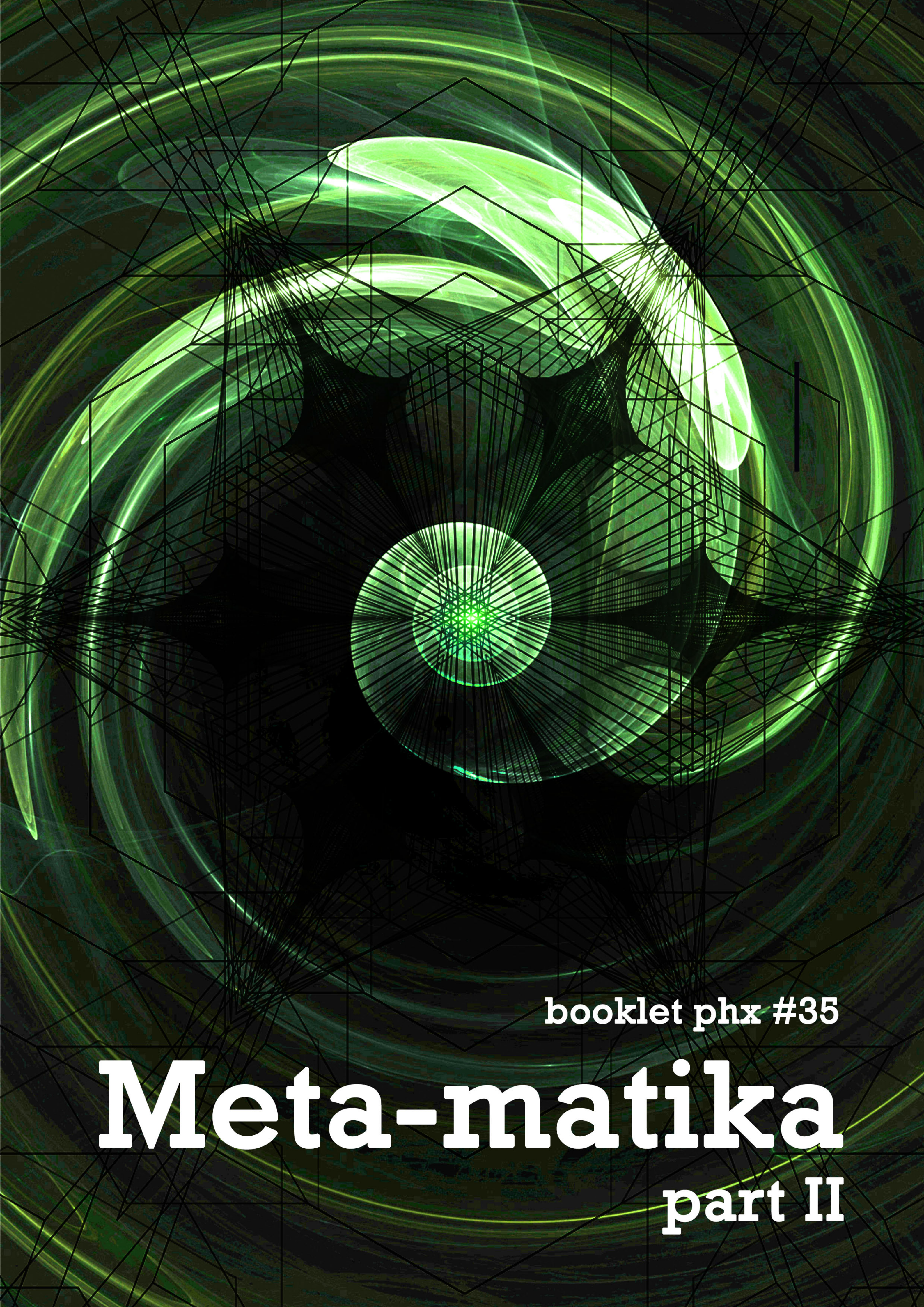


booklet phx #35

Meta-matika

part II

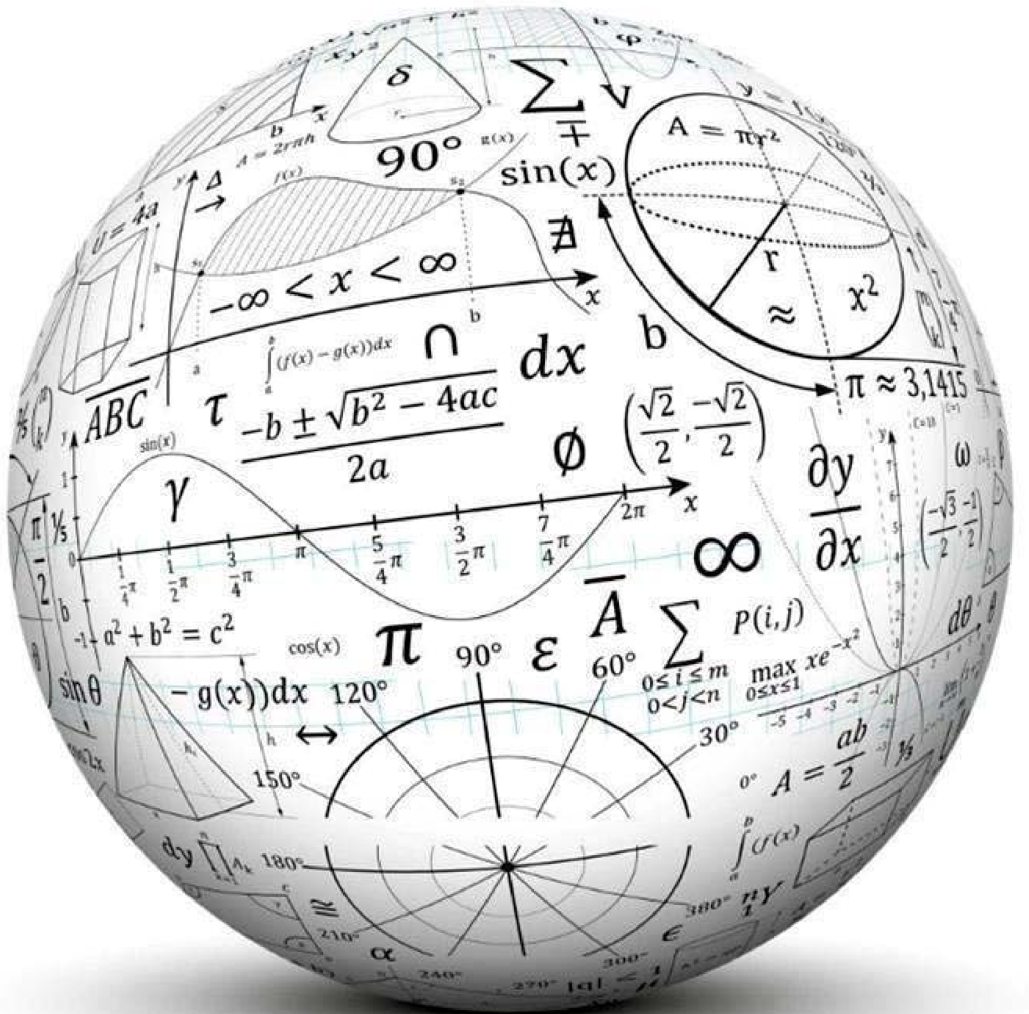
Booklet Seri 35

Metamatika II

Oleh: Phoenix

Matematika bukanlah entitas yang mudah dimengerti. Ia unik, partikular, terpisahkan, terasingkan, berbeda, khusus, bahkan terisolasi. Sukar menemukan posisinya dalam khazanah ilmu pengetahuan. Keberadaannya pun misteri, karena seakan ia ada begitu saja seiring manusia mengembangkan ilmu lainnya, di saat yang bersamaan ia sering tetiba hadir mengejutkan dalam beberapa aspek kehidupan.

(PHX)

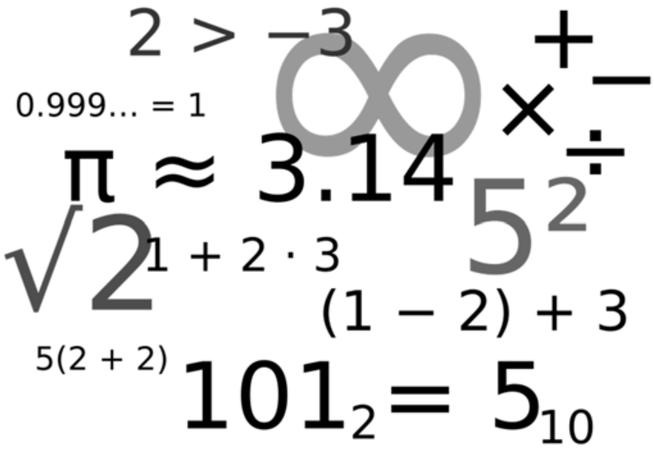

90°
sin(x)
A = πr²
−∞ < x < ∞
dx
b
π ≈ 3,1415
ABC
τ
−b ± √b² − 4ac
2a
∅
∂y
∂x
γ
∞
a² + b² = c²
cos(x)
π
90°
ε
60°
P(i, j)
−g(x))dx
120°
150°
30°
180°

Teruntuk

Semua mahasiswa matematika di seluruh Indonesia,

Dan siapapun yang mengagumi keindahan angka

Daftar Konten



$$\exists$$

Apa itu Ada? Sebuah perspektif matematis

Apa itu ada? Jika pertanyaan ini diajukan, mungkin yang ada dalam pikiran kita hanyalah "hah? Maksudnya?" dan terpatri hanya dalam kerutan dahi begitu saja. Bahkan memahami pertanyaannya saja bisa membuat pikiran melayang-layang dalam abstraksi yang bisa membuat kita mabuk dalam interpretasi filosofis. Tapi, tidak. Pertanyaan ini tidaklah perlu kita pikirkan terlalu jauh. Tulisan ini bukan ingin membahas "*Das Sein*" atau "*Geworfenheit*" ala Heidegger atau slogan "*l'existence précède l'essence* ala Sartre. Bukan. Pertanyaan yang hanya berisi 3 kata itu hanya akan berusaha kita jawab dalam konteks kalimat berikut:

untuk setiap $\varepsilon > 0$ ***ada*** $\delta > 0$ *sedemikian sehingga jika* $0 < |x - c| < \delta$, *maka* $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Yang pernah belajar kalkulus dipastikan pernah menemui kalimat tersebut. Itu hanyalah definisi limit biasa. Apa yang membuat muka kusut ketika kalkulus tentu bukanlah kata yang saya tebalkan, namun memahami seluruh kalimat itu sebagai sebuah definisi limit. Akan tetapi, justru yang akan saya bahas di sini adalah apa yang saya tebalkan. Apa sebenarnya makna "ada" pada kalimat tersebut? Kita sehari-hari menggunakan kata "ada" begitu sering hingga tidak pernah terlalu memikirkan maknanya. Di dunia matematika murni sendiri pun, kata "ada" seperti CO2 yang melayang-layang di udara, hampir selalu tertulis di setiap teorema. Saya sendiri merasa itu hal yang begitu *common sense* sehingga luput dari perenungan, hingga semua berubah ketika negara api menyerang.

Salah. Bukan negara api yang menyerang, tapi seorang kawan yang tetiba mengirimku pesan via Whatsapp di suatu pagi cerah di Kota Bandung yang dinginnya sering membuat mata mengantuk, yang berisi "Dit, definisi exist dalam matematika itu gimana?". Saya bahkan butuh jeda dalam kekosongan selama beberapa detik untuk kemudian menjawabnya. Jawaban atas pertanyaan itu sudah menjadi *tacit knowledge* bagi anak matematika sehingga lupa untuk ditransformasikan menjadi *explicit*. Heran, *tacit knowledge* bahwa $a + 0 = a$ saja dibongkar ulang untuk menjadi *formally explicit* dalam struktur aljabar, namun tidak untuk definisi ada. Menariknya, pertanyaan itu sesungguhnya merupakan PR dari seorang dosen Fisika Teknik pada mata kuliah Matematika Teknik II. Terlebih lagi, PR itu tidak hanya berisi satu pertanyaan, namun juga menanyakan "Apa yang dimaksud dari *defined* dari matematika?" (Kalimatnya saya *rephrase*, karena jika saya tuliskan "Definisi dari 'terdefinisi' itu apa", maka kepala akan terjebak dalam kebingungan siklik). Mengapa saya sebagai anak matematika justru tidak pernah diberi PR sedemikian rupa? Sudahlah. Maka dari itu, mari kita mulai perjalanan mencari ada.

Abstraksi

Makna ada dalam matematika memang sedikit sukar untuk disamakan dengan makna ada dalam realitas sehari-hari. Ke-ada-an dari suatu benda fisik ditentukan berdasarkan persepsional indra kita dalam mencerap benda tersebut, baik secara langsung ataupun tidak. Kita tahu bahwa ada makanan di meja karena kita bisa melihat benda itu, merabanya, mencium baunya, dan juga mengecap rasanya, atau, kita diberitahu oleh orang lain yang juga telah melihat, meraba, mencium, atau mengecapnya. Ada dikaitkan dengan posisinya dalam ruang-waktu realitas. Ketika suatu obyek mengisi suatu ruang pada suatu waktu tertentu, maka kita bisa katakan ia ada. Sayangnya, dalam ranah mekanika kuantum, persepsionalitas ini harus bisa diverifikasi. Sebagaimana Schrodinger menjelaskan dalam eksperimen pikirannya, seorang kucing dalam suatu kotak berisi perangkap racun bisa memiliki dua kemungkinan ke-ada-an sekaligus (superposisi kuantum), hingga ada pengamat yang memverifikasinya. Dalam wilayah mikroskopik, ke-ada-an bersifat probabilistik, hingga hanya bisa ditentukan berdasarkan suatu fungsi gelombang. Sayangnya, semua 'ada' dalam hal ini, baik yang klasik maupun kuantum, membutuhkan realita dan pengamat. Dalam ekstensinya lebih jauh, 'pengamatan' yang dilakukan tidak hanya dalam konteks indra fisiologis, namun juga pengalaman spiritual sebagaimana apa yang dialami Sidharta Gautama, Ibnu Arabi, ataupun Syekh Siti Jenar, sehingga mereka pun memverifikiasi 'ada' meski dalam hirarki realitas yang lain. Pengamatan yang dilakukan pun tidak harus langsung, sehingga 'ada' bisa diverifikasi berdasarkan rantai logika-rasional yang ditarik mundur dari atau maju terhadap realitas representasinya. Dengan itulah sains (bukan matematika) berkembang.

Pertanyaannya kemudian adalah, apakah matematika memiliki dua syarat 'ada' tersebut? Apa sesunggunya realita dalam matematika dan bagaimana mengamatinya? Kita semua ketahui bahwa matematika bukanlah pengetahuan empirik. Segala entitas dalam matematika merupakan hasil konstruksi dari apa yang dianggap 'ada' sebelumnya. Bilangan riil dikonstruksi dari bilangan rasional. Bilangan rasional dikonstruksi dari bilangan bulat. Bilangan bulat dikonstruksi dari bilangan asli. Bilangan asli dikonstruksi dari....? *Well*, dalam teori himpunan konstruksi bilangan asli sesungguhnya adalah pendefinisian induktif dari himpunan kosong, dan saya hampir melempar buku Teori Himpunan karya Enderton yang kubaca ketika memahami hal itu. Bahkan, jika digali lebih dalam, pertanyaan ini akan masuk lebih jauh menjadi sesungguhnya 'matematika berdiri di atas apa?' Demi mendapatkan jawaban yang memuaskan, maka penggalian itu sepertinya harus dilakukan, bahkan hingga ranah logika. Jangan khawatir, kita lakukan secara perlahan. Kita tidak akan masuk langsung dalam ranah simbolik matematika, karena pada akhirnya segala sesuatu harus mulai dari yang terbayangkan.

Predikat dan Properti

Mula-mula, kita definisikan dulu apa yang dimaksud sebagai predikat. Banyak definisi yang bisa kita gunakan, namun untuk kali ini saya cukup gunakan definisi sederhana. Pertama, predikat adalah frase/istilah yang memberi sifat (*property*) terhadap suatu subyek. Sifat (*property*) sendiri adalah segala kemungkinan entitas yang bisa diatributkan pada suatu subyek. Pada dasarnya, segala kalimat dalam bahasa selalu bisa dituliskan hanya dalam subyek dan sifatnya, predikat hanyalah perantara. Contoh sederhana, jika dikatakan "Serigala membunuh domba", serigala merupakan subyek, dan 'membunuh domba' merupakan predikat yang mengimbuhkan sifat "pembunuh domba" pada subyek serigala, sehingga kalimat tersebut sebenarnya bisa diubah menjadi "serigala adalah pembunuh domba".

Segala kalimat dalam aspek linguistik selalu bisa disederhanakan dengan subyek dan predikat (yang berisi sifat-sifat yang diberikan pada subyek). Sifat kemudian bisa dikenali dalam dua bentuk, yakni yang "*necessary*" atau "essensial", dan yang "*contingent*" atau "bergantung". Sifat esensial merupakan sifat yang mendefinisikan subyek itu sebagai suatu entitas terdefinisi. Artinya, bila sifat itu dihilangkan, maka subyek itu menjadi hal lain. Misal, jika dikatakan "saya bernafas setiap waktu", maka "bernafas setiap waktu" di sini merupakan sifat esensial terutama dalam konteks 'saya' sebagai manusia, beda dengan jika dikatakan "saya berekreasi setiap hari minggu", rekreasi merupkan sifat yang *contigent*, karena jika tidak berkreasi pun 'saya' tetap menjadi 'saya' atau 'manusia'. Akan tetapi, sifat *contigent* merupakan konsekuensi logis dari diri 'saya' sebagai manusia.

Dalam penjelasan di atas, definisi dari suatu entitas terkait dengan sifat esensial yang diberikan pada entitas tersebut. Contoh, bila kita definisikan kursi adalah entitas yang digunakan untuk duduk, maka sebongkah batu besar pun bisa kita sebut sebagai kursi bila kita bisa duduk di atasnya. Dalam ranah linguistik, berkutat terlalu lama dengan definisi bisa membawa kita dalam dekonstruksi bahasa ala Derrida, maka dari itu mari beralih ke ranah simbol terlebih dahulu, dari yang paling sederhana.

Kita ketahui bahwa definisi dari bilangan rasional adalah suatu q yang ekivalen dengan a/b dengan a dan b adalah suatu bilangan bulat. Di sini terdapat dua sifat esensial mendefinisikan suatu q adalah bilangan rasional, yakni $q = a/b$ dan a, b adalah bilangan bulat. Bila salah satu dari sifat esensial itu tidak terpenuhi maka suatu subyek gagal dikatakan sebagai bilangan bulat. Apakah kemudian q itu bersifat $q - q = 0$ merupakan sifat *contigency*, sifat yang tidak mendefinisikan q sebagai rasional (ini karena jika q bilangan irasional pun sifat itu masih terpenuhi), namun konsekuensi logis bahwa q rasional. Lantas bila demikian, kita bisa menciptakan definisi apapun terserah kita? Tentu tidak. Salah satu aspek penting dalam konstruksi matematika adalah konsistensi sistem. Matematika melakukan konstruksi yang sangat hati-hati dan terstruktur sedemikian sehingga tidak boleh ada sedikitpun pernyataan yang saling kontradiksi satu sama lain. Contoh sederhana dari hal ini adalah paradoks Russel yang terkenal. Russel mencoba mendefinisikan suatu himpunan (misalkan A) dengan anggota x yang memiliki sifat esensial bahwa x bukan merupakan anggota A, atau dalam notasi himpunan: $A = \{x | x \notin A\}$ (Dalam teori himpunan sifat esensial dari x ini disebut sebagai *entrance requirement* atau syarat masuk). Definisi ini tidak konsisten, karena bila x anggota A, syarat masuk tidak terpenuhi dan dengan itu x tidak bisa menjadi anggota A, dan sebaliknya bila x bukan anggota A, syarat masuk justru terpenuhi dan dengan itu x malah bisa menjadi anggota A. Mau bagaimanapun usaha kita mencari (mengonstruksi) himpunan A yang memenuhi definisi itu, tidak akan pernah bisa.

Sebagai komparasi atas paradoks di atas, kita bisa mendefinisikan himpunan $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 < 0\}$. Definisi ini tidak menghasilkan kontradiksi apapun, sehingga himpunan B terdefinsi, namun tidak ada x dalam bilangan riil yang memenuhi sifat esensial definisinya. Dalam hal ini, B sama dengan himpunan kosong, atau $B = \emptyset$. Perhatikan baik-baik, himpunan B terdefinisi dan ada (yakni himpunan kosong sendiri), namun anggota dari B tidak terdefinisi dan tidak ada. Ketika kita bicara mengenai anggota dari B, kita melihat konsistensi dari sifat esensial yang diberikan oleh *entry requirement* B, sedangkan ketika berbicara himpunan B sendiri, kita hanya melihat konsistensi dari keanggotaan B. Ini yang membuat himpunan A di atas tidak terdefinisi.

Terdefinisi dan Ada

Dari semua penjelasan di atas, kita bisa katakan bahwa suatu entitas matematika dikatakan "terdefinisi" (*defined*) apabila sifat esensial yang diberikan memungkinkan bahwa entitas itu ada, atau ekivalen juga dengan mengatakan bahwa sifat esensial yang diberikan tidak menghasilkan inkonsistensi. Apabila suatu entitas tidak terdefinisi, maka entitas itu tidak akan pernah ada. Lantas apa itu "ada"? Kita bisa mengatakan objek dalam sistem matematika itu 'ada', bila kita bisa mencari (mengonstruksi) obyek atau entitas dalam himpunan yang didefinisikan melalui sifat esensial dari ke-ada-an itu. Himpunan yang didefinisikan melalui sifat-sifat esensial ini saya sebut sebagai ranah. Kenapa? Karena matematika tidak punya 'realita' tempat mencari, sehingga segala entitas dalam matematika merupakan hasil konstruksi dalam suatu ranah tertentu. Dari sini, kita bisa lihat bahwa "ada" harus terkait dengan keanggotaan dari ranah yang didefinisikan. Apabila ranah tersebut berupa himpunan kosong, maka entitas yang diinginkan dikatakan "tidak ada".

Misal bila kita kembali pada definisi bilangan rasional, kita bisa membangun suatu ranah $\left\{q | q = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}\right\}$, dengan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat. Dalam contoh ini, karena bisa dibuktikan bahwa ranah ini bukan himpunan kosong, maka kita bisa pastikan bahwa bilangan rasional "ada". Berhubung saya ingin menjelaskan ini ke anak non-matematika juga, maka mari kita lihat contoh lain yang lebih sederhana. Misal kita definisikan himpunan bilangan genap k sebagai suatu entitas dengan sifat esensial bahwa k anggota bilangan bulat, dan $k = 2n$ untuk n bilangan bulat. Dari definisi itu, kita dapatkan ranah $\{k | k \in \mathbb{Z}, 2n = k, n \in \mathbb{Z}\}$. Untuk memastikan bilangan genap sendiri "terdefinisi", kita perlu memastikan bahwa ranah tersebut tidak kosong. Untuk itu, kita hanya perlu mengonstruksi suatu entitas yang memenuhi sifat esensial bahwa $k = 2n$ untuk suatu $n \in \mathbb{Z}$. Kita kemudian bisa memisalkan $n = 1$ untuk mengonstruksi satu bilangan genap 2. Karena itu ranah yang diberikan oleh definisi tidaklah kosong, sehingga kita katakan bahwa bilangan genap itu ada.

Jika kita kembali ke definisi limit di awal tulisan, maka pada dasarnya membuktikan bahwa untuk setiap epsilon ada delta sehingga bla bla bla adalah dengan membuktikan bahwa untuk suatu epsilon bebas, kita bisa memastikan bahwa ranah

$$\{\delta | \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0, 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\}$$

tidaklah kosong, atau kita bisa mengonstruksi delta yang memiliki sifat esensial bahwa $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ dan $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Untuk bisa menerapkan definisi "terdefinsi" dan "ada" di atas dengan baik, kita memang perlu memandang bahwa segala sesuatu merupakan bagian dari suatu himpunan, (atau bahkan dalam paradigma teori himpunan, segala sesuatu adalah himpunan itu sendiri, hanya saja tidak perlu dipikirkan bila memusingkan). Sayangnya, ketika kita meneliti sesuatu ada berdasarkan himpunan lain, kita perlu memastikan bahwa himpunan itu pun terjamin ada. Memastikan himpunan itu ada pun kita perlu melihat definisinya sebagai bagian dari himpunan yang lain lagi, dan kita pun harus memastikan himpunan yang lain lagi itu ada. Bila diteruskan, sebenarnya dari mana jaminan bahwa setiap objek matematika yang kita ketahui saat ini memang ada? Lain kali bila berkesempatan, tulisan yang lebih komprehensif melalui konstruksi teori himpunan akan coba saya buat.

Untuk sedikit menggambarkan paragraf berikut semoga bisa mengilustrasikan. Kita coba mulai mendefinisikan ulang bilangan rasional dan mundur jauh hingga ke akar rumput dari ke-ada-an. Dalam bentuk yang lebih konstruktif, sesungguhnya himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ bisa kita tuliskan sebagai $\mathbb{Q} = \{q | q \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/R\}$ dengan R adalah relasi dimana $\langle a, b \rangle R \langle c, d \rangle \Leftrightarrow a \cdot d = c \cdot b$ (Notasi A/B di sini berarti himpunan relasi ekivalen). Definisi ini membutuhkan definisi $\mathbb{Z}$ untuk memastikan bahwa $\mathbb{Q}$ ada. Kita pun definisikan $\mathbb{Z}$ sebagai $\mathbb{Z} = \{z | z \in (\omega \times \omega)/D\}$ dengan D adalah relasi dimana $\langle a, b \rangle D \langle c, d \rangle \Leftrightarrow a + d = c + b$ dan ω merupakan himpunan bilangan asli. Definisi ini membutuhkan definisi ω untuk memastikan bahwa $\mathbb{Z}$ ada. Kita pun definisikan bahwa $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$. Berhenti kah kita? *Wait*, darimana kita ketahui bahwa bilangan 0, 1, 2, dan seterusnya itu ada? Lagipula, apa itu 0, apa itu 1, apa itu 2? Di sini lah teori himpunan masuk dengan mendefinsikan bahwa $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, dan seterusnya dengan $a^+ = a \cup \{a\}$ (a^+ disebut sebagai *successor*, atau bisa dipahami sebagai 'bilangan selanjutnya'). Apakah di sini kita bisa berhenti? Nope! Karena bagaimana kita ketahui bahwa $\emptyset$ ada? Atau bahwa $\{\emptyset\}$ ada bila $\emptyset$ ada?

Bila diruntut lebih jauh, para metamatematikawan tidak punya pilihan banyak selain berhenti pada kumpulan aksioma (pernyataan *apriori* yang dianggap benar tanpa ada pernyataan yang mendahului). Eksistensi atau keberadaan dari setiap entitas dalam sistem matematika bersandar pada 9 aksioma yang dikenal dengan ZFC (*Zermelo-Frankel Axiom with Choice*)

Sedikit Tambahan

Sebelum ditutup, mari kita bergerak sedikit ke arah yang lebih simbolik. Dalam konteks simbol, kata "ada" dalam matematika sesungguhnya representasi bahasa untuk mewakili sebuah simbol yang sering disebut kuantor eksistensial ($\exists$). Penggunaan simbol ini selalu berada berbentuk $\exists x P(x)$ dengan $P(x)$ merupakan suatu proporsi dengan subyek x dan predikat P. Pada dasarnya, setiap kali kita mengatakan $P(x)$, kita sudah mengasumsikan bahwa $\exists x$ yang demikian. Untuk lebih membayangkan, setiap kalimat dalam dalam bentuk subyek dan predikat pada dasarnya telah memiliki *hidden assumption* yang tak terucapkan, bahwa subyek itu ada. Bila kita katakan "serigala membunuh domba", maka kita telah mengasumsikan bahwa serigala itu ada, sehingga kalimat lengkap yang sebenarnya adalah "Jika serigala ada, maka serigala membunuh domba". Dalam penulisan simbolik, $P(x)$ merupakan predikat untuk x membunuh domba, dan x kita substitusi sebagai serigala. Ini mencegah pengandaian yang mengakibatkan suatu kalimat menjadi absurd, misal dengan mengatakan "Pegasus terbang". Kebenaran kalimat itu tidak akan pernah bisa diverifikasi karena tidak pernah ada yang melihat Unicorn, maka dari itu kalimat aslinya adalah "Jika pegasus ada, maka pegasus terbang".

Dengan penjelasan tersebut, bila kita kembali pada definisi limit di awal tulisan ini, kita telah mengasumsikan bahwa ada L yang dimaksud ada, maka kalimat bahwa limit dari $f(x)$ untuk x menuju c adalah L, bisa dituliskan menjadi

$$\exists L, \forall \varepsilon, \exists \delta[\varepsilon > 0 \wedge \delta > 0 \Rightarrow (0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)].$$

Dalam pemaparan lebih jauh, sesungguhnya banyak yang bisa dijabarkan terkait kuantor eksistensial ini, terutama makna kuantor itu sendiri dalam suatu sistem semantik. Untuk mungkin bisa menjadi perenungan awal, kuantor yang original hanyalah kuantor universal, yakni "untuk setiap" atau $\forall$. Kuantor eksistensial hanyalah bentuk lain dari kuantor universal. Kita katakan $\exists t C$ sama saja dengan mengatakan bahwa $\neg(\forall t(\neg C))$. Dalam bentuk kalimat, mengatakan bahwa "ada manusia yang tampan", sama saja dengan mengatakan bahwa "tidak setiap manusia tidak tampan". Kuantor universal sendiri merupakan bentuk lain dari mengatakan subhimpunan dari suatu himpunan lain. Sebagai contoh lagi, mengatakan bahwa "setiap manusia akan mati" sama saja mengatakan bahwa "himpunan seluruh manusia merupakan subhimpunan dari himpunan entitas yang akan mati”. Dor! Himpunan lagi. Ada apa dengan himpunan? Tunggu saja tulisan berikutnya.

Daftar Pustaka

[1] Schrödinger, Erwin. 1983. *The Present Situation In Quantum Mechanics*. Proceedings of the American Philosophical Society, 124, 323-38.

[2] Nelson, Michael, "*Existence*", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2016 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/existence/

[3] Kant, Immanuel. 2017. *Kritik atas Akal Budi Murni*. Yogyakarta: Penerbit Indoliterasi

[4] Enderton, Herbert. 1977. *Elements of Set Theory*. London: Academic Press

[5] Lightstone, A. 1978. *Mathematical Logic: an Introduction to Model Theory*. New York: Plenum Press.

1 2 3 4 ...

Apa itu Bilangan?

"Baik anak-anak, coba kita hitung ada berapa apel di meja itu?... satu, dua, tiga. Ya, tiga apel!"

"Tapi bu, sebenarnya tiga itu apa?"

Bersyukurlah tidak ada anak-anak yang akan mengajukan pertanyaan seperti itu, karena bahkan anak magister matematika pun belum tentu mengajukannya. Jika ada anak yang bertanya demikian, mungkin setiap guru SD akan syok dan beralih profesi menjadi pedagang. Memang begitu banyak hal yang sangat terasa *common sense* bagi kita sehingga ia menjadi serasa sudah tidak perlu untuk ditelaah lagi. Coba, apa sebenarnya arti kata empat, ketika kita mengatakan mobil punya empat roda? Ketika seseorang mengatakan ada sepuluh orang di dalam kelas, maka makna sepuluh di situ ya adalah sepuluh, titik. Konsepnya begitu natural sehingga ia menancap dalam kepala tanpa perlu menimbulkan keraguan ataupun kegelisahan lagi. Akan tetapi, terkadang hal paling sederhana namun fundamental justru butuh untuk didefinsikan dengan baik, sebagaimana diri sendiri, belum tentu bisa dipahami meski telah hidup selama puluhan tahun. Bukankah dalam kehidupan, memahami diri sendiri adalah hal tersulit untuk dilakukan? Tentu saja, para pembaca bisa mulai merenungi itu sekarang, tapi kita tidak akan membahas hal itu dalam tulisan ini, karena satu buku setebal 1000 halaman pun tidak cukup untuk mengulasnya.

Bertanya apa itu bilangan 2 ataupun 3 ataupun 4 sebenarnya tidak terlalu berpengaruh banyak dalam kehidupan, karena sebagaimana cara pikir industrialistik ala ala masa kini, yang penting adalah suatu hal bisa dipakai dan dimanfaatkan, *bodo amat* esensi yang ada di baliknya. Yang merasa demikian, berhenti lah hingga paragraf ini, seperti kata Dewi Yul "*sebelum terlanjur kita jauh melangkah*", dan mulailah baca buku "Cara sukses dalam 24 jam" yang mulai sering terlihat di toko-toko buku, jika tidak, maka mari kita mulai perjalanan ke fondasi dari matematika, sebuah perjalanan untuk sebuah kata bernama bilangan[1].

Ada apa dengan bilangan?

Saya ingin memulai dengan sedikit latar belakang, mengapa pertanyaan seperti itu bisa muncul. Dalam ilmu-ilmu 'riil', kita bisa membongkar suatu objek terus menerus untuk memahami komponen dasarnya itu apa. Dan sudah menjadi misi panjang pengetahuan untuk mencari 'komponen dasar' dari segala sesuatu, sehingga seperti yang kita ketahui, para biolog sudah menemukan bahwa komponen dasar organisme adalah sel-sel yang mengandung asam nukleat, para kimiawan sudah menemukan bahwa komponen dasar dari segala zat adalah 118 unsur yang tersusun dalam tabel periodik, atau para fisikawan sudah menemukan bahwa komponen dasar

[1] Ah ya, tentu bilangan yang saya maksud di sini untuk saat ini adalah seperti makna aslinya, sesuatu yang dipakai untuk membilang, yakni bilangan natural, alias 1,2,3, dan seterusnya. Mengenai terminologi lain yang kelak muncul seperti bilangan bulat hanyalah perluasan makna ini.

dari segala materi adalah quark dan beberapa partikel elementer lainnya yang tersusun dalam *standard model*.

Ya, secara umum, ilmu pengetahuan, khususnya sains (meskipun sekarang ilmu humaniora pun mulai berparadigma reduksionis juga) selalu berusaha melihat ke konsep paling fundamental yang menyusun atau mendasari segala sesuatu. Jika objeknya 'riil', nyata, 'ada', maka membongkar realita menjadi konsep-konsep atau susunan-susunan fundamental adalah suatu hal yang masih mungkin untuk dilakukan. Bagaimana dengan matematika? Semua mungkin sepakat bahwa matematika adalah konsep 'abstrak' dari realita, karena matematika adalah yang berada di balik realita itu sendiri, sehingga mencari sesuatu yang bisa diindrai ataupun diimajinasi (karena imajinasi sendiri adalah refleksi pengalaman visual yang direkonstruksi) dari objek matematika tidak akan pernah membuahkan hasil, meskipun Chrisye sudah berkelana ke tujuh samudra. Jika demikian, sebagai matematikawan, tidakkah kemudian saya berpikir bahwa apa sebenarnya yang menjadi obyek dasar matematika, objek yang mengawali semua objek lainnya? Bukankah itu terasa absurd mengingat hampir semua objek matematika terkonstruksi dari suatu definisi? Dan setiap definisi membutuhkan konsep lain yang juga perlu didefinisikan? Maka jika demikian, matematika membutuhkan suatu entitas yang *a priori* memang 'ada', yang mengawali konstruksi tapi bukan merupakan hasil konstruksi. Ini bukan pertanyaan baru, hanya pertanyaan yang jarang diurus oleh orang. Pertanyaan seperti ini sudah pernah dicoba dijawab oleh Russel, Zermelo, Frankel, Frege, Peano, hingga jauh ke Phytagoras dan Aristoteles. Hanya saja, tidak banyak yang mengangkat ini lagi, apalagi di tengah masa industri 4.0 dimana pertanyaan "Apa itu bilangan?" bagai karbon dioksida yang kita keluarkan tiap detik, begitu tidak berarti untuk diperhatikan.

Jawaban atas sesuatu yang mendasari segala entitas matematika bukan lah bilangan, tapi bilangan merupakan konsep awal yang bisa dikatakan berada di luar konstruksi manusia. Zermelo dan Frankel bisa saja menyusun 9 aksioma himpunan sebagai dasar yang dicari (dikenal sebagai *ZFC – Zermelo-Frankel Axioms with Choice*), namun 9 aksioma itu begitu artifisial untuk menjadi esensi alami dari matematika, esensi yang *given* dari semesta. Mungkin saya jadi terkesan penganut Phytagorean[2], tapi bisa kah kita membayangkan konsep yang lebih natural dari bilangan 1, 2, 3, dan seterusnya? Di awal masa pun, konsep menghitung (*counting*) adalah hal yang pertama kali muncul dalam peradaban manusia sebelum aritmatika, geometri, atau konsep-konsep yang lebih abstrak lainnya. Maka wajarlah bilangan 1, 2, 3, dan seterusnya disebut sebagai bilangan natural / alami, karena ia begitu alami hadir dalam kehidupan, dalam semesta.

[2] Phytagoras (dan pengikutnya) menganggap segala sesuatu di semesta bisa dideduksi dari bilangan.

Kita bisa saja *taken for granted* bilangan natural dan melakukan konstruksi semua konsep matematika lainnya hanya dari itu. Itu memungkinkan, dengan mendefinsikan beberapa tambahan konsep seperti fungsi dan himpunan. Akan tetapi, itu tidak lah cukup memuaskan, apalagi untuk para reduksionis, karena bilangan natural sendiri belum bisa didefinisikan dengan baik. Darimana juga kita ketahui bahwa bilangan natural itu pun 'ada'? Kita bisa mengatakan objek dalam sistem matematika itu 'ada', bila kita bisa mencari (mengonstruksi) obyek atau entitas dalam himpunan yang didefinisikan melalui sifat esensial dari ke-ada-an itu (*what?* Oke, daripada muntah-muntah dan membatalkan puasa bagi yang melaksankan, disunnahkan baca dulu tulisan sebelumnya: [1]). Tapi karena itu sunnah, tidak harus *kok*, saya usahakan jelaskan sesederhana mungkin). Sederhananya, setiap objek matematika harus didefinisikan terlebih dahulu dengan kumpulan sifat-sifat yang mencirikannya sehingga bila objek tersebut bisa dikonstruksikan (menjadi "ada"), maka tidak ada inkonsistensi yang terjadi. Lantas, untuk bisa mendefinisikan bilangan natural, kita membutuhkan sifat-sifat yang mencirikannya (*essential properties*). Ada banyak cara untuk melakukannya, sebagaimana banyak jalan menuju Bandung, dan saya akan coba paparkan beberapa di antaranya di sini. Sebelum memulai, perlu saya tekankan bahwa saya usahakan menjelaskan dengan bahasa yang sesederhana mungkin dengan asumsi bahwa wawasan dan notasi dasar matematika seperti himpunan, kuantor, atau fungsi telah dipahami dengan baik.

Kuantor Numerik Frege

Kita mulai dari konsep yang diajukan Gottlob Frege, seorang filsuf Jerman yang mencoba mengajukan konsep aritmatika, dan bersamanya juga konsep bilangan, dalam [2]. Frege memang lebih merupakan seorang filsuf ketimbang matematikawan, maka konsep yang diajukannya pun cenderung berbau filsafati, dalam artian tidak dalam suatu ranah abstrak-matematis yang independen, sebagaimana konsep matematika yang murni. Frege mengatakan bahwa suatu bilangan tidak pernah bisa dilepaskan dari konteks yang mengiringinya. Satu, dua, atau tiga bukanlah obyek yang bisa dilihat secara independen, tapi harus dilihat bersama kata yang mengiringinya, dalam kesatuan yang Frege sebut sebagai bilangan-kata (*number-words*). Bilangan-kata bisa dikatakan sebagai adjektiva untuk suatu konsep, sehingga ia mengandung sifat dari konsep terkait. Misalkan ketika kita katakan bahwa "ITB memiliki dua kampus, yakni Jatinangor dan Ganesha", maka kita mengungkapkan bahwa kampus ITB terejawantahkan (*instantiated*) oleh dua objek, dan dua di sini diwakili oleh Jatinangor dan Ganesha. Dalam bahasa logika, kita bisa tuliskan bahwa

$$\exists x \exists y \left[K_{ITB}(x) \land K_{ITB}(y) \land (x \neq y) \land \Big(\forall z \big(K_{ITB}(z) \to (z = x \lor z = y)\big)\Big)\right]$$

yang secara sederhana berarti hanya ada x dan y yang memenuhi konsep "kampus ITB" (K_{ITB}), dan fakta bahwa adanya x dan y ini lah yang mewakili bilangan-kata "dua kampus".

Proses pendefinisian ini begitu berbasis logika sehingga memang tidak umum di kalangan matematikawan. Melihat definisi seperti di atas, adalah wajar bila kemudian terlintas pikiran: 'bagaimana dengan 3, 4, dan seterusnya?'. Bentuk umum dari pendefinisian di atas bisa dituliskan secara formal sebagai berikut (dengan asumsi kita telah paham dengan jelas notasi kuantor universal ∀):

- Kita definisikan kuantor eksistensial ∃ sebagai ¬∀¬
- Untuk suatu konsep F, kita definisikan kuantor numerik:

i. $\exists^0$ didefinisikan sebagai $\neg\exists x[F(x)]$

ii. $\exists^1$ didefinisikan sebagai $\exists x[F(x) \wedge \forall y(F(y) \to y = x)]$

iii. $\exists^2$ didefinisikan sebagai $\exists x \exists y \left[F(x) \wedge F(y) \wedge (x \neq y) \wedge \Big(\forall z\big(F(z) \to (z = x \vee z = y)\big)\Big)\right]$

iv. Dan seterusnya untuk semua bilangan natural

Kuantor numerik di atas merupakan apa yang dalam penggunaannya akan berbentuk bilangan-kata terkait konsep F. Konsep ini cukup rumit namun begitu kontekstual karena memandang bilangan natural bukan sebagai entitas yang terpisah, namun menyatu bersama konsep yang tengah dikontekskan. Secara matematis sendiri, konsep ini tidak bisa dijadikan landasan untuk mengonstruksi struktur matematika lainnya mengingat definisi ini tidak lah independent.

Sistem Triplet Peano

Lima tahun setelah Frege mempublikasikan konsep bilangan-kata-nya, Giuseppe Peano, seorang matematikawan italia mempublikasikan sebuah pendekatan aksiomatik untuk mendefinisikan bilangan natural (baca [3]). Ia mencoba melihat beberapa sifat esensial dari bilangan natural dan menyusunnya ke dalam 3 konsep dan 5 aksioma. Tiga konsep yang diajukan Peano adalah nol, penerus (*successor*), dan bilangan (atau himpunan bilangan yang berusaha didefinisikan), yang bisa dituliskan secara ringkas dalam bentuk triplet $\langle e, S, N\rangle$ dengan S merupakan fungsi penerus. Yang ia maksud sebagai penerus adalah bilangan selanjutnya setelah bilangan tertentu (dalam hal ini sebenarnya kita butuh konsep urutan, tapi kita tahan dulu hal ini, karena kita bisa sederhana membayangkan bahwa penerus ini lah yang mendefinisikan urutan tersebut). Triplet ini mematuhi 5 aksioma dasar (saya tuliskan juga notasi modernnya dalam kurung untuk mempermudah pemahaman, meskipun ini seharusnya belum bisa dilakukan), yakni:

- e (nol) adalah bilangan ($e \in N$)

- Penerus dari suatu bilangan adalah bilangan ($S: N \rightarrow N$)

- Tidak ada dua bilangan yang memiliki penerus yang sama (S bersifat satu-satu/injektif)

- e bukanlah penerus dari bilangan apapun ($e \notin ran(S)$)

- Setiap sifat yang berlaku untuk e, dan juga berlaku untuk penerus dari setiap bilangan yang memiliki sifat tersebut, berlaku juga untuk seluruh bilangan (prinsip induksi)

Triplet ini bersama 5 aksioma di atas bisa kita definisikan sebagai sistem Peano. Kita bisa langsung coba aplikasikan ini untuk membentuk bilangan natural. Kita katakan bahwa 0 adalah e, dan penerus dari 0 adalah 1, penerus dari 1 adalah 2, penerus dari 2 adalah 3, dan seterusnya. Terlihat jelas bahwa 5 aksioma itu pun berlaku dengan baik, sehingga memang pada awalnya sistem ini lah yang diajukan Peano sebagai definisi dari bilangan natural. Akan tetapi, ada kekurangan tersendiri dari sistem ini. Memang benar bahwa bilangan natural merupakan sistem Peano, tapi bilangan natural bukan lah satu-satunya sistem Peano. Jika diperhatikan lagi, semua himpunan yang memiliki urutan antara setiap anggotanya dan memiliki anggota terkecil (*well-ordered set*) adalah sistem Peano. Sebagai contoh, jika kita memiliki himpunan bilangan yang berisi 2, 4, 6, dan seterusnya, maka himpunan tersebut merupakan sistem Peano namun tidak sepenuhnya merepresentasikan bilangan natural.

Kelas Bilangan Russel

Salah satu matematikawan yang mengritik (dan melengkapi) konsep Peano adalah Bertrand Russel, yang kemudian secara total dan menyeluruh membangun konsep fundamental matematika secara aksiomatik dalam bukunya yang terkenal, *Principia Matematica*. Buku tersebut ia tulis bersama Alfred N. Whitehead dalam 3 jilid dengan total 1983 halaman. Dalam buku tersebut, yang Russel 'rangkum' dalam bentuk penjelasan yang lebih naratif dan 'manusiawi' melalui sebuah buku terpisah ([5]), ia mengajukan pendefinisian bilangan natural dengan memandang setiap bilangan sebagai kelas (terminologi lain untuk himpunan[3]).

Russel mengatakan, bagaimana jika seluruh koleksi objek yang berjumlah dua dikumpulkan dalam suatu kelas, dan seluruh koleksi objek yang berjumlah tiga dikumpulkan dalam kelas yang lain, maka kita akan memiliki dua kelas yang jelas berbeda dan unik. Dengan itu, ia katakan, kita bisa mendefinisikan bahwa setiap kelas yang berisi seluruh koleksi objek berjumlah suatu bilangan, adalah bilangan tersebut. Bilangan dua adalah kumpulan seluruh koleksi objek yang berjumlah dua, dan seterusnya. Akan tetapi, bagaimana cara kita menghitung jumlah objek dalam suatu

[3] Penggunaan kata 'kelas' ketimbang 'himpunan' oleh Russel terkait dengan paradoks yang ia ajukan mengenai himpunan, membuat istilah himpunan memiliki restriksi tersendiri.

koleksi objek ketika bilangan itu sendiri belum terdefinisikan sebelumnya, atau dengan kata lain, kita belum bisa menghitung? Di sini ada *loop* definisi yang perlu ditangani.

Syukurnya, ini bukan *loop* yang bermasalah. Faktanya, kita tidak perlu menghitung banyaknya objek dalam suatu koleksi objek untuk mengumpulkan semua koleksi objek yang jumlah isinya sama. Misalkan kita asumsikan tidak ada satupun orang yang poligami maupun poliandri di dunia ini, maka kita bisa pastikan bahwa jumlah suami dan jumlah istri adalah sama tanpa kita perlu hitung terlebih dahulu. Kenapa? Karena setiap suami dijamin memiliki hanya satu istri dan setiap istri dijamin hanya memiliki satu suami. Dalam konsep yang lebih abstrak, relasi antar dua kelas seperti ini dikatakan *satu-satu*, yang artinya setiap anggota dari kelas yang satu selalu memiliki tepat 1 relasi di kelas yang lain, dan juga sebaliknya. Dua kelas yang memiliki relasi yang satu-satu dikatakan *mirip* (*similar*). Dengan konsep kemiripan ini, kita bisa mengelompokkan semua koleksi objek yang banyaknya isinya sama dalam satu kelas unik, dan dari sini kita bisa mendefinisikan satu per satu bilangan natural, yakni sebuah kelas yang berisi kelas objek yang mirip dengannya. Keterurutan bilangan natural yang dibangun melalui konsep ini bisa dicapai dengan melihat relasi antar bilangan. Jika kita berusaha membangun relasi dari setiap anggota kelas dua dengan setiap anggota kelas tiga, maka apapun bentuk relasinya, pasti akan tetap menyisakan satu anggota kelas tiga, yang berarti kelas dua 'lebih kecil' ketimbang kelas tiga, dan seterusnnya. Meskipun pengurutan seperti itu memungkinkan, sesungguhnya yang dilakukan Russel hanyalah mendefinisikan *setiap* bilangan natural, untuk melengkapi sistem Peano yang dianggapnya masih kurang spesifik. Sehingga, Russel tetap menggunakan sistem Peano untuk mendefinisikan satu sistem bilangan natural dengan definisi setiap bilangannya adalah apa yang telah dibahas sebelum ini.

Ordinal Von Neumann

Pendefinisian bilangan natural oleh Frege dan Russel masih sebuah konsep yang bergantung pada 'realita', dalam artian definisi ini dikonstruksi melalui representasi abstrak dari objek nyata. Sebagaimana apa yang para matematikawan senang lakukan, kita butuh definisi bilangan natural yang murni independen, yang berarti ia ada karena ia ada secara abstrak, tanpa perlu mengasumsikan keberadaan objek di realita. Hal ini yang kemudian diajukan oleh John Von Neumann dalam konsep fundamentalnya terkait himpunan. Apa yang diajukan oleh Von Neumann ini yang akan menjadi cikal bakal fondasi matematika yang aksiomatik dari himpunan.

Agar mendapatkan definisi yang murni independen dari realita, maka kita harus melepaskan segala keterkaitan dari realita, termasuk dalam himpunan. Artinya, jika kita membicarakan himpunan, kita tidak bisa lagi mengatakan bahwa A adalah himpunan bunga berwarna merah, atau B adalah himpunan mahasiswa S1 ITB. Lantas darimana anggota-anggota himpunan itu bisa ada? Maka karena itu lah sebelum memulai, kita harus bayangkan pada awalnya tidak ada apapun di dunia ini (dunia matematika tentunya), bayangkan semesta yang kosong, dan dengan itu, kita hanya punya himpunan kosong, satu-satunya himpunan yang ada pertama kali, yang keberadaannya kita jamin secara aksiomatik (melalui ZFC).

Himpunan kosong ini, kita sebut ia sebagai 0 atau nol, sebagai bilangan natural pertama kita[4]. Dari nol ini kita bisa bangun bilangan natural secara rekursif dengan cara yang serupa seperti sistem Peano, yakni melalui fungsi penerus (*successor*), namun dengan pendefinisian yang lebih spesifik. (Untuk melakukan ini, sebenarnya kita harus terlebih dahulu mendefinisikan beberapa konsep seperti gabungan, relasi, dan fungsi dari himpunan, namun untuk kali ini, kita asumsikan fungsi telah terdefinisi dengan baik). Fungsi penerus didefinisikan sebagai

$$a^+ = a \cup \{a\}$$

Dengan definisi ini, kita langsung bisa mendapatkan satu per satu bilangan natural awal dari 0, yakni

- $1 = 0^+ = \{\emptyset\}$
- $2 = 1^+ = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $3 = 2^+ = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
- $4 = 3^+ = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}\}$
- Dan seterusnya.

Cara lain mendefinisikan fungs penerus di atas adalah

$$a^+ = P(a)$$

dengan P(a) merupakan himpunan pangkat (*power set*) dari a, yang berarti penerus dari a berisi semua himpunan bagian dari a. Perhatikan bahwa dari definisi ini, kita memiliki sifat-sifat menarik, salah satunya adalah bahwa $0 \in 1 \in 2 \in 3 \in \cdots$, dan $0 \subset 1 \subset 2 \subset 3 \subset \cdots$

Dalam teori himpunan, pada dasarnya konstruksi bilangan di atas belum bisa menjamin sepenuhnya bahwa proses rekursif tersebut bisa dapat dilakukan sampai "tak hingga", karena ketakterhinggaan pun harus terdefinisi dengan baik. Mengenai hal ini, ZFC menyediakan satu lagi aksioma khusus yang dinamakan aksioma tak terhingga (*infinity axiom*), yang kurang lebih menyatakan bahwa terdapat himpunan yang induktif. Apa itu induktif? Tentu saja bukan berarti ia bisa menghasilkan listrik dari perubahan medan magnet, namun suatu himpunan A dikatakan induktif bila $\emptyset \in$

[4] Himpunan bilangan natural pada dasarnya tidak harus dimulai dari 1.

A dan untuk setiap $a \in A$ penerus dari a juga ada di A. Aksioma tak terhingga menjamin proses rekursif di atas mungkin untuk dilakukan. Karena isi dari setiap himpunan induktif bisa bermacam-macam, dalam artian bisa berisi objek yang bukan hasil dari proses induksi rekursif di atas, maka kita pun harus mendefinisikan bahwa koleksi bilangan natural (ω), merupakan irisan dari semua himpunan induktif, atau dengan kata lain, himpunan bilangan natural adalah himpunan induktif terkecil.

$$\omega = \bigcap\{A|A\ induktif\}$$

Konsep Modern: Bilangan Ordinal

Sejauh ini, kita sudah dapatkan beberapa definisi bilangan natural, tapi definisi-definisi itu masih menyisakan banyak pertanyaan karena terkesan begitu 'asing'. Kita masih belum tahu bagaimana menggunakan bilangan-bilangan tersebut untuk 'menghitung'. Bukankah dari awal konsep yang begitu alami dari bilangan adalah bagaimana kita menghitung? Bilangan natural digunakan untuk mengeksplisitkan bahwa terdapat 4 butir kelereng dalam mangkok atau terdapat 5 jari di setiap tangan manusia. Apa yang sebenarnya kita lakukan secara matematis ketika melakukan numerasi 1 jari, 2 jari, 3 jari, sampai dengan 5 jari? Inilah saatnya kita merumuskan konsep yang lebih solid dari bilangan natural.

Konsep yang diformulasikan oleh Von Neumann menjadi inspirasi bagi para teoritis himpunan lain, termasuk Zermelo dan Frankel yang kemudian melengkapi seluruh struktur fondasi matematika melalui ZFC-nya. Konsep bilangan Von Neumann juga menjadi cikal bakal apa yang dikenal dalam teori himpunan sekarang sebagai bilangan ordinal, sebuah konsep yang ekivalen dengan bilangan natural. Bersama bilangan ordinal, konsep yang awalnya menjadi dasar formulasi bilangan oleh Russel (dimana ia 'menghitung' banyaknya isi dari suatu himpunan dengan melihat relasi satu-satu antar dua himpunan), konsep yang dikenal dengan bilangan kardinal.

Memformulasikan bilangan ordinal pada dasarnya cukup rumit, namun saya usahakan sederhanakan sejelas mungkin. Seperti yang sudah dijelaskan pada sistem Peano sebelumnya, struktur bilangan natural yang Peano kembangkan sebenarnya bisa digeneralkan untuk semua himpunan yang terurut-baik (*well-ordered*). Hasil generalisasi bilangan natural pada himpunan yang terurut-baik inilah yang menjadi konsep bilangan ordinal. Sesuai namanya, ini adalah bilangan yang dibangun dari *order* suatu himpunan terurut-baik.

Apa sih sebenarnya himpunan terurut-baik? Sebelum menjawab itu, kita perlu pahami terlebih dahulu apa itu urutan parsial. Antar dua objek yang berbeda pada suatu himpunan, kita bisa memberikan relasi irefleksif (tidak berlaku untuk diri sendiri) dan transitif (terhantarkan) pada beberapa anggotanya. Misalkan pada suatu keluarga, kita bisa mendefinisikan urutan 'keturunan' (*descendant*) dengan relasi bahwa seorang anak merupakan keturunan dari bapak dan ibunya. Relasi ini irefleksif karena seseorang tidak mungkin merupakan keturunan dari dirinya sendiri dan transitif karena bila seorang bapak merupakan keturunan kakek, maka seorang anak juga adalah keturunan kakek (relasi antara anak dan bapak 'terhantarkan' ke kakek). Relasi seperti di atas itulah yang disebut dengan urutan parsial. Kenapa parsial? Jelas karena tidak semua anggota keluarga memiliki relasi keturunan, seperti halnya seorang kakak tidak punya relasi keturunan dengan adiknya. Jika semua anggota dari suatu himpunan berelasi dengan relasi urutan yang didefinisikan, maka kita sebut urutan tersebut linier atau total. Nama linier akan jadi masuk akal bila kita bayangkan bahwa setiap anggota suatu himpunan pasti 'lebih kecil' atau 'lebih besar' daripada anggota lain, sehingga ia membentuk suatu 'garis' keterurutan. Himpunan dengan urutan linier bisa tidak punya 'ujung' seperti bilangan bulat. Himpunan yang memiliki 'ujung' dalam bentuk anggota 'terkecil' dinamakan dengan *himpunan terurut-baik*. Mungkin kemudian akan muncul pertanyaan, mengapa perlu diberi kata "baik" di situ? Perhatikan bahwa pada himpunan terurut baik, kita bisa menciptakan indeks konstruksi (berguna untuk rekursi transfinit, namun tidak akan dibahas di sini) secara *bottom-up* secara satu per satu. Misalkan A himpunan terurut baik dengan urutan <, maka A (asumsi tidak kosong) memiliki nilai terkecil a_0. Selanjutnya himpunan yang tersisa, $A - \{a_0\}$ (bila tidak kosong) memiliki nilai terkecil a_1 dengan $a_0 < a_1$. Melanjutkan proses ini, kita bisa dapatkan $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$. Jika kemudian pada himpunan $A - \{a_0, a_1, \dots\}$ masih terdapat sisa anggota dengan elemen terkecil a_ω, proses ini pun bisa dilanjutkan dan mendapatkan

$$a_0 < a_1 < \cdots < a_\omega < a_{\omega+1} < \cdots < a_{2\omega} < \cdots$$

hingga seluruh elemen dari A habis terpakai. Tentunya selain ini ada konsep teoritis lainnya yang menjadi alasan mengapa himpunan seperti ini dinamakan himpunan terurut-baik, namun paling tidak ilustrasi di atas cukup memberi gambaran betapa 'baik'-nya bentuk himpunan tersebut.

Urutan memang menjadi konsep yang cukup fundamental dalam teori himpunan, sehingga ia bisa dipandang sebagai pelengkap yang membentuk struktur suatu himpunan. Struktur dalam suatu objek matematika menentukan sifat-sifat dan karakteristik dari himpunan tersebut, sehingga selama dua himpunan memiliki struktur yang sama, maka kedua himpunan tersebut serupa, yang mana dalam istilah matematika dikenal dengan isomorfik (dalam konteks struktur urutan, hal ini berarti jika x<y pada himpunan A, dan ada fungsi satu-satu yang menghubungkan antara x dan a, dan y dan b untuk a dan b pada himpunan B, maka urutannya dipertahankan, sehingga a<b). Semua himpunan yang terurut-baik secara struktur urutannya bersifat isomorfik, sehingga mereka seakan hanyalah objek yang sama dengan isi berbeda saja.

Untuk setiap himpunan terurut-baik, perhatikan bahwa untuk setiap anggotanya, semua anggota lain yang lebih kecil darinya selalu unik, sehingga kita bisa beri nama khusus, yakni segmen. Jadi, untuk setiap a dalam suatu himpunan terurut-baik A, segment dari a adalah {x|x<a}. Dengan ini, kita mulai definisi kita terhadap bilangan ordinal. Misalkan A adalah himpunan terurut baik dengan relasi urutan <, kita bisa mendefinisikan suatu fungsi unik E pada A yang mana peta dari setiap anggota A melalui E ditentukan oleh segmennya, atau semua anggota yang lebih kecil. Secara matematis, bisa dituliskan, untuk setiap $a \in A$, $E(a) = \{E(x)|x \in seg(a)\}$[5]. Kita pun definisikan bahwa bilangan ordinal α dari A adalah himpunan peta dari E, atau dengan kata lain $\alpha = ran(E)$. Sebagai contoh, misalkan A=$\{a, b, c\}$ dengan $a < b < c < d$, maka $E(a) = \emptyset$, $E(b) = \{E(a)\} = \{\emptyset\}$, $E(c) = \{E(a), E(b)\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, dan $E(d) = \{E(a), E(b), E(c)\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, sehingga bilangan ordinal dari A adalah

$$\alpha = \{E(a), E(b), E(c)\} = \left\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \left\{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\right\}\right\} = 4$$

Perhatikan bahwa proses menentukan bilangan ordinal dari A terlihat seperti melakukan proses ‘menghitung’ jumlah anggota dari A secara bertahap dari anggota terkecilnya. Tapi, tunggu dulu. Bukankah proses menghitung pada suatu himpunan dengan cara di atas membutuhkan adanya urutan-baik? Tenang dulu. Kabar baiknya, dalam teori bilangan, kita miliki teorema pamungkas untuk menangani hal ini:

Well-Ordering Theorem: Untuk setiap himpunan A, terdapat suatu urutan-baik pada A.

Saya tidak akan membahas bukti teorema ini, daripada semakin membuat pembaca tidak nafsu makan. Teorema ini cukup terkenal dan mendasar sehingga dipastikan setiap mahasiswa matematika mendapatkannya paling tidak dalam mata kuliah matematika diskrit. Mengikuti teorema urutan-baik, bisa diturunkan langsung teorema yang dikenal dengan *numeration theorem* yang kurang lebih menyatakan bahwa himpunan apapun pasti mirip (*similar*, dengan definisi seperti yang diajukan oleh Russel) dengan suatu bilangan ordinal. Artinya apa? Artinya himpunan apapun, *literally* apapun, selalu bisa dihitung! *Lah*, bagaimana dengan himpunan bilangan Riil yang jelas-jelas diberi label *uncountable*? Dengan inilah kita perlu masuk ke dalam konsep kardinalitas.

Bilangan Kardinal dan Tak Hingga Bertingkat

Bilangan ordinal sebenarnya digunakan untuk menentukan melakukan ‘enumerasi’ secara terurut pada suatu himpunan. Dalam proses normal, kita

[5] Adanya fungsi ini perlu dijamin oleh teorema rekursi transfinit (*transfinite recursion theorem*), namun tidak akan dibahas detail di sini mengingat teorema ini cukup rumit dan buktinya cukup panjang.

melakukan enumerasi atau *counting* cukup dengan bilangan natural, karena bisa dipastikan apa yang kita hitung dalam kehidupan sehari-hari pastilah terhingga (*finite*). Untuk kasus-kasus dimana jumlah suatu objek bisa begitu banyak, maka bilangan ordinal berperan sebagai ekstensi dari bilangan natural. Untuk melihat bagaimana ekstensi ini terjadi, kita perlu pahami bahwa terdapat tiga macam tipe bilangan ordinal. Yang pertama adalah 0 (nol), sebagai objek patokan pertama. Yang kedua merupakan ordinal yang merupakan penerus dari ordinal yang lebih kecil. Ordinal ini disebut sebagai ordinal penerus (*successor ordinals*). Yang terakhir, adalah semua ordinal yang bukan kedua tipe sebelumnya, disebut dengan ordinal batas (*limit ordinals*). Jika a ordinal batas, maka untuk setiap $c \in a$, $c^{+} \in a$. Contoh paling kecil dari ordinal batas adalah ω. Jika diurutkan, maka bilangan-bilangan ordinal batas adalah

$$\omega, 2\omega, 3\omega \dots, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^{\omega}, \dots, \omega^{\omega^{\omega}}, \dots \omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}} = \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\omega}, \dots$$

Barisan ordinal batas di atas bisa diteruskan, namun tetap memiliki ujung, sebuah bilangan ordinal batas lain yang dikenal dengan *first uncountable ordinals*, atau dinotasikan dengan ω_1, yang masih bisa diteruskan lagi dengan ω_2, ω_3 dan seterusnya. Melihat semua bilangan-bilangan itu tentu memusingkan, apalah gunanya juga kita melakukan enumerasi hingga ε_{ω}, maka kemudian George Cantor pada mencoba melihat 'enumerasi' ini dengan cara lain, yakni 'banyaknya' isi dari suatu himpunan.

Kita sebelumnya telah mengetahui konsep *mirip* (*similar*) pada penjelasan Russel di atas. Terminologi matematis dari mirip adalah equinumerous. Karena sekarang kita hanya akan fokus pada banyaknya isi himpunan, sebagaimana apa yang dijelaskan oleh Russel, kita tidak perlu benar-benar menghitung satu per satu objek yang ada di dalam himpunan tersebut, namun cukup melakukan pemetaan untuk melihat apakah dua himpunan itu mirip atau tidak.

Terminologi baru kemudian perlu dikenalkan untuk mengembangkan konsep ini. Dari sini, kita definisikan bilangan kardinal atau kardinalitas dari suatu himpunan A adalah bilangan ordinal terkecil yang mirip dengan A. Mengapa harus terkecil? Karena hal yang menarik dan perlu diperhatikan dari pendekatan kemiripan antara himpunan adalah bahwa himpunan bilangan asli, bilangan bulat, dan bilangan rasional, meskipun mereka terlihat seperti memiliki jumlah anggota yang jelas berbeda, adalah himpunan-himpunan yang mirip, sehingga kita selalu bisa mendefinisikan relasi yang satu-satu antar himpunan bilangan tersebut. Dengan demikian, kita perlu memandang ketiga himpunan tersebut dengan suatu aspek yang sama, yang dalam hal ini adalah kardinalitasnya. Jika kita melihat ordinalnya, sebenarnya ketiga himpunan bilangan tersebut memiliki bilangan ordinal yang berbeda. Karena itu, jika kita hanya mempertimbangkan kemiripan ketiganya, maka kita cukup melihat ordinal terkecil yang mirip dengan mereka bertiga, yakni ω. Dalam konsep kardinalitas, bilangan ordinal ω ini dinotasikan dengan cara yang berbeda, yakni $\aleph_0$ atau *aleph-naught*.

Semua ordinal yang *countable* (bahkan ε_ω sekalipun) memiliki kardinalitas yang sama, yakni $\aleph_0$. Jika kita kumpulkan seluruh himpunan dengan kardinalitas $\aleph_0$, kita akan dapatkan himpunan baru yang kardinalitasnya berbeda dengan $\aleph_0$, yang kemudian dinamakan $\aleph_1$. Kita bisa meneruskan proses pembentukan level kardinalitas baru ini dengan $\aleph_a$ untuk sebarang bilangan ordinal a melalui apa yang dikenal dengan penerus kardinal (*cardinal successor*). Akan tetapi, sebelum tulisan ini meluber kemana-mana, kita tahan dulu pembahasan terkait itu untuk lain kali. Setiap $\aleph_a$ untuk a>0 ini merupakan ketakterhinggaan yang lebih tinggi ketimbang ketakterhinggaan bilangan natural.

Di antara para mahasiswa matematika, bilangan kardinal sebenarnya merupakan konsep yang lebih familiar ketimbang bilangan ordinal, karena jumlah anggota dari suatu himpunan disebut kardinalitas dari himpunan tersebut, namun secara historis, bilangan kardinal muncul belakangan ketika konsep ketakterhitungan diperkenalkan oleh Cantor. Strukturisasi kardinalitas di atas seakan begitu rapi dan rigid sehingga seakan kita sudah mencapai generalisasi yang cukup tinggi. Akan tetapi, Cantor merusaknya dengan memperlihatkan bahwa sesungguhnya himpunan bilangan Riil atau himpunan lainnya yang mirip dengannya, memiliki kardinalitas $c = 2^{\aleph_0}$, suatu level berbeda yang masih belum bisa dibuktikan posisinya ada dimana. Misteri posisi c pada hirarki aleph masih misteri hingga saat ini, misteri yang cukup masyhur dengan nama *continuum hypothesis*. Tentu saja karena itu hipotesis, terdapat ajuan awal bahwa sesungguhnya $c = \aleph_1$, tapi belum bisa dibuktikan. Karena itu juga, sesungguhnya bilangan ordinal dari himpunan bilangan riil belum bisa terdefinisi dengan baik. Jelas, dugaan awal kita tentu saja himpunan bilangan riil harus memiliki bilangan ordinal berdasarkan *numeration theorem*, tapi seperti apa? Entah, saya yang belum mempelajarinya atau memang itu belum ditemukan.

Penutup

Sampai titik ini, kita paling tidak telah memiliki gambaran bahwa bilangan (natural) adalah 'sesuatu' yang secara abstrak diikuti oleh sesuatu yang lain secara terus menerus. Konsep ini yang mengawali Peano untuk membentuk konsep triplet bersama 5 aksioma dasar bilangan natural. Dalam abstraksi lebih lanjut, bisa dilihat bahwa kumpulan sesuatu ini terurut sedemikian sehingga ketika kita menghitung, kita pada dasarnya melakukan enumerasi terhadap urutan tersebut, seperti halnya kita menghitung 'satu domba, dua domba, tiga domba, hingga seratus domba'.

Keterurutan ini, bersama konsep kardinalitas kemudian bisa membantu kita untuk melakukan perbandingan, sehingga kita tahu bahwa 100 domba lebih banyak ketimbang 98 domba.

Sejak mencapai pembahasan mengenai bilangan ordinal, sesungguhnya kita sudah mencapai tujuan kita di awal, meskipun entah berarti apa dalam kehidupan kita. Itulah mengapa bagian sebelumnya bersifat sunnah untuk dibaca (meski sebenarnya seluruh tulisan ini sunnah untuk dibaca, *toh* saya tidak bisa mewajibkan). Paling tidak, bagi saya sendiri memahami konsep bilangan ordinal membangkitkan kekaguman tersendiri bagaimana konsep 'menghitung' yang begitu biasa dalam kehidupan sehari-hari kita diformulasikan dengan proses yang cantik. Tentu saja, memahami apa itu bilangan tidak akan bisa memberi nilai plus ketika wawancara kerja, apalagi untuk melamar pujaan hati ke calon mertua, namun jelas memahami matematika pada awalnya memang sukar untuk langsung dikaitkan dengan aplikasi sehari-hari. Yang bisa saya jamin adalah, proses pencarian jawaban dari pertanyaan-pertanyaan (meskipun terkesan konyol dan tidak penting) yang muncul dari setiap perenungan kita akan selalu memberikan level pemahaman baru, jika tidak kebijaksanaan baru, dalam bagaimana kita melihat semesta ini. *So*, yang masih bertahan hidup membaca tulisan ini sampai kalimat ini, semoga kalian terus menjadi pencari!

[1] Ihsan, Aditya F. 2018. *Matematika Mencari Makna: Apa itu Ada* [online] (https://www.facebook.com/notes/aditya-finiarel-phoenix/matematika-mencari-makna-5-apa-itu-ada/10155913659096355/), diakses tanggal 24 Agustus 2018.

[2] *Peano, Giuseppe (1889). Arithmetices principia, nova methodo exposita [The principles of arithmetic, presented by a new method].*

[3] *Frege, Gottlob* (1884). *Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl* [The Foundations of Arithmetic: A logico-mathematical enquiry into the concept of number].

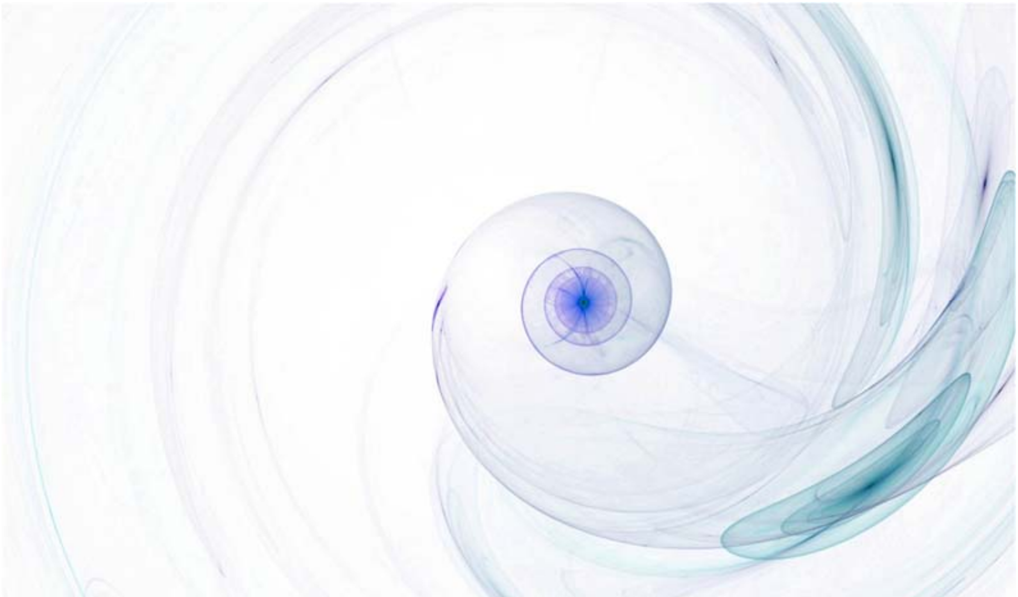
[4] *Whitehead, Alfred North; Russell, Bertrand (1925), Principia mathematica, Vol.* ***1-3*** *(2 ed.), Cambridge: Cambridge University Press.*

[5] *Russell, Bertrand (1919), Introduction to Mathematical Philosophy. London: George Allen & Unwin, Ltd.*

[6] *Von Neumann, John [1923], "Zur Einführung der transfiniten Zahlen" [On the introduction of transfinite numbers]*

[7] *Cantor, Georg (1897),* "Beitrage zur Begrundung der transfiniten Mengenlehre. II" [Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers II]

[8] Enderton, Herbert. 1977. *Elements of Set Theory*. London: Academic Press



Matematika Mencari Makna

"Dari pikiran Pencipta didatangkan angka. Dari jumlah didatangkan geometri. Dari geometri didatangkan simbol. Dari simbol muncul surat, dan surat itu berasal dari luar mulut manusia. Jadi, ceritakan lagi, atas Nama Siapa kita berbicara?"

- Claudia Pavonis

Matematika sudah menjadi ilmu yang begitu umum dalam kehidupan sehari-hari. Hampir tidak ada aspek keseharian dimana tidak terdapat matematika di dalamnya. Setiap anak sudah menemui makhluk ini sejak Taman Kanak-Kanak (minimal untuk berhitung), dan akan terus belanjut hingga Sekolah Menengah Atas. Bagi yang berkecimpung di wilayah ilmu sains dan teknik, makhluk ini tidak akan pernah berhenti menghantui hingga toga dipakai dan ijazah sarjana terbagi. Bahkan bagi yang berkecimpung di wilayah sosial pun, terkadang ia tetap bersembunyi dibalik metode-metode penelitian kuantitatif dimana statistika selalu siap mendampingi. Sayang, dalam hubungan yang begitu erat dengannya pun, matematika tetaplah memiliki citra yang begitu menakutkan di khalayak umum. Ia bagai hantu yang selalu membuat siswa berkeringat dingin setiap kali harus mempelajarinya, atau bagai monster yang harus dihindari sebisa mungkin, atau bagaikan kesusahan hidup, selalu ada namun selalu tidak diharapkan.

Sukar untuk dipungkiri, matematika pada kenyataannya sering hanya hadir dalam bentuk symbol-simbol yang sukar dimengerti, yang akan membuat setiap anak mengerutkan dahi dan memunculkan ekspresi "katakan 'tidak' pada narkoba", namun pada matematika. Padahal, simbol-simbol itu hanyalah media sebagaimana Bahasa, yang menyembunyikan segudang hikmah dan keindahan di baliknya. Sayangnya, hanya sedikit makna dibalik simbol-simbol tersebut yang tersingkap pada masa sekolah, disebabkan macan bernama utilitas dan industri dibalik jubah ujian dan perguruan tinggi bergengsi, ataupun prospek kerja yang tinggi, selalu mengejar dari belakang, tidak hanya muridnya, namun juga gurunya. Pada akhirnya, masih banyak yang tidak mengerti mengenai apa sebenarnya matematika dan harta karun apa yang terkubur di dalamnya.

Memahami Matematika

Matematika dalam perspektif umum bisa dipandang secara sederhana sebagai ilmu mengenai berhitung. Hal ini terkesan begitu sederhana, lantas mengapa menakutkan? Masalahnya, memahami ilmu mengenai berhitung tidak hanya berarti bahwa kita cukup bisa berhitung, namun juga paham formulasi dari cara berhitung itu sendiri, apa yang harus dihitung, dan bagaimana cara menghitungnya. Dalam prosesnya, ketiga aspek tersebut dipelajari untuk memahami bentuk umum dari perhitungan, dan sebagaimana bentuk umum pada hampir semua konsep, mereka berada dalam wilayah abstrak. Proses abstraksi inilah yang terkesan begitu sulit untuk dilakukan karena menarik mundur dari realita ke wilayah ide dan simbolik yang cukup sukar untuk tervisualisasikan dengan baik. Bagaimana mengukur berapa banyak pizza yang dimakan sekelompok orang bisa diperumum menjadi aturan penjumlahan, yang bisa memberi konsep tentang pecahan, yang kemudian dalam bentuk yang lebih rumit menjadi sebuah sistem persamaan linear, yang dalam bentuk abstraknya menjadi konsep aljabar linear yang menjadi mata kuliah anak tingkat 3 jurusan matematika. Konsep kalkulus seperti limit, integral, dan diferensial pun merupakan abstraksi dari suatu perhitungan tertentu, dimana ada variabel atau ukuran yang ingin ditentukan atau dicari nilainya.

Pada perkembangannya, proses abstraksi ini pun terus terjadi hingga menjadi suatu ciri khas tersendiri dari apa yang dilakukan matematika. Jika yang dilakukan matematikawan hanyalah berhitung, maka para fisikawan, insinyur, ekonom, pengusaha, bahkan hingga pedagang pun melakukannya, bahkan secara konkret dengan objek yang jelas. Matematika hanya melakukan proses abstraksi dari realita ke dalam suatu model tertentu yang sifatnya general dan independen dari realita itu sendiri. Proses menghitung dua apel ditambah dengan tiga apel menjadi lima apel diabstraksi dalam suatu aturan dimana ia sudah tidak lagi bergantung pada realita, yakni bahwa dua ditambah tiga adalah lima.

Lantas, mengapa memerlukan simbol-simbol yang begitu rumit? Tujuan dari abstraksi matematis adalah generalisasi konsep sehingga aturan yang formulasikan berlaku secara universal. Untuk mencapai tujuan tersebut, pembahsaan yang detail mengenai suatu objek matematis tidaklah diperlukan, karena yang terpenting adalah bagaimana objek itu berperilaku dalam suatu aturan matematika tertentu. Dengan itu, setiap objek riil cukup diambil substansinya saja dalam bentuk objek khayal yang hanya membawa sifat-sifat perlu dari objek yang sesungguhnya. Matematika selalu berusaha melihat substansi dari realita dan membawanya ke ranah ide atau *forma*. Dalam ranah ide, semua objek cukup ditunjuk atau direpresentasikan dengan huruf atau simbol sederhana ketimbang kata-kata untuk mempermudah pembacaan atau penulisan. Terlebih lagi, karena ranah ide ini merupakan generalisasi dari realita, maka terminologi tidak perlu diberikan kepada setiap objek spesifik. Misalnya, objek waktu cukup dituliskan dengan suatu huruf 't' dimana 't' ini, sebagai substansi dari waktu, harus bernilai bilangan riil positif (karena waktu bersifat kontinyu dan tidak mungkin mundur). Secara umu, mekanisme ini dapat digambarkan dalam bagan berikut

Bagan 1. Mekanisme abstraksi dalam matematika

Karena matematika selalu bermain di wilayah yang sudah independen dari realita, maka satu-satunya aturan yang bermain di dalamnya hanyalah logika yang rigid, bersama dengan aturan-aturan lain yang dibangun sebelumnya. Sebagaimana apa yang dikatakan George Cantor, “Esensi dari matematika adalah kebebasannya”. Apapun bisa dikonstruksikan dalam suatu sistem matematika, selama mengikuti kaidah logika formal yang valid. Memang terkadang, dalam proses abstraksi yang sudah jauh ke wilayah teoretik, objek-objek matematika berubah menjadi murni independen, bahkan tanpa memiliki proyeksi terhadap realita. Objek-objek ini hanya menjadi objek yang ada hanya untuk sistem tersebut, tanpa merepresentasikan apapun pada realita. Akan tetapi, ketika suatu sistem matematika memang dibangun dari hasil abstraksi langsung dari suatu objek riil, beberapa kaidah dalam realita menjadi koridor pembatas tersendiri dari apa yang bisa dilakukan pada sistem tersebut, dan kita pun selalu bisa memproyeksikan kembali setiap objek pada sistem tersebut dalam konteks yang sesungguhnya di dunia nyata.

***Invented or Discovered*?**

Yang menjadi pertanyaan kemudian adalah, jika memang demikian, apakah matematika itu diciptakan atau ditemukan? Ini menjadi sebuah pertanyaan krusial karena menentukan interpretasi kita terhadap semua hal yang dihasilkan oleh matematika. Matematika bahkan bisa disebut sebagai ilmu paling ‘sekuler’ karena semua objeknya merupakan hasil konstruksi logika manusia, bebas dari realita. Kalaupun sistem matematika yang dibangun berasal dari realita, matematika dalam hal tersebut hanya berperan sebagai alat atau instrumen sebagaimana bahasa, obeng dan komputer, untuk membantu manusia dalam melakukan perhitungan tertentu. Opsi kedua tersebut masih begitu memungkinkan karena sebagaimana bahasa, meskipun yang direpresentasikan olehnya merupakan hal-hal riil, bahasa itu sendiri tetaplah hasil konstruksi manusia. Mengingat matematika bersifat begitu fundamental karena menjadi pijakan bagi ilmu lain, terutama fisika untuk berkembang, apa yang terjadi jika kemudian semua formulasi matematika yang telah digunakan pada berbagai ilmu tersebut ternyata hanya merupakan hasil konstruksi? Ataukah matematika sendiri sesungguhnya memiliki esensi lain yang *given*, yang ciptakan bersama semesta ini, dimana manusia pada dasarnya hanya memformulasikannya dalam bentuk simbol-simbol?

Dalam bentuk teoretiknya, matematika sendiri sudah berusaha mencari dasar dirinya sendiri, fondasi dimana ia berdiri melalui cabang ilmu yang dikenal dengan *foundations of mathematics*. Pertanyaan besar mengenai apa sesungguhnya landasan matematika menjadi pertanyaan yang cukup penting sejak abad ke-19, sebagaimana pertanyaan yang sama diajukan ilmu lain untuk mencari inti utama dari pengetahuan. Matematika tidak bisa dikatakan berdiri di atas realita karena justru realita lah yang berdiri dengan penopang matematika, dan apa yang ada di dalam matematika justru hanyalah representasi, proyeksi khayal, dan generalisasi dari objek aslinya di realita. Dalam pencarian reduksionis ini, perkembangan yang didapatkan di matematika tidaklah melegakan hati seperti penemuan *standard model* partikel elementer di fisika sebagai fondasi material alam semesta. Satu-satunya yang bisa dipegang dalam pencarian fondasi matematika hanyalah kaidah-kaidah logika, karena memang hanya itulah yang menjadi hukum besar proses bermatematika, sehingga apa yang dikembangkan oleh para matematikawan *foundations* pada akhirnya adalah merekonstruksi kaidah berlogika itu sendiri (melalui apa yang dikenal dengan *model theory*).

Jika dalam sains pencarian fondasi dasar adalah dengan meneliti unsur-unsur penyusun materi, atau dengan melihat sebab-sebab dari setiap fenomena, hingga mendapatkan prinsip utama yang membangun semua prinsip lain (seperti *Theory of Everything*), atau materi dasar yang membentuk semua materi lain (seperti *quarks* dan partikel lainnya dalam *standard model*), atau sebab pertama yang menjadi awal dari semua fenomena (seperti *Big Bang* dalam sejarah semesta), maka pencarian fondasi dasar berarti memformulasikan (atau menemukan) sebuah (atau sekumpulan) aksioma utama paling sederhana yang *a priori*, tidak bisa dihasilkan oleh aksioma lain dan tidak bisa direduksi lagi. Barulah kemudian seluruh bangunan matematika (semua teorema dan formulasi yang sudah ada), di konstruksi ulang berdasarkan aksioma dasar tersebut. Sayangnya, aksioma dasar ini sifatnya tidak unik, artinya, kita bisa menemukan aksioma dasar yang berbeda, dan tetap bisa mengonstruksi seluruh bangunan matematika (meski paradigmanya jadi berbeda). Karena yang terpenting dari matematika adalah konsistensi (tidak ada pernyataan yang saling kontradiksi secara logika), maka pluralitas aksioma dasar itu sangat memungkinkan. Tetapi, bukankah itu aneh? Lantas matematika dibangun oleh apa bila terdapat banyak kemungkinan aksioma dasar yang bisa membangunnya? Hal ini seperti membenarkan bahwa matematika merupakan hasil konstruksi manusia, karena pada akhirnya setiap aksioma dasar itu bisa diformulasikan dengan cara yang berbeda. Jika memang matematika adalah hal yang inheren *given*, maka haruslah ada prinsip dasar yang mendasari, yang unik dan tunggal.

Nihilnya Konstruksi Manusia

Sebuah ilham kemudian turun ke seorang matematikawan asal Austria, Kurt Godel, yang pada tahun 1931 mempublikasikan makalah [2] yang berisi sebuah teori yang setara dengan relativitasnya Einstein, sebuah teori yang dikenal dengan *Godel's Incompleteness Theorem* atau Teorema Ketidaklengkapan Godel. Teori ini pada dasarnya sebuah tikaman yang cukup tajam pada fondasi matematika, karena ia mengugat seluruh sistem matematika (bangunan matematika yang dikonstruksi dari suatu set aksioma dasar tertentu). Teorema yang terdiri dari dua bagian ini tidak terlalu rumit, namun signifikansinya sangatlah besar. Pada teoremanya yang pertama, Godel hanya mengatakan bahwa suatu sistem matematika yang aksiomatik (dibangun dari suatu set aksioma dasar) tidak akan pernah bisa lengkap dan konsisten sekaligus. Yang dimaksud 'lengkap' di sini adalah semua kebenaran dalam sistem tersebut bisa dibuktikan. Artinya, jika suatu sistem itu konsisten, maka pastilah ada kebenaran yang tidak bisa dibuktikan, akan tetapi jika sistem itu lengkap, pastilah ia tidak konsisten. Pada teoremanya yang kedua, ia menambahkan bahwa suatu sistem tidak akan pernah bisa membuktikan konsistensi dirinya sendiri. Ini terkait dengan teorema pertama, karena teorema kedua mengatakan bahwa untuk membuktikan suatu sistem itu konsisten, maka kita tidak bisa menggunakan sistem itu sendiri, kita harus menggunakan aksioma tambahan untuk membuktikan bahwa sistem tersebut konsisten. Akan tetapi, aksioma tambahan ini menghasilkan suatu sistem baru, yang harus dibuktikan juga konsistensinya, namun sekali lagi teorema kedua mengharamkan itu sehingga kita akan butuh lagi aksioma di luar sistem itu, dan seterusnya. Hal ini menunjukkan bahwa aksioma dasar dalam suatu sistem matematika tidak akan pernah cukup dan lengkap, seperti apa yang dikatakan Godel pada teorema pertamanya.

Implikasi dari teori ini sebenarnya sederhana, namun merobek sebuah lubang besar dalam fondasi ilmu pengetahuan, karena teori ini akan mengatakan bahwa mustahil untuk membuktikan bahwa matematika (dalam sistem apapun) yang dibangun itu benar secara utuh (konsisten), karena untuk membuktikan bahwa ia benar, maka kita akan selalu membutuhkan sistem lain. Matematika tidak akan pernah bisa menjadi perangkat yang rigid dan lengkap. Ia menjadi fondasi yang berlubang dan instrumen yang rapuh. Lantas, bagaimana? Jika ini memang 'benar', maka hampir semua bangunan sains akan roboh, karena disambing eksperimentasi, matematika adalah salah satu fondasi terkuat sains.

Perlu diperhatikan bahwa matematika dalam pencarian seperti ini terbawa oleh paradigma reduksionis ala Barat, yang sukar 'menerima' sesuatu selain dari apa yang bisa dibuktikan sendiri menggunakan perangkat pikiran yang ada. Semua bermula dari penolakan Descartes terhadap semua kebenaran yang akhirnya mengembalikan semuanya hanya pada diri sendiri, bahwa kebenaran satu-satunya yang tidak bisa ia sangkal hanyalah keberadaan akan dirinya sendiri (*Cogito Ergo Sum*). Paradigma ini menghantui dan merasuki cara berpikir peradaban *Renaissance* Eropa yang kemudian berlanjut hingga ke dunia modern. Akan tetapi, bagaimanapun, perangkat yang berasal dari manusia selalu terbatas, karena mustahil melihat sesuatu tanpa melalui persepsi dan interpretasi pribadi. Ujung-ujungnya, para filsuf modern pun mulai cenderung mengarah pada pesimisme terhadap pencarian kebenaran dengan pemikiran-pemikiran seperti nihilisme dan absurdisme. Ini yang juga mungkin berdampak pada cara berpikir matematikawan abad ke-19 dan 20 yang mulai reduksionis dan akhirnya mencapai kesimpulan yang serupa. Adalah mustahil mencari kebenaran dasar hanya melalui konstruksi akal.

Meskipun Godel sudah memberikan lubang besar dalam fondasi matematika, bukan berarti lantas matematika berhenti berkembang. Karena pada faktanya, lubang ini tidak menghapus utilitas dan kegunaan matematika dalam sains, ilmu teknik, informatika, ekonomi, dan berbagai ilmu lainnya. Matematika tetaplah menjadi *tools* ampuh untuk menyelesaikan banyak permasalahan. Seperti halnya bahasa, meskipun kita tahu adalah mustahil mendefinisikan semua konsep dan istilah tanpa terikat dengan bahasa itu sendiri, kita tetap menggunakannya dan cukup peduli pada utilitasnya. Itulah mengapa pembuktian teorema Godel yang sudah dilakukan tidak banyak memberi dampak besar, meskipun signifikansinya cukup untuk membuat masyhur nama Godel.

Apakah kemudian yang tersisa dari matematika adalah konsep aplikasi dan penerapannya sebagai *tools* bagi ilmu lain? Kontras dengan mereka yang hanya menganggap matematika sebagai instrument atau alat untuk 'menghitung', ada hal yang tetap membuat para matematikawan teoretik bertahan dan terus memperluas abstraksi ranah ide matematika, yakni keindahan dari pola-pola yang ditemukan dari abstraksi itu sendiri. Bahkan bagi para fisikawan sendiri pun, keindahan dari formulasi matematis yang dihasilkan dalam suatu teori-teori fisika menjadi standar tersendiri bagi kebenaran formulasi tersebut. Seperti apa yang dikatakan G.G. Hardy [3], t*he mathematician's patterns, like the painter 's or the poet's, must be beautiful; the ideas, like the colours or the words, must fit together in a harmonious way. Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for uglymathematics*, bahkan teori string sendiri dalam fisika teoretik cenderung paling disepakati karena 'kecantikan' matematikanya memungkinkan teori gravitasi kuantum (teori yang menggabungkan relativitas dan mekanika kuantum) untuk bisa diformulasikan.

Dalam konsep keindahan itu lah, kita bisa mengubah perspektif terhadap matematika sehingga dengannya bisa memetik makna-makna tersembunyi. Ketimbang berusaha menggali fondasi dalam sebuah konstruksi yang jelas-jelas semakin memperjelas bahwa matematika adalah invensi akal manusia, banyak hal dalam matematika yang justru dalam abstraksi langsungnya dari realita mengimplisitkan sesuatu yang universal untuk kita maknai sebagai manusia yang hidup di semesta ini.

Daftar Pustaka

[1] Ihsan, Aditya F. 2016. *Booklet Phx #10: Meta-matika*. Self-publication. Available at phoenixfin.me/bookletphx-10/ .

[2] Gödel, Kurt (1931). "*Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I.*" [On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems I]. Monatshefte für Mathematik und Physik 38: 173-198.

[3] Hardy, G. H. (2004) [1940]. *A Mathematician's Apology*. Cambridge: Cambridge University Press.

[4] Russell, Bertrand (1919). *Introduction to Mathematical Philosophy*. London: George Allen & Unwin, Ltd

Keindahan Dalam Kekacauan

Salah satu impian yang sangat ingin dicapai sains adalah kemampuan untuk memprediksi secara akurat suatu fenomena yang belum terjadi. Dengan memformulasikan semua hukum alam yang berlaku pada suatu keadaan atau sistem, maka kita tentu bias melakukan proyeksi akan bagaimana sistem tersebut akan berperilaku sepanjang waktu. Ketika Newton memformulasikan mekanikanya pada abad ke-17, hampir pergerakan segala sesuatu bisa dirumuskan, menghasilkan kepercayaan-diri pada sains dan dengannya paradigma deterministik – bahwa segala fenomena alam selalu terjadi secara pasti. Paradigma deterministik ini membuat kita menjadi melihat semesta ini menjadi seperti mesin mekanik (istilah 'mekanika' berasal dari sini), sehingga selama kita bisa memahami cara kerjanya, maka kita bisa tahu mesin itu akan seperti apa sepanjang waktu. Pandangan seperti ini dieksplisitkan dalam suatu pernyataan terkenal oleh Pierre-Simone Laplace, dimana ia mengatakan

"*We may regard the present state of the universe as the effect of its past and the cause of its future. An intellect which at a certain moment would know all forces that set nature in motion, and all positions of all items of which nature is composed, if this intellect were also vast enough to submit these data to analysis, it would embrace in a single formula the movements of the greatest bodies of the universe and those of the tiniest atom; for such an intellect nothing would be uncertain and the future just like the past would be present before its eyes.*"

Secara sederhana, Laplace mengatakan bahwa selama kita mengetahui secara detail semua hukum di semesta beserta setiap detail ukuran dan variabelnya pada suatu waktu, maka kita akan bisa memprediksi semua kejadian berikutnya di semesta. Apa yang Laplace maksud sebagai setiap detail ukuran dan variabelnya pada suatu waktu itu adalah nilai awal yang menentukan pergerakan suatu sistem berikutnya. Misal ketika sebuah meriam ditembakkan, dan kita mengetahui berapa kecepatan awal bola meriam, berapa sudut tembakannya, berapa besar gesekan udara terhadap bola meriam, dan ukuran-ukuran lainnya yang terkait dengan itu, maka kita akan bisa tahu dengan akurat bagaimana pergerakan bola meriam tersebut. Bahkan ketika kita melempar dadu pun, jika kita bisa tahu secara detail sudut pelemparan kita, berapa massa dadu, berapa besar gaya pelemparannya, dan hal-hal lain yang terkait dengannya, maka angka dadu yang dihasilkan pun akan bisa kita prediksi dengan akurat. Simpelnya, tidak ada yang namanya 'acak'.

Persamaan Lorentz

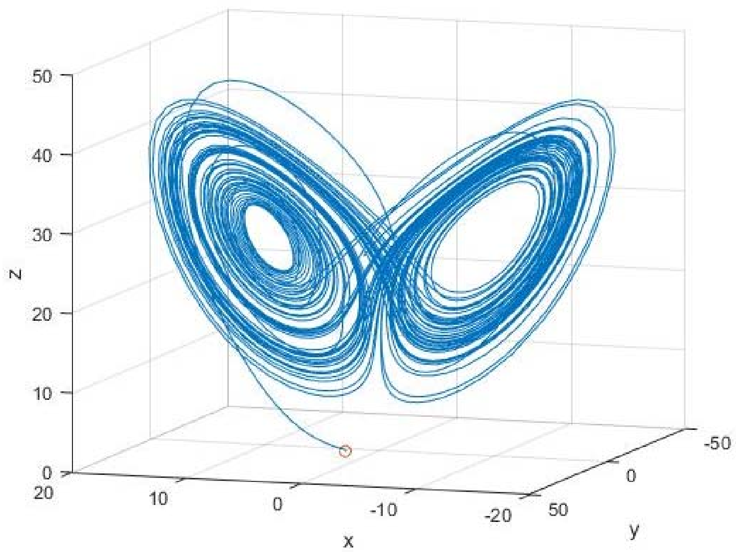
Tentu saja pandangan di atas merupakan janji yang begitu menggiurkan di abad dimana pertumbuhan sains memang memungkinkan manusia untuk memahami cara kerja begitu banyak fenomena. Akan tetapi, pandangan Laplace ini perlu untuk dipatahkan ketika pada tahun 1963 seorang ahli meteorologi bernama Edward Norton

Lorenz secara tidak sengaja menemukan suatu sistem dinamik yang deterministic namun perilakunya tidak bisa diprediksi pada penelitiannya terhadap atmosfer.

Meski saya berusaha untuk menulis makalah ini dengan minim simbol, namun untuk menjelaskan hal ini, saya perlu sedikit menuliskannya. Lorenz meneliti suatu sistem dinamik 3 variabel x, y, dan z yang ketiganya bergantung terhadap waktu (t), dan perubahannya tiap waktu ditentukan oleh

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$
$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$
$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

Tidak perlu pusing mengenai ketiga persamaan diferensial di atas bermakna apa. Secara sederhana, kita bisa pahami bahwa $\frac{dx}{dt}$ berarti kecepata perubahan variabel x terhadap waktu t. Artinya kita punya tiga variabel kecepatan perubahannya saling mempengaruhi. Perhatikan bahwa sistem tersebut ditentukan oleh 3 parameter tambahan, yakni σ, ρ, dan β. Nilai ketiga parameter ini memang memiliki makna tersendiri pada model aslinya, namun singkat cerita, Lorenz memilih nilai ketiga parameter tersebut adalah $\sigma = 10$, $\rho = \frac{8}{3}$, dan $\beta = 28$. Jika kita gunakan parameter tersebut dan mencoba menggambar pergerakan x, y, dan z dalam suatu grafik dimensi tiga, maka yang ia dapatkan adalah sebagai berikut:



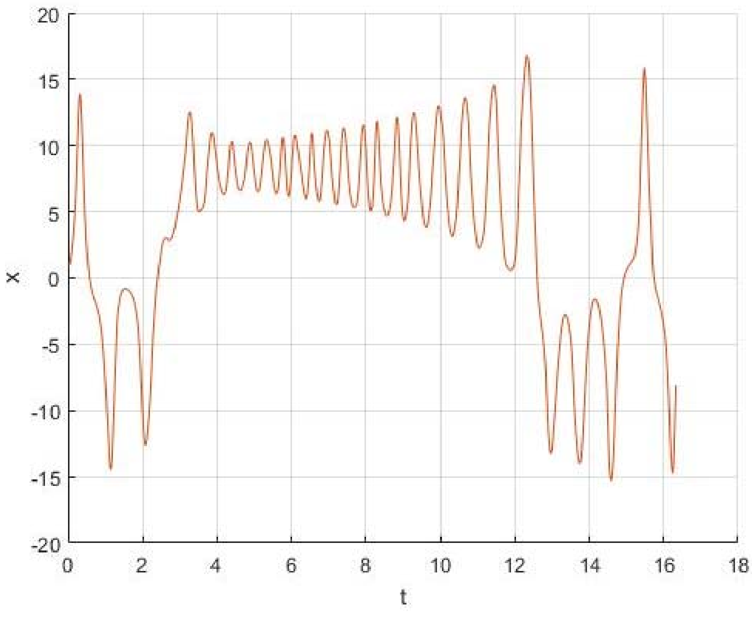
Gambar 1. Plot kurva solusi sistem Lorenz untuk suatu nilai awal (ditandai dengan bulatan merah)

Apa yang kita lihat di sini? *Well*, anda tidak memahami gambar tersebut, maka tidak usah panik, itu wajar. Pertama-tama, ini adalah gambar grafik 3 dimensi dengan sumbu x, y, dan z. Pada dasarnya, pergerakan suatu sistem ditentukan oleh nilai awalnya, atau kondisi awal ketika sistem itu dijalankan, karena apapun yang terjadi berikutnya hanyalah bagaimana nilai awal itu berubah berdasarkan hukum yang diberikan (3 persamaan di atas). Untuk grafik di atas, nilai awalnya saya berikan dengan bulat merah kecil.

Kedua, suatu sistem biasanya memiliki solusi yang tren pergerakannya untuk waktu seterusnya bisa dibaca, bisa hanya berputar dalam suatu kurva periodik (seperti bandul yang hanya bergoyang ke kanan dan ke kiri bila tidak ada gaya gesek yang berlaku, atau seperti semua benda bermassa yang dilempar di dalam atmosfer bumi akan selalu bergerak menuju inti bumi).

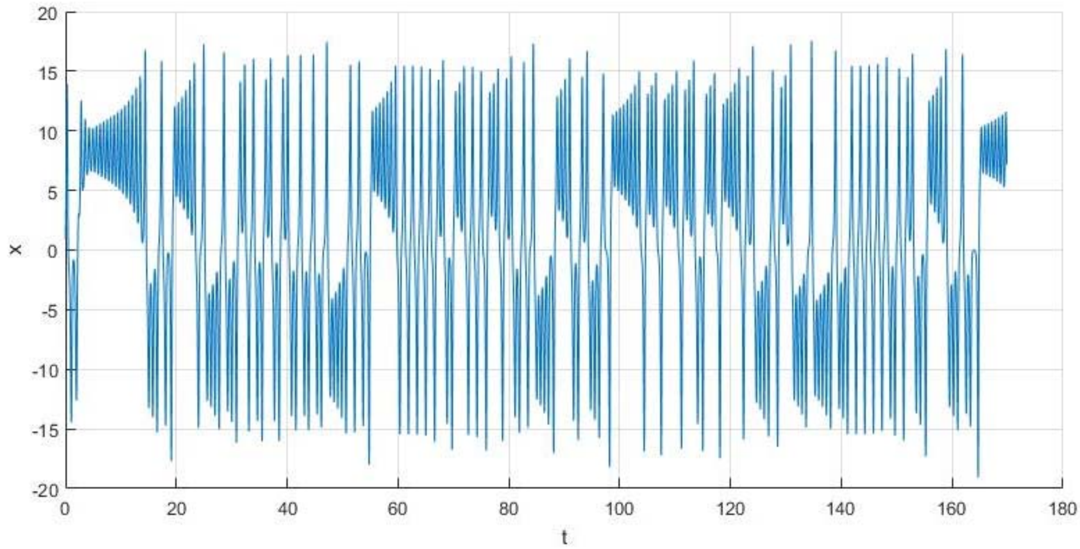
Yang Acak dalam Yang Pasti

Bila kita perhatikan apa yang terjadi pada grafik sebelumnya di atas, sistem tersebut seakan selalu berputar mengelilingi dua 'penarik' secara teratur. Namun, yang sebenarnya terjadi adalah benda yang bergerak dari bulatan merah kecil tidak pernah bisa ditentukan secara pasti kapan berada di siklus yang kanan kapan berada di siklus yang ke kiri. Bila kita perhatikan dalam grafik waktu, maka yang kita dapatkan adalah sebagai berikut



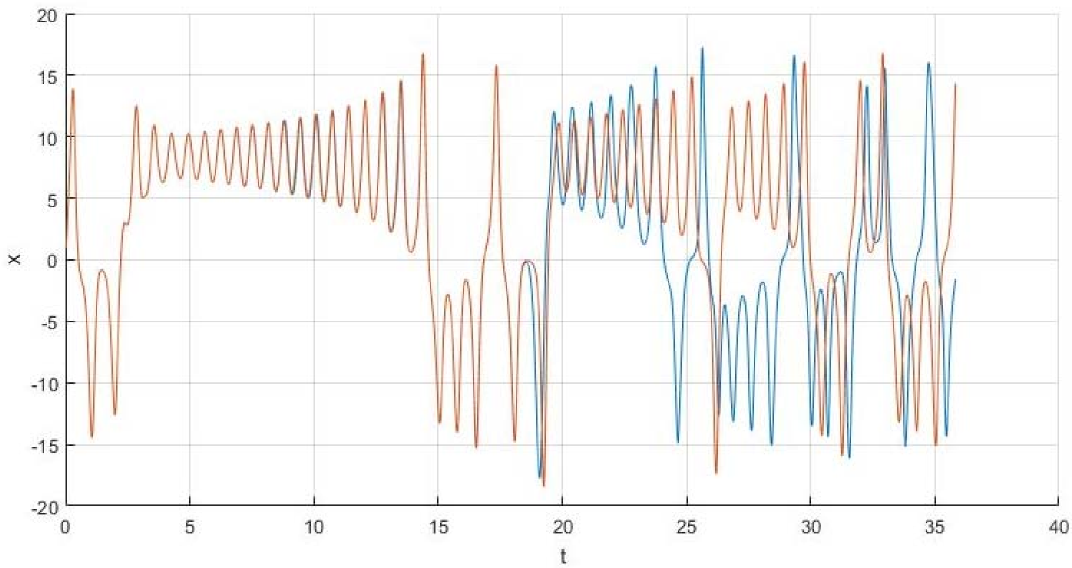
Gambar 2. Plot nilai x terhadap t dari sistem Lorenz dengan nilai awal yang sama dengan Gambar 1.

Seperti tidak ada pola yang pasti kapan x berosilasi di bawah, kapan berosilasi di atas. Tapi, tunggu dulu bagaimana jika ini terlihat acak karena kita baru melihat perilakunya dalam skala waktu yang singkat (pada gambar di atas hingga t=16). Bagaimana jika polanya baru terlihat untuk waktu yang lama? Ya, ketika kita coba plot untuk waktu yang panjang pun, pergerakannya tetap tidak berada dalam keteraturan yang bisa dibaca. *It seems random!*



Gambar 3. Plot lebih panjang (dalam rentang t yang lebih besar) dari Gambar 2.

Terlebih lagi, secara logika sederhana, jika kita mulai di posisi yang begitu dekat (anggap selisih nilai awal x-nya hanya 0.0001), tentu seharusnya pergerakannya sepanjang waktu tidak akan jauh berbeda bukan? Tapi sayangnya, untuk kedua kalinya kita meleset.



Gambar 4. Plot kurva x terhadap t dari sistem Lorenz untuk selisih nilai awal x sebesar 0.0001

Kita bisa lihat bahwa untuk sekitar 18 detik pertama, pergerakan dua sistem dengan nilai awal x hanya berselisih 0.0001 terlihat selaras dan sejalan. Akan tetapi, pada detik ke-19, tanpa hujan tanpa angin, tanpa ada yang ganggu di tengah-tengah, tiba-tiba pergerakan mereka berubah menjad kacau! Tidak ada lagi keselarasan antara keduanya. Bagaimana mungkin?

Ketika Lorenz mempublikasikan apa yang ia temukan ini, untuk pertama kalinya dunia sains, terutama penganut deterministik keras, terguncang. Dan dari sinilah, istilah *chaos* muncul, suatu kekacauan yang lahir dari suatu sistem yang deterministik. Tidak ada masalah di sistemnya, tidak ada masalah di matematikanya, namun sistem itu berperilaku secara *unpredictable*. Bahkan untuk nilai awal yang hanya berbeda sangat sangat sangat kecil pun, perilaku dua sistem bisa sangat berbeda. Inilah yang kemudian kita kenal

Lorenz kemudian menuliskan [7]

One meteorologist remarked that if the theory were correct, one flap of a sea gull's wings would be enough to alter the course of the weather forever. The controversy has not yet been settled, but the most recent evidence seems to favor the sea gulls

Dalam suatu kejadian, Lorenz diundang ke dalam suatu konferensi namun ia lupa untuk memberikan judul makalah yang akan ia sajikan, hingga akhirnya pihak panitia berinisiatif memberikan judul '*Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?*' Ya, jika anda pernah mendengarnya, maka inilah asal mula penyebutan '*butterfly effect*' untuk suatu sistem yang sangat *unpredictable*. Satu kepakan kupu-kupu di Brazil bisa saja menghasilkan Tornado di Texas. Mungkinkah? Mungkin saja, namun tentu bukan hanya satu kepakan kupu-kupu, karena bayangkan ada berapa banyak variabel yang bermain pada atmosfer Antara Brazil dan Texas, dan bayangkan juga kompleksitas 'kekacauan' seperti apa yang bisa terjadi.

Sistem yang *chaotic* seperti di atas mengimplikasikan bagaimana determinisme sains tidak berarti bahwa segala hal di alam adalah *predictable*. Apa yang diperlihatkan di atas hanyalah sistem dengan 3 variabel dan 3 parameter! Bayangkan ada berapa banyak variabel dan parameter yang saling mempengaruhi dalam seluruh sistem jagad raya. Kita juga lihat bagaimana perbedaan nilai awal yang sangat kecil bisa menghasilkan perilaku yang sangat murni berbeda, sedangkan kita tahu dalam pengukuran, selalu ada galat yang dihasilkan dari alat ukur. Sebagai manusia, adalah mustahil mengukur tanpa galat. Sayangnya, untuk sistem seperti di atas, tiada maaf bagi galat sekecil apapun, dan dengan demikian memberi kita tembok keterbatasan yang tinggi untuk bisa memprediksi perilaku suatu sistem secara akurat.

Pernyataan Laplace di atas, yang juga sering dikenal sebagai *Laplace's Demon*, sebenarnya sangat menguatkan paham mekanistik yang berujung pada *deisme* di kalangan para saintis, sampai saat ini sekalipun. Banyak saintis hanya melihat semesta ini sebagai suatu mesin, dengan suatu cara kerja tertentu, yang bisa diprediksi dan dimanipulasi. Dengan cara pandang seperti ini, tidak ada tempat bagi

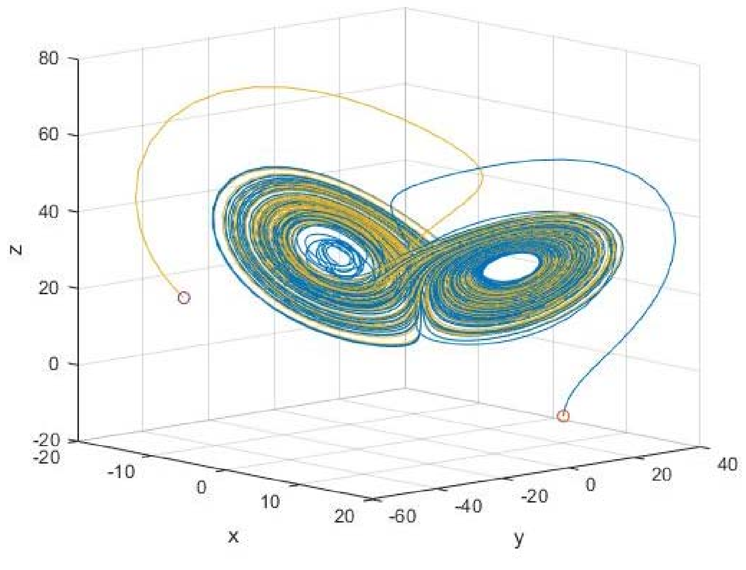
Tuhan untuk *ngutek-utek* di tengah-tengah, maka Tuhan cukuplah jadi sang pendesain mesin ini dan membiarkan semesta bekerja dengan sendirinya berdasarkan cara kerja yang telah di desain di awal.

Ya, tapi penemuan sistem yang *chaotic* bersamaan dengan penemuan-penemuan mengguncangkan lainnya seperti mekanika kuantum, menghancurkan postulat Laplace tersebut, dan dengannya paham-paham yang terlalu mengagungkan sains sebagai yang mampu membaca dan memprediksi alam. Apa yang ditemukan Lorenz sekitar setengah abad yang lalu kemudian menjadikan *chaos* sebagai topik yang secara intens diteliti para matematikawan dan saintis. Sistem-sistem *chaotic* lainnya pun bermunculan. Pada akhirnya, masih begitu banyak hal yang belum kita pahami dari semesta ini.

***Emergence* dan Pola Statistik**

Apa yang bisa kita lihat dari sistem Lorenz belum lah selesai. Kita sudah mencoba melihat bagaimana secara detail, suatu sistem yang deterministik sekalipun bisa berperilaku 'kacau', menghasilkan tanda tanya tersendiri atas kompleksitas semesta ini dan seberapa jauh kita bisa memahami perilakunya. Seakan hal itu tidak cukup, jika kita sedikit melakukan *zoom out* dan sekarang mencoba melihat dalam segi umumnya, ternyata ada hal lain yang bisa kita temukan.

Masih dengan sistem yang sama seperti di atas, perhatikan bahwa jika kita plot pergerakan sistem Lorenz dengan nilai awal yang berbeda jauh, kita akan dapatkan gambar seperti berikut



Gambar 5. Plot kurva solusi sistem Lorenz dengan dua nilai awal yang berjauhan.

Ternyata, darimanapun kita berangkat, 'bentuk' umum dari pergerakan sistemnya selalu berupa dua donat yang saling mengait tersebut (ada yang mengatakan itu berbentuk seperti kupu-kupu, agar cocok dengan istilah *butterfly* *effect*). Meskipun jika dilihat secara rinci, pergerakan kedua kurva di atas sebenarnya berbeda, namun mereka membentuk struktur yang serupa. Inilah perbedaan melihat suatu sistem secara kualitatif dan kuantitatif. Dari segi kualitatif, kita melihat sistem ini secara general dalam artian tidak mengidentifikasinya secara matematis, namun dengan struktur umum yang terlihat. Sistem yang *chaotic* ternyata bukan berarti ia tidak terstruktur dan berantakan sama sekali, namun ia hanya sukar diprediksi secara kuantitatif.

Hal ini juga yang kemudian menjadi 'justifikasi' penarikan kesimpulan statistik hanya dari kumpulan data. Kita ketahui bahwa pada dasarnya statistik berusaha menyarikan informasi dari suatu set data terkait suatu hal. Dalam hal ini, memang jika kita melihat sifat kuantitatif per objek, segala hal bisa terlihat begitu acak dan 'berantakan', namun bila dilihat secara kualitatif dalam suatu kumpulan objek tertentu, suatu informasi baru akan muncul, sebuah struktur baru yang merepresentasikan sifat kumpulan objek tersebut secara umum. Tinggi setiap anak kelas X dalam suatu sekolah bisa jadi terlihat begitu beragam dan acak, namun ketika dilihat sebagai satu kesatuan, maka akan muncul pola tersendiri yang diperlihatkan dari hasil statistik deskriptifnya. Semua hal dalam statistic memakai prinsip serupa, bahwa hanya dengan kumpulan data yang banyak lah suatu informasi bisa ditarik dan disarikan. Pada faktanya, setiap individu memiliki keunikannya masing-masing dengan ciri khas, karakter, dan sifat masing-masing, namun dalam kacamata besar, kumpulan individu pada suatu populasi memiliki kecenderungan tertentu. Dasar justifikasi seperti ini mungkin terkesan sederhana, namun dari sini segala bentuk pengambilan kesimpulan, prediksi, tes hipotesis, dan banyak hal bisa dilakukan. Dalam bentuk yang lebih kompleksnya terutama dalam ilmu-ilmu sosial humaniora, bahkan banyak sifat umum yang tidak mampu 'diangkakan' oleh statistik, sehingga kita hanya bisa melakukan observasi dan penyimpulan secara subjektif berdasarkan suatu sudut pandang tertentu akan sifat kualitatif apa yang terlihat.

Ini memberi kita semacam *insight* bahwa terkadang melihat sesuatu secara detail akan berbeda bila kita melihat sesuatu secara general. Pada dasarnya, hal ini pun berlaku umum, terutama di biologi dimana kita mnegenal istilah *emergence*. Dalam suatu sistem biologi, melihat suatu kumpulan objek sebagai satu kesatuan akan memunculkan (*emerge*) sifat-sifat yang sebelumnya tidak terlihat bila kita hanya melihat objek tersebut per individu. Kumpulan sel akan menghasilkan jaringan, dimana suatu sifat baru akan terbentuk, dan kumpulan jaringan menghasilkan organisme, dimana suatu sifat baru lagi terbentuk, dan kumpulan organisme (bersama dengan komponen non-organik lainnya) membentuk ekosistem , dimana suatu sifat baru juga terbentuk, dan seterusnya. Pada setiap level, kesatuan objek seperti menjadi satu keutuhan yang sama sekali berbeda dengan hanya melihatnya sebagai kumpulan objek. Ini disebabkan akan adanya interaksi antar individu beserta banyak faktor eksternal lainnya yang memunculkan perumuman perilaku tertentu, namun interaksi dan faktor-faktor ini sukar diidentifikasi dan diformulasikan secara detail disebabkan kompleksitas dari sistem yang dilihat. Itulah mengapa sifat-sifat ini tidak mampu dilihat secara kuantitatif.

Jika kita perluas pemaknaan akan prinsip ini, maka kita akan melihat bahwa sebagai individu yang melihat dari satu kacamata subjektif, seakan-akan kita memiliki kehendak 'bebas' untuk memilih setiap detiknya dan setiap kejadian menjadi 'terasa' acak. Namun jika melihat ini dalam perspektif kumpulan individu yang menghasilkan kumpulan kejadian dalam suatu rangkaian waktu, maka keacakan itu akan perlahan hilang dan mulai bermunculan lah sifat-sifat baru. Kita bisa sejenak merenungi hal ini dengan mencoba melakukan refleksi atas semua kejadian yang terjadi sejak kecil hingga menuntun kita menjadi seperti saat ini, ada semacam narasi yang terbentuk dan setiap kejadian menjadi memiliki maknanya masing-masing. Keacakan itu hilang bersama lahirnya sebuah struktur baru, seperti struktur kupu-kupu yang muncul dari kekacauan sistem Lorenz. Pada akhirnya, meski seakan kita memiliki pilihan atas apapun yang kita lakukan dalam hidup, semua hal pada dasarnya mengikuti suatu pola scenario raksasa yang pasti. Sebuah struktur deterministik di atas pola probabilistik. Apakah seperti ini justifikasi dari takdir? *Wallahu'alam*. Pada akhirnya, kesimpulannya akan kembali sama seperti bagian sebelumnya, bahwa masih banyak hal yang belum kita pahami mengenai cara kerja semesta ini, dan selalu ada keterbatasan untuk mengungkapnya secara detail.

Sinkronisasi dan Pengaturan Alam

Jangan bosan dulu dengan sistem Lorenz, karena kita masih akan membahasnya sekali lagi. Kita ketahui bahwa dari persamaan yang deterministik, sistem Lorenz berperilaku acak dengan pola mirip probabilistik, meski memang di atas itu terdapat suatu struktur kualitatif yang juga deterministik. Di alam, pola yang probabilistik ini mungkin akan memperlihatkan ketidakteraturan yang sukar diprediksi, sebagaimana cuaca yang memiliki banyak variabel di dalamnya. Akan tetapi, di alam, kita sering menemukan sebuah pola selaras yang sering bisa menimbulkan tanda tanya tersendiri di balik kekaguman.

Salah satu fenomena mengagumkan itu bisa kita lihat dari seekor serangga kecil bercahaya. Ya, kunang-kunang. Jika ada yang pernah melihat kunang-kunang, maka perhatikanlah perilaku mereka bila berada dalam suatu kelompok. Pada awalnya, sekelompok kunang-kunang mungkin terlihat seperti bercahaya dalam periode yang berbeda, dan bahkan tidak beraturan. Akan tetapi, jika beruntung, pada suatu waktu tertentu, kita akan melihat bagaimana sekelompok kunang-kunang menyelaraskan periode cahayanya, sehingga mereka akan terlihat seperti bercahaya hampir bersamaan, membentuk suatu fenomena alam yang indah. Bagaimana sesungguhnya mereka melakukan penyelarasan atau sinkronisasi tersebut?

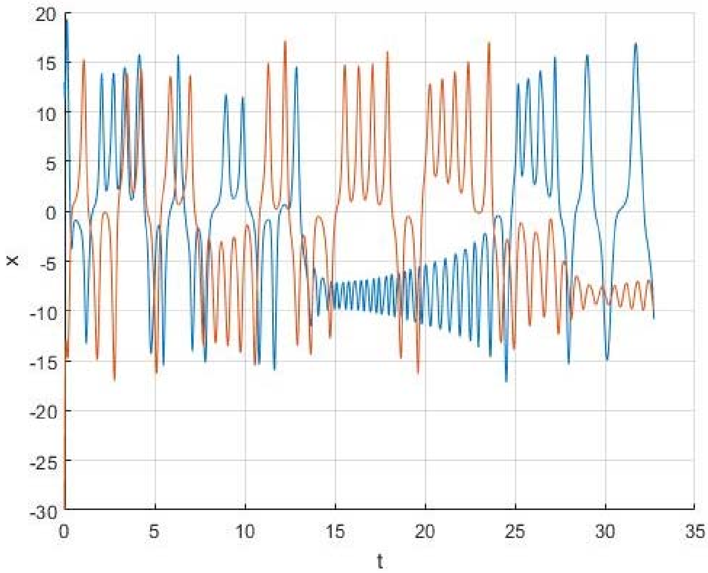
Mengenai apa yang terjadi secara biologisnya, mungkin masih misteri, namun prinsip sinkronisasi ini ternyata hal yang bisa dimodelkan secara matematis. Dalam matematika, ada banyak cara mensinkronkan dua sistem dinamik yang awalnya bergerak secara berbeda. Salah satu cara yang paling mudah adalah dengan memberikan suatu suku tambahan, dimana sistem yang satu akan mempengaruhi sistem yang lainnya, dan juga sebaliknya. Bingung? Mari kita lihat sistem Lorenz di atas. Kita misalkan ada dua sistem Lorenz yang berbeda, dalam artian mereka memiliki nilai awal yang berbeda (secara persamaan masih sama). Kita tandai variabel-variabel dari sistem yang kedua ini dengan tanda *accent* di depannya, sehingga kita miliki dua sistem identik

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \qquad \frac{dx'}{dt} = \sigma(y' - x')$$

$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y \qquad \frac{dy'}{dt} = x'(\rho - z') - y'$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z \qquad \frac{dz'}{dt} = x'y' - \beta z'$$

Meskipun identik, kedua sistem ini kita beri nilai awal yang berbeda. Anggap sistem pertama memiliki nilai awal untuk x adalah 13 dan sistem kedua memiliki nilai awal untuk x adalah -30. Cukup berbeda jauh bukan? Tentu saja kita bisa tebak hasilnya seperti apa. Yang berbeda 0.0001 saja perilakunya akan mengacak jauh, apalagi yang perbedaanya sebanyak 43.

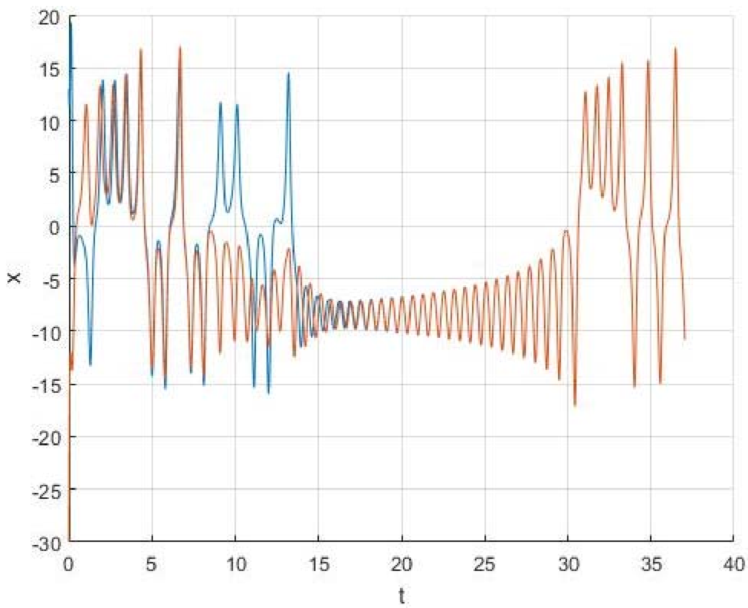


Gambar 6. Plot kurva x terhadap t dari sistem Lorenz identik dengan dua nilai awal yang berbeda.

Sekarang, kita ingin kedua sistem ini saling menyelaraskan perilakunya, maka kita tambahkan suatu suku pada masing-masing persamaan pertama, sehingga kita miliki sepasang sistem

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) + \varepsilon(x - x') \qquad \frac{dx'}{dt} = \sigma(y' - x') + \varepsilon(x' - x)$$
$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y \qquad \frac{dy'}{dt} = x'(\rho - z') - y'$$
$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z \qquad \frac{dz'}{dt} = x'y' - \beta z'$$

Apa itu ε tidak perlu dipikirkan secara detail. Anggap saja itu merupakan parameter yang menentukan sinkronisasi dua sistem di atas. Perlu diingat bahwa ini sistem Lorenz yang sama dengan yang menghasilkan perilaku aneh-aneh sebelumnya. Maka kaget lah bila kemudian bila kita plot kedua sistem dengan tambahan masing-masing satu suku di atas dengan nilai awal yang sama seperti sebelumnya, kita dapatkan gambar seperti berikut.



Gambar 7. Plot kurva x terhadap t dari dua sistem Lorenz identik yang telah diberi suku sinkronisasi

Menakjubkan bukan? Pada beberapa waktu awal, sistem tersebut menunjukkan perilaku yang benar-benar berbeda dan sukar diprediksi satu sama lain, namun pada t sekitar 19, kedua sistem saling menyelaraskan diri hingga mendapatkan perilaku yang sama persis!

Tentu saja penambahan suku penyelaras seperti di atas sifatnya artifisial, dalam artian merupakan hasil asumsi matematis. Penambahan suku itu pun hanya satu cara dari sekian banyak cara melakukan sinkronisasi dua sistem dinamik yang identic. Kita tidak tahu apa yang dilakukan alam sesungguhnya pada saat sinkronisasi yang natural, namun hasil matematis seperti di atas menunjukkan bagaimana kekacauan yang timbul pada sistem Lorenz di atas tetap bisa membentuk harmoni ketika diberi ‘perintah’ untuk melakukan sinkronisasi.

Apa maknanya? Di alam begitu banyak hal yang terlihat seimbang dan selaras secara natural. Keseimbangan itu sendiri terjadi seakan dalam suatu mekanisme *self-regulate*, yang artinya penyelarasan itu terjadi begitu saja, tanpa kita tahu ada kontrol macam apa yang sebenarnya mengendalikan alam. Manusia sendiri secara artifisial belum bisa membangun apapun yang *self-regulate* secara seimbang dan selaras. Sekali lagi, masih banyak hal yang belum kita pahami dari semesta ini, dan dengan itu, adalah suatu keniscayaan bagi seorang muslim untuk terus mengimani bahwa ada Yang Maha Agung dibalik semua keindahan yang kompleks ini.

Epilog

Matematika tetaplah hanya cara untuk melihat dunia secara abstrak dalam bentuk gagasan dan ide di balik realita. Namun dengan cara itu, bermunculan makna-makna baru yang sifatnya general dan menjadi hikmah tersendiri bagi yang mampu melakukan refleksi mendalam terhadapnya. Jika kita hanya melihat matematika sebagai matematika dan pada akhirnya bermain pada konstruksi abstrak, kita hanya akan menemui kenyataan menyakitkan seperti apa yang diperlihatkan Godel, tapi bila kita mencoba memakai gagasan yang diabstraksi dari konstruksi model-model matematis terhadap realita, maka akan banyak pesan ilahi yang akan muncul, dan mungkin justru pesan-pesan itu yang sebenarnya berusaha disampaikan melalui tanda-tanda alam, karena yang memahami matematika hanyalah yang mau menggunakan akalnya.

Apa yang saya perlihatkan di atas hanya bagian kecil dari matematika, hanyalah satu aspek kecil, hanya satu sistem yang terdiiri dari 3 persamaan, 3 variabel dan 3 parameter. Bagaimana dengan sistem-sistem lainnya? Bagaimana dengan abstraksi-abstraksi lainnya? Percayalah, matematika yang sesungguhnya bisa lebih memukau dari apa yang saya perlihatkan di atas.

Daftar Pustaka

[1] Laplace, Pierre Simon, (1814) [1951]. *Essai philosophique sur les probabilités* [A Philosophical Essay on Probabilities], translated into English from the original French 6th ed. by Truscott, F.W. and Emory, F.L. New York: Dover Publications.

[2] Lorenz, Edward N. (1963). *The Predictability of Hydrodynamic Flow*. Transactions of the New York Academy of Sciences. 25(4): 409–432.

[3] Lorenz, Edward N. (1972). *Predictability*. AAAS 139th meeting, 1972. Available at eaps4.mit.edu/research/Lorenz/Butterfly_1972.pdf

[4] Amritkar, Ravindra E. (2015), *Synchronization of coupled nearly identical dynamical systems*. Presented at Hands-on School on Nonlinear Dynamics, Institute for Plasma Research, 17th Februari 2015.

[5] P. Cvitanovi'c, R. Artuso, R. Mainieri, G. Tanner and G. Vattay, *Chaos: Classical and Quantum* [Webbook]. Available at ChaosBook.org. Copenhagen: Niels Bohr Institute.

[6] Capra, Fritjof (2001) *Jaring-Jaring Kehidupan: Visi Baru Epistemologi dan Kehidupan*. Yogyakarta: Fajar Pustaka Baru.

[7] Witten, Edward (2015), *What every physicist should know about string theory*. Physics Today 68 No. 11: 38.

Sampai titik pasca-doktoral bahkan profesor pun, ku tak yakin ku benar-benar bisa mengungkap makna sepenuhnya matematika. Namun, bukan berarti semua usaha penggalian atas kedalaman maknanya adalah tindakan sia-sia. Justru, penggalian ini akan membawaku dalam sebuah perjalanan ke pusat dari sains, pusat dari rasionalitas, bahkan pusat dari ilmu pengetahuan itu sendiri.

(PHX)