan bilangan terus menerus tanpa henti. Proses ini menghasilkan konsep infinitesimal secara tidak langsung.

Apa yang dikemukakan Zeno pada awalnya memang terasa seperti paradoks dan kesimpulannya tidak masuk akal. Paradoks ini baru dapat diselesaikan dengan formulasi yang lebih ketat terkait infinitesimal dalam kalklulus. Dalam konsep limit, suatu fungsi dapat "dihitung" pada suatu titik dengan melihat perilakunya di sekitar titik tersebut. Pada konteks awalnya, ketika berusaha menghitung perubahan instan dimana fungsi perubahan (kecepatan) tidak dapat terdefinisi pada waktu instan atau ketika intervalnya nol, konsep limit dikembangkan untuk bisa tetap menghitung perubahan namun dari nilai fungsi tersebut ketika intervalnya dekat nol. Kita sebut hal ini limit fungsi di sekitar nol. Dalam konteks paradoks Akhiles, fakta bahwa pada setiap "langkah"-nya Achiles selalu mendekat ke kura-kura cukup untuk menyimpulkan bahwa Akhiles akan mencapai Kura-kura. Jika kita ibaratkan jarak antara Akhiles dan Kura-kura sebagai sebuah fungsi terhadap "langkah", maka ketika fungsi ini mengecil terus mendekati nol seiring dengan langkah tersebut dilakukan, maka kita sudah dapat katakana fungsi ini akan mencapai nol. Loh, terus bukannya itu masalahnya? Awalnya memang terasa masalah, namun perlu diperhatikan bahwa akar masalahnya ada pada "langkah" yang dilakukan. Zeno mendeskripsikan proses Akhiles mengejar Kura-kura dalam langkah-langkah kecil yang berulang dan mengungkapkan paradoks muncul karena langkah ini harus dilakukan terus menerus tanpa henti tanpa bisa Akhiles mencapai Kura-kura. Padahal, langkah ini tidak perlu dilakukan. Konsep limit menyelesaikan ini dengan memformulasikan bahwa agar fungsi bisa dihitung di sekitar (mendekati) suatu titik, maka cukup dibuat kondisi umum yang bisa dibuktikan secara formal.

Secara intuitif, limit suatu fungsi f(x) ketika x mendekati p sama dengan L jika f dibuat sedekat mungkin dengan L, x selalu bisa dibuat cukup dekat ke p. Artinya, kedekatan f ke L sepadan dengan dekatnya x ke p. Untuk memudahkan pemahaman, bisa dibayangkan kebalikan dari ini, bahwa kalau suatu fungsi tidak ber-limit di L, maka ketika kita ingin membuat x sangat dekat ke p, f malah berada cukup jauh dari L. Ini memastikan kalau x pada akhirnya mencapai p, f itu akan ke L. Definisi ini dalam bentuk formalnya sangatlah ketat namun untuk tujuan kesederhanaan penjelasan tidak akan saya cantumkan di sini. Yang perlu diperhatikan adalah bahwa definisi limit berhasil membuat pendekatan tanpa perlu adanya induksi ketakterhinggaan.



Konsep infinitesimal terbangun dari konsep "kedekatan" dalam limit ini. Karena limit selalu berbciara tentang jarak suatu bilangan ke bilangan lain yang berusaha didekati. Limit berusaha melihat nilai fungsi ketika variabelnya sangat dekat tapi tidak tepat sama dengan suatu titik, maka kedekatan ini dapat dilihat sebagai jarak yang sangat sangat kecil mendekati nol tapi tidak sama dengan nol.

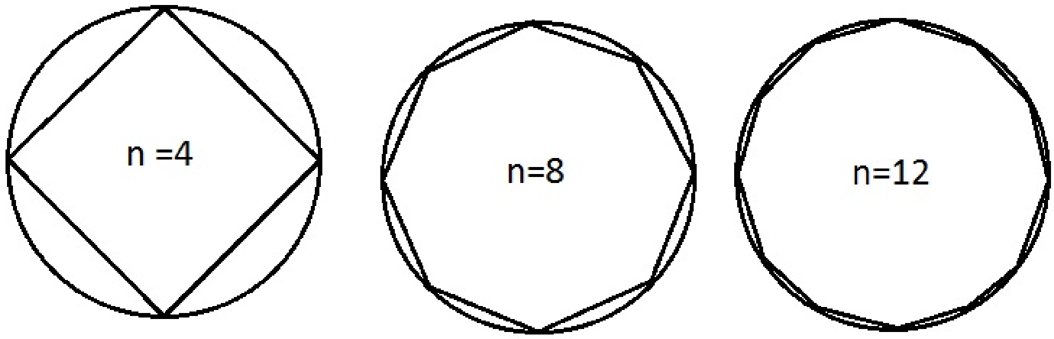
Kontinuitas dan Bilangan Riil

Bersama dengan konsep infinitesimal, usaha awal matematikawan untuk menangani ketakterhinggaan melalui kalkulus juga melahirkan konsep lain yang dikenal sebagai kontinuitas. Konsep kontinuitas sebenarnya sudah berkembang dalam beberapa bentuk sejak pra-kalkulus, namun mulai terangkatnya infinitesimal dalam kalkulus membuat konsep kontinuitas mendapat tempat yang lebih kokoh.

Untuk memahami prinsip kontinuitas, coba bayangkan ketika kita membangun konsep infinitesimal dengan membagi terus suatu bilangan sampai begitu dekat dengan nol. APa yang menjamin proses ini dapat dilakukan terus menerus tanpa henti? Satu-satunya cara agar induksi ini berhasil adalah menganggap bahwa bilangan memang selalu bisa dibagi. Dengan kata lain, tidak ada "bilangan terkecil" dimana bilangan itu tidak dapat dibagi lagi. Konsep ini sukar sekali masuk akal sebenarnya, karena dalam pandangan yang realistik harusnya ada sesuatu yang sangat fundamental yang tidak dapat dibagi lagi. Pandangan ini, yang dulu dikenal sebagai atomisme (dan dengan ini elemen terkecil semesta disebut dengan atom), juga menjadi aspek utama sains sampai sekarang bahwa pasti ada elemen terkecil yang tidak dapat dibagi lagi. Konsep pembagian secara tak terhingga ini hanya mungkin terjadi di dunia abstrak seperti matematika, namun tetap membutuhkan landasan konsep yang kuat.

Jika ingat penjelasan sebelumnya terkait sifat Archimedes, sesungguhnya permasalahan ini sudah tertutup dengan adanya sifat itu. Akan tetapi, karena sifat Archimedes berawal dari konteks geometri, dan formulasinya masih bersifat aksiomatik, dari sifat ini kemudian berkembang gagasan kontinuitas, bahwa bilangan itu bersifat kontinu, yang artinya tidak ada celah sedikit dalam deretan bilangan. Ketika kita ambil dua bilangan berbeda, sedekat apapun kedua bilangan tersebut, maka selalu ada bilangan lain di antaranya. Konsep kontinu sekarang dipahami menjadi bentuk yang berbeda dari bentuk diskrit, yakni bentuk dimana suatu entitas bisa dipandang dalam sekian jumlah.

Prinsip kontinuitas dalam formulasi yang lain berbicara mengenai kalau suatu aturan berlaku dalam bentuk berhingga, maka ia juga pasti berlaku dalam bentuk tak berhingga. Formulasi ini diberikan untuk memperjelas bahwa pembagian tanpa henti itu dimungkinkan. Dengan formulasi seperti ini, prinsip kontinuitas dapat diimplementasikan secara lebih luas. Salah satu contoh implementasi kontinuitas adalah menghitung luas lingkaran dengan membuat poligon yang jumlah sisinya ditambah terus tanpa henti. Semakin kita menambah banyaknya sisi poligon, semakin kecil panjang sisi poligon tersebut. Dengan kata lain, kita membagi terus panjang sisi poligon hingga panjangnya infinitesimal. Hal ini hanya akan dimungkinkan dengan prinsip kontinuitas, bahwa pembagian sisi poligon ini selalu dimungkinkan tanpa henti meskipun panjang sisinya sudah sangat kecil.



Prinsip kontinuitas juga memberi sedikit petunjuk atas apa yang kemduian dikenal sebagai himpunan bilangan riil. Dalam hirarki bilangan, paling tidak dikenal 3 himpunan bilangan. Yang paling dasar adalah himpunan bilangan asli. Himpunan ini disertai dengan semua negatifnya menjadi himpunan bilangan bulat. Membagi antar bilangan bulat akan menghasilkan bilangan rasional, yang sebenanrya merupakan bilangan yang dituliskan dalam bentuk rasio 2 bilangan bulat. Ketika melakukan pembagian tanpa batas pun, himpunan bilangan rasional sebenannya cukup untuk itu, karena dari definisi, membagi itu sendiri masih tetap menghasilkan bilangan rasional. Akan tetapi, pada perkembangan matematika, telah banyak ditemukan bilangan-bilangan yang ternyata terbukti tidak dapat dituliskan dengan cara apapun dalam rasio 2 bilangan bulat, seperti π, $\sqrt{2}$, dan e. Bilangan-bilangan ini membuka kemungkinan semesta bilangan yang lebih besar dari himpunan bilangan rasional. Akan tetapi, keseluruhan semesta bilangan ini belum diketahui, sehingga pada saat itu masih cukup disebutkan bahwa bilangan yang tidak bisa ditulis dalam rasio 2 bilangan bulat sebagai bilangan irasional. Seberapa banyak bilangan irasional belum dapat diketahui karena tentu sangat sulit melacak suatu hal yang tidak bisa dikonstruksi dengan baik.

Adanya bilangan irasional cukup memberi gambaran matematikawan bahwa dalam himpunan bilangan rasional belum "cukup kontinu", artinya jika bilangan rasional dijejer dalam suatu garis, pada garis tersebut masih terdapat banyak bolong, tidak benar-benar tersambung sepenuhnya. Kelak, diketahui bahwa kontinuitas adalah sifat yang hanya dimiliki himpunan bilangan riil, yakni gabungan bilangan rasional dan bilangan irasional. Berbeda dengan bentuk bilangan lain yang dapat dikonstruksikan dengan sistematis, seperti bilangan bulat sebagai ekstensi negative dari bilangan asli dan bilangan rasional sebagai rasio dari bilangan bulat, bilangan riil ada tanpa dipahami "asal mula"-nya. Himpunan bilangan riil tidak bisa dinafikan sehingga bilangan riil pada mulanya hanya didefinisikan secara aksiomatik, atau dianggap memang ada begitu saja (berdiri sendiri tanpa terkait dengan bilangan yang lebih sederhana). Baru kemudian pada akhir abad 19, melalui apa yang dikenal sebagai barisan Cauchy dan potongan Dedekind, bilangan riil dapat diberi konstruksi yang sistematis.

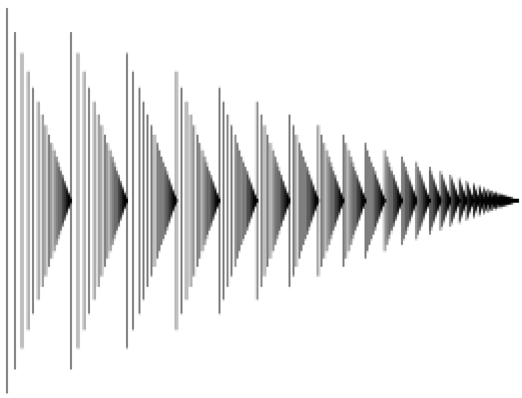
Dalam hal kontinuitas, ketakterhinggaan potensial dipastikan harus mencapai actual, karena yang dimaksud di sini adalah proses sederhana yang berhingga, bila diteruskan akan tetap memiliki makna ketika benar-benar mencapai tak terhingga. Meskipun begitu, pencapaian ketakterhinggan aktual ini sebenanrya sifatnya tidak bisa dibuktikan, sehingga merupakan sebuah "asumsi", atau bisa disebut sebagai prinsip heuristik. Dengan kata lain, prinsip bahwa bilangan selalu dapat terbagi terus tanpa henti adalah suatu hal yang ditetapkan di awal. Meskipun tidak terjamin menjadi kebenaran mutlak, prinsip heuristic seperti kontinuitas dipertahankan karena bermanfaat dan memiliki banyak implikasi yang mudah diterima (ini mengapa kontinuitas disebut prinsip heuristic karena prinsip ini sifatnya "cukup bagus").

Revolusi Cantor: Ordinal

Sampai titik ketika prinsip kontinuitas, infinitesimal, dan kalkulus berkembang, matematika masih bersifat praktikal. Artinya, matematika berkembang sebagai sebuah alat yang bisa digunakan untuk menyelesaikan persoalan-persoalan. Matematika masih belum menyentuh aspek esensial yang mendasari di bawahnya. Konsep-konsep yang sudah mulai menyinggung ketakterhinggaan seperti infinitesimal dipegang karena berguna, tapi belum ada yang benar-benar kemudian mempertanyakan esensi dan status kebenaran dari konsep ini. Apa sebenarnya ketakterhinggaan masih dianggap pembicaraan filosofis ketimbang pembicaraan matematis. Semua berubah ketika pada akhir abad 19 datang Georg Cantor, seorang jenius maniak di bidang matematika pencetus teori himpunan, seseorang yang karyanya membuat syok banyak orang, ditentang berbagai matematikawan dan filsuf, sampai Leopold Kronecker, salah seorang matematikawan menyebut dia sebagai "*scientific charlatan*", a "*renegade*" and a "*corrupter of youth*". Matematika yang dibangun atas teori himpunan karyanya pun disebut oleh Wittgenstein sebagai *utter nonsense.*

Apa yang membuat karya Cantor begitu kontroversial? Ada banyak sebenarnya. Ia membangun satu set teori yang mengubah cara berpikir matematis pada era tersebut, yang awalnya banyak terfokus pada aplikasi fisis, ke arah yang lebih abstrak dan fundamental. Awal-awal karya yang dibentuk oleh Cantor terkait dengan teori bilangan, yang dari situ, ia mulai membangun apa yang disebut sebagai ordinal. Bilangan ordinal (*ordinal number*, atau sering disebut *ordinal* saja) merupakan ekstensi dari angka ordinal (*ordinal numeral*). Angka ordinal sendiri adalah angka (*numeral*) yang biasa digunakan untuk menunjukkan suatu urutan (*order*), seperti pertama, kedua, ketiga, keempat, dan seterusnya. Dalam konteks matematika, numeral seperti itu tetap dinotasikan dengan 1, 2, 3, dan seterusnya. Angka ordinal merupakan aspek bilangan yang selalu digunakan sehari-hari, namun karena itu, angka ordinal selalu terbatas pada angka yang berhingga. Cantor mengekstensi angka ini jadi konsep bilangan ordinal. Konsep yang dibangun Cantor sebenarnya cukup rumit dan terlalu abstrak untuk dipaparkan di sini. Ia mengajukan suatu cara untuk membangun ordinal secara bertahap dan sistematis dengan landasan yang kuat. Artinya, apa itu dua dan apa hubungannya dengan satu terdefinisikan dengan jelas. Untuk bisa mengatasi konsep takterhingga, Cantor juga memperkenalkan *infinite ordinal* atau ordinal tak hingga, dengan bentuk terkecilnya adalah ω, yang merupakan "batas" dari bilangan asli (disebut juga *limit ordinal*). Setelah ω, enumerasi masih dapat dilanjutkan menjadi $\omega + 1$, $\omega + 2$, dan seterusnya, yang kemudian dilanjutkan $\omega + \omega$ atau 2ω, $2\omega + 1$, $2\omega + 2$, dan seterusnya hingga mencapai 3ω, 4ω, dan seterusnya. Masih bisa lanjut? Tentu saja, setelah itu ada ω^2, ω^3, ω^4, dan seterusnya sampai ω^ω, dan ω^{ω^ω}, dan seterusnya. Ini bisa dilanjutkan terus menerus tanpa henti. Apa yang baru dari ini? Setiap ordinal itu ada definisi matematisnya yang jelas dan induksi urutan ordinalnya dilakukan secara sistematis.

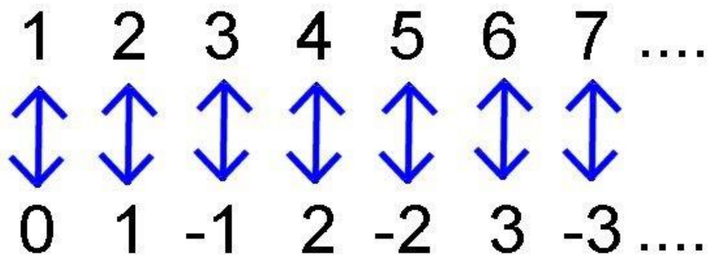
Dengan konsep ordinal ini, ia mengajukan konsep awal dari *transfinite* (trans-hingga), yakni *infinite* yang tidak benar-benar *infinite*. Cantor mengemukakan bahwa ketakterhinggaan itu sendiri bertingkat. Bilangan trans-hingga berarti sebuah bilangan yang lebih besar dari semua bilangan berhingga (1, 2, dan seterusnya), namun tidak benar-benar tak terhingga secara mutlak sehingga tidak ada bilangan lain yang lebih besar darinya. DI atas bilangan trans-hingga, bisa ada bilangan trans-hingga lain. Dalam konteks ordinal, setelah "ketakterhinggaan" bilangan asli dicapai dengan ω, maka setelah itu tetap ada ordinal lain. Cantor pun menyebut barisan objek yang dienumerasi dengan ordinal sebagai barisan transhingga. Apa yang dilakukan Cantor adalah mencampurkan ketakterhinggaan potensial menjadi aktual, sehingga yang aktual pun bisa menjadi potensial kembali dengan menganggap setelah tak hingga yang satu, ada tak hingga yang berikutnya.



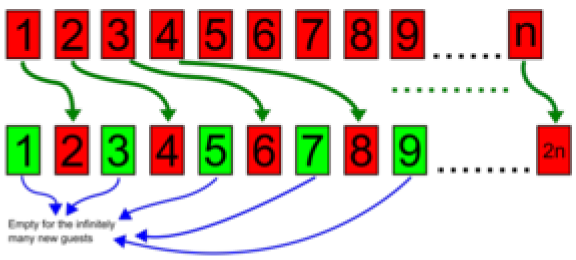
Cantor tentu saja tidak berhenti di konsep ordinal. Justru yang membuat ia kontroversial adalah karya ia selanjutnya. Matematika sebelum Cantor berkembang dengan banyak konsep yang masih bersifat longgar karena memang hanya fokus pada kegunaan, yang pada akhirnya tidak diberi perhatian khusus untuk diberi definisi dan fondasi yang kuat. Salah satu konsep longgar tersebut adalah ordinal, yang oleh Cantor, sebagaimana dijelaskan sebelumnya, disistemasi dengan baik. Konsep longgar selanjutnya yang ia telaah adalah himpunan, dimana sedari awal peradaban dianggap hal yang begitu trivial (sangat biasa) dan sudah sangat jelas sehingga tidak memerlukan konsep yang rinci. Pada masa itu, himpunan adalah sesederhana koleksi dari objek. Telah terbangun juga pada masa itu konsep sederhana bahwa ada himpunan yang isi objeknya berhingga, sebagaimana himpunan benda-benda riil, dan himpunan yang isi objeknya tak berhingga, seperti himpunan bilangan asli. Himpunan dengan banyak isinya tak berhingga dianggap memiliki "ukuran" yang sama saat itu, karena yang namanya tak berhingga tentu sama-sama "besar". Ketakterhinggaan dianggap mutlak, sesuatu yang lebih besar dari hal lain dan tak ada yang lebih besar darinya. Bilangan yang menyatakan ukuran himpunan di matematika memiliki nama sendiri, yakni bilangan kardinal, atau kardinalitas. Dengan terminilogi ini, semua himpunan dengan tak hingga banyaknya isi selalu memiliki kardinalitas yang sama dengan himpunan bilangan asli. Ketakterhinggaan bilangan asli dalam konteks kardinalitas diberi symbol $\aleph_0$, membedakannya dengan ω yang merupakan keakterhinggaan bilangan asli dalam konteks ordinal.

Sebenarnya, konsep seperti ini pun sudah sukar untuk diterima akal. Dengan begini, himpunan bilangan asli, ditambahkan sejumlah bilangan lain, tidak akan bertambah ukurannya, karena ukurannya sudah "mentok", tak terhingga mutlak. Himpunan {1,2,3, …} dengan {0,1,2,3,…} atau dengan {-1,0,1,2,3,…} memiliki ukuran yang sama. Tak terhingga adalah batas atas yang tidak bisa ditambah lagi. Tidak boleh ada elemen yang lebih besar dari $\aleph_0$.

Lebih ekstrimnya lagi, banyaknya bilangan bulat akan sama dengan banyaknya bilangan asli itu sendiri, ketika jelas dalam intuisi kita tentu saja bilangan bulat seharusnya lebih banyak karena tersusun atas bilangan asli dan negatifnya. Matematikawan membangun konsep untuk menjamin hal ini, yakni konsep korespondensi satu-satu, bahwa dua himpunan dikatakan memiliki kardinalitas sama ketika bisa dipasangkan setiap anggotanya satu-satu. Sebuah korespondensi satu-satu memang dapat dibangun dari bilangan bulat dan bilangan asli, yakni dengan cara memetakan setiap bilangan ganjil dengan bilangan positif dan setiap bilangan genap dengan bilangan negatif. Dengan konsep seperti ini, memang kemudian dipandang bahwa tak terhingga itu selalu bersifat mutlak, sebagai sesuatu yang menjadi batas atas segala enumerasi dan ukuran. Tidak ada yang lebih besar dari tak terhingga. Hal ini sesuai dengan apa yang memang berkembang sebelumnya bahwa ketakterhinggaan, baik ketakterhinggaan potensial ataupun aktual, adalah konsep yang menyatakan aspek yang begitu besar tanpa batas sehingga menjadi batas segala sesuatu yang lainnya.



David Hillbert mengilustrasikan konsep ketakterhinggaan mutlak ini dengan suatu eksperimen pikiran yang dikenal sebagai Paradoks Hotel Hillbert. Ketika suatu hotel punya takhingga banyaknya kamar, maka sepenuh-penuhnya hotel tersebut oleh tamu, maka pemilik hotel selalu bisa menggeser seluruh tamu sehingga tetap menyisakan kamar kosong. Pergeseran ini dimungkinkan karena memang tak terhingga merupakan batas atas. Sesuatu yang mutlak harus paling besar di antara semuanya, tentu tidak boleh membesar juga karena nantinya akan jadi lebih besar dari ia sendiri di awal. Itulah ketakterhinggaan. Hotel Hillbert mengilustrasikan banyak cara untuk memasukkan tamu baru ke hotel tersebut, walaupun hotel tersebut penuh. Bahkan, kalaupun datang tak hingga banyaknya tamu baru pun, semua tetap bisa dimuat ke hotel tersebut. Caranya? Persis seperti bagaimana kita memetakan bilangan bulat pada bilangan asli sebelumnya. Kita geser tamu yang sebelumnya menginap di kamar n ke kamar $2n$, sehingga kamar nomor ganjil akan kosong. Karena bilangan ganjil juga ada tak hingga banyaknya, maka semua tamu baru bisa dimasukkan ke kamar nomor ganjil.



Revolusi Cantor: Kardinal

Sebagaimana yang sudah kita lihat pada konsep bilangan ordinal, Cantor menggoyang konsep ketakterhinggaan mutlak dalam aspek enumerasi dengan menganggap bahwa ordinal itu selalu bisa diteruskan, meski bahkan sudah melewati batas ketakterhinggaan. Akan tetapi, yang Cantor lakukan pada bilangan ordinal mungkin hanya sebatas membangun suatu sistemasi agar bilangan ordinal ini selalu bisa dilanjutkan. Aspek lain dari bilangan, yakni kardinalitas, itu merupakan hal yang sedikit berbeda. Bilangan kardinal ditentukan berdasarkan korespondensi satu-satu antar himpunan. Untuk bisa mendapatkan bilangan kardinal yang lebih tinggi dari kardinalitas himpunan bilangan asli, maka kita harus bisa mendapatkan himpunan yang memang lebih besar dari himpunan bilangan asli. Meski terkesan sepele, masalah seperti ini tidak mudah untuk diselesaikan, karena bahkan untuk himpunan bilangan rasional, yang terlihat sangat jelas seharusnya lebih besar dari himpunan bilangan asli pun, masih dapat dipetakan satu-satu dengan bilangan asli. Dalam hal ini, pembuktiannya harus dengan memperlihatkan suatu himpunan yang memang jelas isinya, bukan sekadar asumi atau pengandaian.

Salah satu kemungkinan adalah melihat konsep bilangan yang lebih kompleks dari bilangan rasional, yang mencakup bilangan rasional namun dengan tambahan elemen. Konsep bilangan yang bisa jadi kemungkinan tersebut adalah bilangan riil. Bilangan riil merupakan bilangan yang bisa berupa rasional atau irasional. Bilangan riil pada dasarnya juga memiliki narasinya sendiri, karena ia cukup baru diformulasikan pada masa itu. Himpunan bilangan riil menjadi kandidat dugaan Cantor sebagai himpunan yang ukurannya lebih besar dari $\aleph_0$. Akan tetapi, dunia matematika butuh bukti yang jelas, karena banyak hal yang terasa intuitif di matematika pada akhirnya tidak terbukti benar, seperti perbandingan kardinalitas himpunan bilangan bulat dengan kardinalitas himpunan bilangan asli, yang nyatanya sama ketika intuisi kita mengatakan tidak.

Cantor akhirnya kemudian berhasil mendobrak paradigma umum bahwa ketakterhinggaan bilangan asli adalah mutlak dengan mengajukan sebuah demonstrasi (dikenal sebagai argument diagonal Cantor) bahwa himpunan bilangan riil itu sebenanrya lebih besar dari himpunan bilangan asli. Artinya, ketika himpunan bilangan asli jelas berisi tak hingga banyaknya objek, ada yang lebih besar dari ketakterhinggaan itu sendiri. Cantor mengimplikasikan adanya hierarki atau tingkatan ketakterhinggaan, bahwa di atas tak terhingga ada ketakterhinggaan lainnya. Ia kemudian mengekstensi konsep trans-hingga di ordinal untuk berlaku juga dalam perihal kardinalitas. Dari sini, ω, yang merupakan ketakterhinggaan bilangan asli dari segi ordinal, dan $\aleph_0$, yang merupakan ketakterhinggaan bilangan asli dari segi kardinalitas, sama-sama merupakan trans-hingga, suatu ukuran yang sudah sangat besar, tapi belum menjadi yang terbesar.

Apa yang diajukan Cantor cukup mengguncang dunia matematika saat itu, karena konsep ketakterhinggaan yang selama ini dipahami terkstensi sedemikian rupa. Ketakterhinggaan bilangan riil kemudian disebut sebagai *continuum,* yang disimbolkan dengan c. Apa yang Cantor buktikan adalah bahwa $c > \aleph_0$. Nama kontinum diberikan karena ukuran bilangan riil ini terkait dengan sifatnya yang memenuhi prinsip kontinuitas secara lengkap. Kita akan lebih bisa membayangkan bahwa kontinuitas itu sesuatu yang bisa sangat-sangat besar dengan membayangkan bahwa sesuatu yang kontinu itu tidak bisa dienumerasi. Terlebih lagi, kontinuitas memungkinkan kepadatan yang juga tidak berhingga, artinya, suatu interval (misalkan garis bilangan dari 0 ke 1) itu bisa ditarik sepanjang apapun, atau dimampatkan sependek apapun, dia akan tetap kontinu dan banyak isinya tetap kontinum. Implikasinya, banyaknya bilangan riil dalam interval 0 sampai 1, dengan seluruh bilangan riil itu sendiri adalah sama. Sifat kontinuitas yang tercakup dalam bilangan riil juga membuat himpunan dengan kardinalitas kontinum disebut *uncountable* (tak terbilang), memberi kontras dari bilangan asli yang *countable* (terbilang).

Dalam pengembangan lebih lanjut, bahkan dimungkinkan adanya ketakterhinggaan yang lebih besar dari kontinum, yakni apa yang dikenal sebagai bilangan beth $\beth$. Bilangan beth menjadi enumerasi untuk hirarki ketakterhinggaan kardinalitas, dengan $\beth_0 = \aleph_0$ dan $\beth_1 = c$. Secara matematis, dapat dibangun suatu himpunan yang kardinaltiasnya $\beth_2 > c$ ataupun $\beth_3 > \beth_2$, dan seterusnya. Ketakterhinggaan bersifat hirarkis.

Apakah Tak Terhingga itu Nyata?

Apa yang dikemukakan Cantor menambah pertanyaan baru. Jika Cantor mendobrak pemahaman bahwa ketakterhinggaan bilangan asli adalah ketakterhinggaan mutlak, lantas apakah ketakterhinggaan mutlak itu ada atau tidak? Ini menjadi pertanyaan besar kala itu. Dalam level filosofis, ketakterhinggaan mutlak menjadi salah satu representasi ketakterhinggaan aktual, yang sejak awal selalu menjadi perdebatan. Cantor pada awalnya meyakini adanya ketakterhinggaan mutlak, yang ia notasikan dengan Ω. Sayangnya, terdapat 2 paradoks yang tidak bisa diselesaikan, yakni paradoks Burali-Forti dan paradoks Cantor (kedua nama paradoks ini diberikan oleh Bertrand Russell meskipun Burali-Forti maupun Cantor tidak merasa menemukan paradoks). Paradoks Burali-Forti menyatakan bahwa adalah mustahil terdapat suatu ordinal terbesar sedangkan paradoks Cantor menyatakan hal yang sama namun untuk kardinalitas. Kedua paradoks ini menutup kemungkinan adanya ketakterhinggaan mutlak yang actual.

Dalam tahap lebih lanjut, Cantor bergerak agak sedikit filosofis dengan mengungkapkan bahwa ketakterhinggaan aktual, kalaupun memang ada, memiliki 3 kemungkinan: pertama, sebagai sesuatu yang *supreme perfection*, yang ultima dan yang Maha, sepenuhnya independent dan terlepas dari dunia; kedua, sebagai sesuatu yang dapat terrepresentasikan dalam dunia fisik ini; ketiga, sebagai sesuatu yang bisa secara abstrak dipikirkan sebagai ukuran matematis. Dua yang terakhir, itu dianggapnya sudah jelas terbatas dan selalu punya kemungkinan untuk bertambah, maka dari itu sama saja dengan yang berhingga. Ketakterhinggaan aktual haruslah final sehingga tidak punya kemampuan untuk bertambah lagi.

Karena bahkan dari segi matematis pun Cantor sudah menunjukkan elemen matematika selalu bisa bertambah, maka yang tersisa hanya kemungkinan pertama, yakni bahwa ketakterhinggaan actual pastilah suatu hal yang tak terhingga secara mutlak, sesuatu yang sempurna di atas segalanya dan terlepas dari dunia ini serta tidak terjangkau. Ia pun akhirnya mengaitkan ketakterhinggaan mutlak ini pada Tuhan.

Sejak Cantor, ilmu matematika mulai bergerak ke arah fundamental, dengan pencarian yang lebih dalam atas fondasi matematika. Karena dengan temuan Cantor, dan beberapa temuan lainnya yang menguras isi kepala pada era tersebut, pertanyaan matematika mulai mengarah ke yang lebih esensial. Sayangnya, pencarian atas fondasi matematika berbuah nihil dengan dibuktikannya teorema ketaklengkapan Godel (terlalu panjang untuk dibahas di sini). Formulasi berbasis himpunan yang diinisiasi oleh Cantor berkembang menjadi teori himpunan aksiomatik yang sampai saat ini menjadi sistem paling dipegang dalam matematika. Bahkan akhirnya, terdapatnya himpunan yang berisi tak hingga banyaknya anggota (minimal seperti himpunan bilangan asli) menjadi aksioma sendiri, karena merupakan sesuatu yang tidak bisa diturunkan atau dibuktikan dengan cara apapun dengan aksioma dasar lainnya. Aksioma ini, yang dinamakan *axiom of infinity*, menjadi salah satu dari 9 aksioma ZFC (*Zermelo Frankel with Choice*) yang merupakan 9 aksioma fundamental sistem matematika berbasis teori himpunan. Kenapa sampai harus diaksiomatisasi? Apa yang Cantor lakukan sebelumnya, terutama pada ordinal, hanya konstruksi induksi yang mungkin dilakukan, sehingga sifatnya selalu potensial. Ordinal ω sendiri didefinisikan sebagai salah satu tipe ordinal yang ia sebut sebagai *limit ordinal*, sehingga memang, ketakterhinggaan aktual (tidak harus mutlak) dari awal tidak bisa ada tanpa "dianggap ada", alias ada-nya adalah melalui definisi atau aksioma. Bagaimana dengan kontinum? Himpunan dengan kardinalitas kontinum untungnya dapat diturunkan melalui aksioma-aksioma dan teorema-teorema lain yang ada, sehingga tidak perlu diaksiomatisasi. Demikian juga kadinalitas yang lebih tinggi (bilangan beth), tidak perlu diaksiomatisasi. Yang perlu menjadi aksioma hanyalah eksistensi ketakterhinggaan minimal, yakni ketakterhinggaan bilangan asli.

Semua urusan ketakterhinggaan, uniknya, selalu berkutat di wilayah abstrak, dari filosofis ke matematis. Pertanyaan selanjutnya adalah bagaimana eksistensi ketakterhinggaan dalam dunia fisis yang riil? Untuk bisa menjawabnya, perlu diketahui bahwa ketakterhinggaan adalah konsep yang berawal dari ukuran atau kuantitas, yang jelas merupakan aspek matematis. Sebagian konsep matematis memang berawal dari abstraksi dunia fisis. Akan tetapi, dalam perkembangannya, terutama ketika matematika semakin bergerak ke wilayah yang lebih abstrak dan fundamental, konsep-konsep yang muncul mulai tercerabut hubungannya dari dunia fisis. Akhirnya, sukar ditentukan apakah konsep-konsep matematika tersebut memang sungguh punya proyeksi di dunia fisis. Sebagai contoh, ketika berbicara ordinal maupun kardinal, keduanya dalam takaran berhingga jelas berasal dari konsepsi realita, yakni enumerasi objek dan ukuran dari koleksi objek. Ketika di matematika ordinal disistemasi sehingga selalu mungkin ditambah tanpa batas, apakah itu dapat dilakukan juga di realita?

Yang menjadi permasalahan adalah realita punya banyak keterbatasan. Sebagai contoh, kalaupun kita bisa bayangkan melakukan enumerasi suatu objek, sebutlah electron, secara terus menerus, pada akhirnya kita akan kehabisan seluruh electron di semesta ini. Satu-satunya cara enumerasi ini dapat terjadi tanpa henti adalah kemungkinan ada tak hingga banyaknya electron di semesta ini. Kemungkinan ini sendiri bisa menimbulkan masalah lain, karena electron itu menempati ruang, sehingga kalau ada tak hingga banyaknya electron di semesta, maka tentu hal tersebut mengimplikasikan tak terhingganya ruang semesta juga. Tak terhingganya ruang akan menghasilkan masalah lain, seperti bahwa karena tiap potongan ruang itu selalu memiliki energi, maka tak terhingganya ruang berarti mengimplikasikan tak terhingganya energi, yang menimbulkan pertanyaan lain terkait dari mana asalnya energi itu.

Proses berpikir ini akan terus memberi masalah baru yang lain bila diteruskan karena suatu hal yang tak terhingga dalam aspek fisis bukan hal yang dapat berdiri sendiri. Jika kita mundur Kembali ke enumerasi electron sebelumnya, maka ada masalah lain yang timbul, bahwa enumerasi itu sendiri membutuhkan waktu. Mengandaikan enumerasi tak hingga banyaknya electron berarti butuh tak hingga lamanya waktu. Padahal, waktu yang tak terhingga bisa memberi masalah lain lagi, seperti tidak adanya awal dan akhir, yang berarti menihilkan makna eksistensi. Terlebih lagi, dalam waktu yang bisa berlangsung selama tak hingga, semua kemungkinan bisa terjadi. Kejadian dengan peluang sekecil apapun, bila ruang kejadiannya tak terhingga, maka kejadian itu jadi mutlak pasti terjadi. Bila kita melihat aspek lain dari tak terhingga, seperti infinitesimal, maka kita akan menemui masalah serupa. Membagi bilangan mungkin selalu bisa dilakukan pada dunia abstrak matematis, tetapi pada dunia fisis, pembagian ini harus berhenti. Jika tidak, maka tidak ada konsep yang terbangun akan sangat berantakan, bahwa ada tak hingga banyaknya tipe partikel penyusun semesta ini, karena setiap partikel selalu bisa dibagi menjadi partikel lain yang berbeda. Ke arah manapun kita berpikir di dunia fisis, ketakterhinggaan selalu menemui konsep yang absurd.

Secara filosofis dan matematis pun, yang masuk akal hanyalah ketakterhinggaan potensial, dimana ada proses induksi yang bisa memungkinkan adanya potensi tercapainya ketakterhinggaan. Adapun ketakterhinggaan actual sendiri tidak bisa ada tanpa harus dianggap ada (diasumsikan atau diaksiomatisasi). Dalam dunia fisis, masalahnya, ketakterhinggaan potensial juga mustahil untuk dilakukan, karena proses fisis pasti membutuhkan aspek lain, seperti ruang, waktu, energi, massa, dan lainnya. Mengandaikan adanya proses tanpa henti yang bisa memungkinkan adanya ketakterhinggaan potensial berarti mengimplikasikan langsung bahwa ruang, waktu, atau aspek-aspek lainnya itu sendiri tak terhingga.

Di antara semua keterbatasan yang ada di realita dalam konsep ketakterhinggaan, keterbatasan terbesar dan tidak bisa ditembus adalah keterbatasan manusia sendiri sebagai pengamat dari realita. Kalaupun realita itu punya aspek tak terhingga, maka mansuia tidak akan pernah bisa mengamatinya. Pada akhirnya, kita bisa kembali ke pernyataan Cantor bahwa kalaupun ketakterhinggaan actual itu memang ada, maka satu-satunya kemungkinan adalah bahwa itu merupakan sesuatu yang terlepas dari dunia ini, independent, sempurna, dan tak terjangkau. Sampai titik ini, maka kita hanya bisa aksiomatisasi itu dalam bentuk keyakinan. Sebut saja itu Tuhan.

(PHX)

Matematika mungkin seperti ekstensi, sejauh mana manusia bisa berpikir, karena apa yang dapat ditelusuri matematika tidak kenal demarkasi. Di balik kebanggaan penemuan sains dan kemajuan teknologi, kemenangan sesungguhnya ada di matematika, yang memberi itu semua fondasi, meski sedihnya, fondasi itu sendiri masih berupa kabut yang menolak untuk ditelusuri.

Meskipun begitu, masih banyak celah, masih banyak harapan, bahwa jawaban ultima atas pertanyaan dasar manusia, mungkin ada di dalam matematika.

(PHX)